DIZIONARIO

DELLE

SCIENZE MATEMATICHE

VOLUME SESTO

DIZIONARIO

DELLE

SCIENZE MATEMATICHE

PURE ED APPLICATE

COMPILATO DA UNA SOCIETA'
DI ANTICHI ALLIEVI DELLA SCUOLA POLITECNICA DI PARIGI

SOTTO LA DIREZIONE

DI

A.-S. DE MONTFERRIER

MEMBRO DELL' ANTICA SOCIETÀ REALE ACCADEMICA DELLE SCIENZE
DI PARIGI, DELL' ACCADEMIA DELLE SCIENZE DI MARSIGLIA,
DI QUELLA DI METZ EC. EC.

PRIMA VERSIONE ITALIANA

CON NUMEROSE AGGIUNTE E CORREZIONI

DEL D. GIUSEPPE GASBARRI

E

DI GUISEPPE FRANÇOIS

VOLUME SESTO

FIRENZE
PER V. BATELLI E COMPAGNI
1844

DIZIONARIO

DELLE

SCIENZE MATEMATICHE

PURE ED APPLICATE

INT

INTEGRALE. — CALCOLO INTEGRALE. Secondo ramo del calcolo delle DIFFERENZE. Il suo oggetto è quello di considerare le *differenze inverse*, chiamate ancora *somme* o *integrali*. *Vedi* DIFFERENZA n.° 16 e 148.

Questo calcolo, come quello delle *Differenze dirette*, si divide in due parti, cioè: 1.° il *Calcolo integrale alle differenze finite*, ovvero, come comunemente si chiama, il *Calcolo inverso delle differenze*; 2.° il *Calcolo integrale alle differenze infinitamente piccole*, ossia il *Calcolo integrale* propriamente detto. Gli esamineremo ambedue successivamente.

I. CALCOLO INTEGRALE ALLE DIFFERENZE FINITE, ossia *Calcolo inverso delle differenze*. Lo scopo generale di questo calcolo è quello di ottenere la generazione di una differenza di un ordine qualunque $\Delta^m\varphi x$, per mezzo della differenza superiore $\Delta^{m+1}\varphi x$; φx essendo una funzione qualunque della variabile x. La quantità $\Delta^m\varphi x$ considerata in questo modo rapporto a $\Delta^{m+1}\varphi x$ prende il nome di *somma*, per ragioni che in seguito vedremo, e la relazione tra queste due quantità si esprime con

$$\Delta^m\varphi x = \Sigma\left[\Delta^{m+1}\varphi x\right],$$

Σ essendo la caratteristica che indica la *somma*. (*Vedi* DIFFERENZA n.° 16).

Abbiamo spiegato nei paragrafi digià citati dell'articolo DIFFERENZA, il senso delle caratteristiche Σ^2, Σ^3, ec. ed abbiamo veduto che l'espressioni $\Sigma^m\varphi x$ e $\Delta^{-m}\varphi x$ sono equivalenti. Supporremo dunque d'ora in avanti che tutto ciò che ha rapporto alla notazione sia conosciuto.

1. Il problema di trovare la quantità φx quando si conosce la differenza $\Delta\varphi x$, può riportarsi a quello di trovare la differenza dell'ordine generale m di questa differenza $\Delta\varphi x$. Infatti, indicando con $f(m)$, l'espressione $\Delta^m[\Delta\varphi x]$, se facciamo $m = -1$, si ottiene immediatamente

$$\Delta^{-1}\left[\Delta\varphi x\right] = \Sigma\left(\Delta\varphi x\right] = f(-1).$$

Ma applicando alla quaotità $\Delta\varphi x$, la legge di generazione delle differenze (*Vedi* Differenza 14), si ha evidentemente

$$\Delta^m\left[\Delta\varphi x\right]=\Delta\varphi x-m\Delta\varphi\left(x-i\right)+\frac{m(m-1)}{1\cdot2}\Delta\varphi\left(x-2i\right)-$$

ec. . . . .

i essendo l' accrescimento di x, da cui dipende l' accrescimento corrispondente $\Delta\varphi x$ della funzione φx.

Facendo dunque io quest' espressione $m=-1$, otterremo

$$\Sigma\left[\Delta\varphi x\right]=\Delta\varphi x+\Delta\varphi\left(x-i\right)+\Delta\varphi\left(x-2i\right)+\Delta\varphi\left(x-3i\right)+$$

ec. . . . .

Donde si vede che $\Sigma\left[\Delta\varphi x\right]$ indica una vera *somma*. Questo è quello che d' altra parte resultava in un modo più generale dall' espressione (*d*) dell' integrale $\Sigma^m\varphi x$, (*Vedi* Differenza 20).

La generazione della funzione φx è dunque in questo punto data dalla *somma* di tutti i suoi accrescimenti.

2. L' integrazione delle differenze polimonie può sempre riportarsi a quella delle differenze monomie; poichè:

$$\Delta\left[\varphi x+\varphi y+\varphi z\right]=\Delta\varphi x+\Delta\varphi y+\Delta\varphi z,$$

ora, prendendo l' integrale dei due membri di quest' eguaglianza, si ha

$$\varphi x+\varphi y+\varphi z=\Sigma\left[\Delta\varphi x+\Delta\varphi y+\Delta\varphi z\right],$$

ovvero, ciò che significa la medesima cosa

$$\Sigma\Delta\varphi x+\Sigma\Delta\varphi y+\Sigma\Delta\varphi z=\Sigma\left[\Delta\varphi x+\Delta\varphi y+\Delta\varphi z\right].$$

Così non ci occuperemo che delle differenze monomie.

Dobbiamo ancora osservare che qualunque fattore costante della funzione variabile, può mettersi fuori del segno d' integrazione, ovvero che

$\Sigma\left[A\varphi x\right]$ è la medesima cosa di $A\Sigma\varphi x$.

Questa è una conseguenza immediata dal sapere che

$$\Delta\left[A\varphi x\right]=A\,.\,\Delta\varphi x.$$

3. Cominciamo dal procedere alla ricerca dell' integrale della funzione elementare x^m; l' accrescimento di x essendo sempre indicato con i.

Abbiamo (*Vedi* Differenza 21)

$$\Delta x^n=nx^{n-1}i+\frac{n(n-1)}{1\cdot2}x^{n-2}i^2$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot2\cdot3}x^{n-3}i^3$$

$$+\text{ec.}\ldots\ldots$$

Integrando da una parte e dall' altra, viene

$$x^n = ni\,\Sigma x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}\,i^2\,\Sigma x^{n-2}$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\,i^3\Sigma x^{n-3}$$

$$+ \text{ec} \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Quest' espressione farebbe conoscere l' integrale di x^m se si avessero quelli di x^{m-1}, x^{m-2}, x^{m-3}, ec. poichè facendo nell' espressione di sopra $n-1=m$, e liberandone Σx^m, si ottiene

$$\Sigma x^m = \frac{x^{m+1}}{(m+1)i} - \left\{ \frac{m}{1\,.\,2}\,i\Sigma x^{m-1} \right.$$

$$+ \frac{m(m-1)}{1\,.\,2\,.\,3}\,i^2\Sigma x^{m-2}$$

$$+ \frac{m(m-1)(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}\,i^3\Sigma x^{m-3}$$

$$\left. + \text{ec.} \ldots\ldots\ldots\ldots \right\} \ldots\ldots (1).$$

Facendo successivamente in quest' ultima $m=0$, $m=1$, $m=2$, ec. e sostituendo in ciascun valore quelli che abbiamo ottenuti precedentemente, si troverà

$$\Sigma x^0 = \frac{x}{i}$$

$$\Sigma x^1 = \frac{1}{2}\,\frac{x^2}{i} - \frac{1}{2}x$$

$$\Sigma x^2 = \frac{1}{3}\,\frac{x^3}{i} - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2\,.\,3}\,xi$$

$$\Sigma x^3 = \frac{1}{4}\,\frac{x^4}{i} - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2\,.\,2}\,x^2 i$$

$$\Sigma x^4 = \frac{1}{5}\,\frac{x^5}{i} - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}\,x^3 i - \frac{1}{5\,.\,6}\,xi^3$$

$$\Sigma x^5 = \frac{1}{6}\,\frac{x^6}{i} - \frac{1}{2}x^5 + \frac{5}{2\,.\,6}\,x^4 i - \frac{1}{2\,.\,6}\,x^2 i^3$$

ec. = ec.

4. Possiamo ottenere l'espressione generale di Σx^m senza passare dalle somme Σx^{m-1}, Σx^{m-2}, ec. servendosi del metodo dei coefficienti indeterminati. Infatti possiamo porre

$$\Sigma x^m = Ax^{m+1} + Bx^m + Cx^{m-1} + Dx^{m-2} + \text{ec.},$$

poichè tale è evidentemente la forma della generazione di questi integrali. Ora

prendendo la differenza prima da ciascun membro, si trova

$$x^m = \mathrm{A}\,\frac{(m+1)}{1}\,x^m i$$

$$+\mathrm{A}\,\frac{(m+1)\,m}{1\,.\,2}\,x^{m-1}i^2 + \mathrm{A}\,\frac{(m+1)\,m\,(m-1)}{1\,.\,2\,.\,3}\,x^{m-2}i^3 + \text{ec.} \ldots\ldots$$

$$+\mathrm{B}\,\frac{m}{1}\,x^{m-1}i + \mathrm{B}\,\frac{m\,(m-1)}{1\,.\,2}\,x^{m-2}i^2 + \text{ec.} \ldots\ldots$$

$$+\mathrm{C}\,\frac{(m-1)}{1}\,x^{m-2}i + \text{ec.} \ldots\ldots$$

$$+\text{ ec.} \ldots\ldots$$

paragonando tra loro i termini affetti da una medesima potenza di x, si scoprirà tra i coefficienti indeterminati A, B, C, ec., le relazioni seguenti, le quali serviranno facilmente a dedurli gli uni dagli altri,

$$\mathrm{A} = \frac{1}{(m+1)\,i},$$

$$\mathrm{B} = -\mathrm{A}\,\frac{(m+1)\,i}{2} = -\,\frac{1}{2},$$

$$\mathrm{C} = -\mathrm{A}\,\frac{(m+1)\,mi^2}{2\,.\,3} - \mathrm{B}\,\frac{mi}{2},$$

$$\mathrm{D} = -\mathrm{A}\,\frac{(m+1)\,m\,(m-1)\,i^3}{2\,.\,3\,.\,4} - \mathrm{B}\,\frac{m\,(m-1)\,i^2}{2\,.\,3} - \mathrm{C}\,\frac{(m-1)\,i}{2},$$

ec. = ec.

Effettuando il calcolo della parte numerica di questi coefficienti, si ottiene

$$\Sigma x^m = \frac{x^{m+1}}{(m+1)\,i} - \frac{1}{2}\,x^m$$

$$+\frac{1}{2\,.\,3}\,\frac{mi}{2}\,x^{m-1} - \frac{1}{6\,.\,5}\,\frac{m^{3|-1}}{1^{4|1}}\,i^3 x^{m-3}$$

$$+\frac{1}{6\,.\,7}\,\frac{m^{5|-1}}{1^{6|1}}\,i^5 x^{m-5} - \frac{3}{10\,.\,9}\,\frac{m^{7|-1}}{1^{8|1}}\,i^7 x^{m-7}$$

$$+\frac{5}{6\,.\,11}\,\frac{m^{9|-1}}{1^{10|1}}\,i^9 x^{m-9} - \frac{691}{210\,.\,13}\,\frac{m^{11|-1}}{1^{12|1}}\,i^{11} x^{m-11}$$

$$+\frac{35}{2\,.\,15}\,\frac{m^{13|-1}}{1^{14|1}}\,i^{13} x^{m-13} - \frac{3617}{30\,.\,17}\,\frac{m^{15|-1}}{1^{16|1}}\,i^{15} x^{m-15}$$

$$+\frac{43867\,m^{17|-1}}{42\,.\,19\,.\,1^{18|1}}\,i^{17} x^{m-17} - \frac{1222277\,m^{19|-1}}{110\,.\,21\,.\,1^{20|1}}\,i^{19} x^{m-19}$$

$$+\text{ ec.} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2),$$

ci serviamo per abbreviare della notazione delle fattorialle. (*Vedi questa parola.*

5. La differenziazione di una funzione composta di quantità costanti e di quantità variabili, facendo sparire la quantità costanti che entrano nella sua espressione e la quali non sono fattori delle variabili, bisogna, integrando, aggiungere una costante arbitraria che in seguito la natura della questione dà i mezzi per determinarla. Si ha, per esempio, A e B essendo quantità costanti,

$$\Delta \left[A+B\varphi x\right] = B\Delta\varphi x.$$

Così quando si tratta d' integrare $B\Delta\varphi x$, siccome qualunque traccia dalla costante A è scomparsa da quest' espressione, il cui integrale è

$$\Sigma B\Delta\varphi x = B\Sigma\Delta\varphi x = B\varphi x,$$

divien necessario, per completare l' integrale, di agginngare una costante indeterminata; si scrive perciò

$$\Sigma B\Delta\varphi x = B\varphi x + \textit{costante}.$$

In un gran numero di casi questa costaute può essere *zero*, ma in altri essa cangia interamente il valore dell' integrale, ed è sempre essenziale di tenerne conto.

6. L' integraziona cha abbiamo dato della funzione elementare x^m, contieua il principio di quella di tutte le funzioui algebricha razionali e intere, nelle quali la variabile indipendanta riceve un acerescimento costanta. Proponiamoci, per esempio, d' integrare la funzione

$$A_0+A_1x+A_2x^2+A_3x^3,$$

abbiamo

$$\Sigma\left[A_0+A_1x+A_2x^2+A_3x^3\right] = A_0\Sigma x^0+A_1\Sigma x^1$$
$$+ A_2\Sigma x^2+A_3\Sigma x^3.$$

Così, mettendo per Σx^0, Σx^1, Σx^2, Σx^3, i loro valori dati dal n.° 3, otterremo

$$\Sigma\left[A_0+A_1x+A_2x^2+A_3x^3\right] = \frac{A_2i^2-3A_1i+6A_0}{6i}x$$
$$+\frac{A_3i^2-2A_2i+2A_1}{4i}x^2$$
$$-\frac{3A_3i-2A_2}{6i}x^3$$
$$+\frac{A_3}{4i}x^4$$
$$+ \textit{costante}.$$

7. Cerchiamo, per esempio, l' integrale della funziona

$$\left(a+bx\right)^2.$$

Per esegoir ciò svilupperemo il quadrato, il che darà

$$\left(a+bx\right)^2 = a^2+2abx+b^2x^2,$$

moltiplicando a^2 per x^0, integrando e mettendo le costanti fuori del segno Σ, otterremo

$$\Sigma\left(a+bx\right)^2 = a^2\Sigma x^0+2ab\Sigma x+b^2\Sigma x^2;$$

metteodo per Σx^0, Σx e Σx^2, i loro valori dati da qoelli del n.° 3, troveremo

$$\Sigma\left(a+bx\right)^2 = \frac{a^2x}{i}+\frac{abx^2}{i}-abx+\frac{b^2x^3}{3i}-\frac{b^2x^2}{2}+\frac{b^2ix}{2.3}+ costante,$$

ovvero, ordinando rapporto alle poteoze di x,

$$\Sigma\left(a+bx\right)^2 = \frac{b^2x^3}{3i}+\left(\frac{ab}{i}-\frac{b^2}{2}\right)x^2+\left(\frac{a^2}{i}-ab+\frac{b^2i}{2.3}\right)x+ costante.$$

8. Si abbia aocora il prodotto

$$(x+a)(x+b)(x+c).$$

Sviloppando avremo

$$(x+a)(x+b)(x+c) = x^3 \left.\begin{matrix}+a\\+b\\+c\end{matrix}\right| x^2 \left.\begin{matrix}+ab\\+ac\\+cb\end{matrix}\right| x+abc,$$

e integrando si troverà

$$\Sigma(x+a)(x+b)(x+c) =$$

$$\Sigma x^3 \left.\begin{matrix}+a\\+b\\+c\end{matrix}\right| \Sigma x^2 \left.\begin{matrix}+ab\\+ac\\+cb\end{matrix}\right| \Sigma x+abc\Sigma x^0 + costante.$$

D'altro non si tratterà che di mettere nel secoodo membro i valori di Σx^3, Σx^2, di Σx e di Σx^0, dati dall'equazioni stabilite al n.° 3.

9. Esiste un caso particolare in cui on prodotto di diversi fattori presenta nn'integrazione altrettanto elegaote quaoto facile; questo è quello in cui la differenza Δx essendo costante e rappreseotata da i, ci proponiamo d'integrare

$$x(x+i)(x+2i)(x+3i)\ldots\ldots(x+ni).$$

Per esegoir ciò, differenzieremo il prodotto

$$y = (x-i)x(x+i)(x+2i)(x+3i)\ldots(x+ni)\ldots(3),$$

il quale, sulla sinistra cootieoe di più il fattore $(x-i)$; sostituendo invece di x, $(x+i)$, y diventerà

$$y+\Delta y,$$

ed avremo

$$y+\Delta y = x(x+i)(x+2i)(x+3i)\ldots(x+ni)(x+i+ni),$$

togliendo da questo risultemento l'equazione primitiva, rimarrà

$$\Delta y = x(x+i)x+2i)(x+3i)\ldots.(x+ni)(x+i+ni)$$
$$-(x-i)x(x+i)(x+2i)\ldots\ldots(x+ni).$$

La parte $x(x+i)\ldots.(x+ni)$ essendo comune ai due prodotti che compongono il secondo membro di quest'equazione, possiamo metterla in fattor comune, ed avremo

$$\Delta y = [x(x+i)(x+2i)\ldots.(x+ni)][x+i+ni-(x-i)].$$

Il secondo fattore si riduce a $(n+2)i$, e siccome esso è costante, potremo farlo passare fuori del segno Σ, integrando, avremo

$$y = (n+2)i\Sigma[x(x+i)(x+2i)\ldots\ldots(x+ni)].$$

Mettendo il valore di y dato dall'equazione (3), cangiando i due membri di posto e dividendo per $(n+2)i$, troveremo finalmente

$$\Sigma x(x+i)(x+2i)\ldots(x+ni) = \frac{x-i}{(n+2)i}[x(x+i)\ldots(x+ni)].$$

10. L'integrazione della fattoriella $x^{n|i}$, quando si prende l'accrescimento delle differenza eguale a quello della fattoriella, presenta meno difficoltà nell'integrazione della semplice potenza x^m. Infatti, abbiamo (*Vedi* DIFFERENZA n.° 22).

$$\Delta x^{m|i} = mi\left(x+i\right)^{m-1|i},$$

donde, integrando,

$$x^{m|i} = mi\Sigma\left(x+i\right)^{m-1|i},$$

eguaglianza che immedietamente dà

$$\Sigma\left(x+i\right)^{m-1|i} = \frac{x^{m|i}}{mi}.$$

Facendo $m-1=n$, e $x+i=x$, quest'espressione diventa definitivemente

$$\Sigma x^{n|i} = \frac{(x-i)^{n+1|i}}{(n+1)i} + costante \ldots\ldots. (4),$$

e tale è l'integrale generale della fattoriella $x^{n|i}$, qualunque sia l'esponente n intero o frazionario, positivo o negativo.

Nel caso dell'esponente negativo, la formula (4) diventa

$$\Sigma\frac{1}{(x-ni)^{n|i}} = -\frac{1}{(n-1)i(x-ni)^{n-1|i}}\ldots\ldots(5),$$

a motivo di

$$x^{-n|i} = \frac{1}{(x-ni)^{n|i}},\quad \left(x-i\right)^{-n+1|i} = \frac{1}{(x-ni)^{n-1|i}},$$

(*Vedi* Fattorielle n.° 6). Rappresentando, nuovamente, in quest'ultima la base $x-ni$ con x, otterremo

$$\Sigma \frac{1}{x^{n|i}} = -\frac{1}{(n-1)ix^{n-1|i}} + costante \cdot \ldots \ldots \ldots (6).$$

Nel caso in cui si considerassero le differenze con *accrescimenti negativi*, siccome allora la differenza di $x^{m|i}$ è semplicemente,

$$\Delta x^{m|i} = mix^{m-1|i}$$

le formule (4) e (6) diventeranno

$$\left.\begin{aligned} &\Sigma x^{n|i} = \frac{x^{n-1|i}}{(n-1)i} + costante \ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\Sigma \frac{1}{x^{n|i}} = -\frac{1}{(n+1)i(x-i)^{n+1|i}} + costante \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (7).$$

Altrove vedremo applicazioni importantissime di queste integrazioni. (*Vedi* Sommatorio).

11. Passiamo all'integrazioni delle funzioni trascendenti. La differenza della funzione esponenziale a^x è

$$\Delta a^x = a^x\left(a^i - 1\right) \ldots\ldots\ldots (8).$$

Poichè si ottiene questa differenza facendo variare x e sottraendo la funzione primitiva da quella che ha ricevuto l'accrescimento (*Vedi* Differenza), il che dà

$$\Delta a^x = a^{x+i} - a^x = a^x\left(a^i - 1\right).$$

Premesso ciò, integrando i due membri dell'eguagliauza (8), abbiamo

$$a^x = \Sigma\left\{a^x\left(a^i - 1\right)\right\} = \left(a^i - 1\right)\Sigma a^x,$$

donde

$$\Sigma a^x = \frac{a^x}{(a^i - 1)} \ldots\ldots\ldots (9).$$

12. Gl'integrali delle funzioni circolari sen x, cos x, si otterranno con un processo simile al precedente. Abbiamo

$$\Delta \cos x = \cos\left(x+i\right) - \cos x$$

e per conseguenza

$$\Delta \cos x = -2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} i \operatorname{sen}\left(x + \frac{1}{2} i\right) \cdot \ldots\ldots (10),$$

a motivo della relazione generale (*Vedi* Seno)

$$\cos A - \cos B = -2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}\left(A - B\right) . \operatorname{sen} \frac{1}{2}\left(A + B\right).$$

Si deduce dall'eguaglianza (10)

$$\operatorname{sen}\left(x+\frac{1}{2}i\right)=-\frac{\Delta\cos x}{2\operatorname{sen}\frac{1}{2}i},$$

il che diviene, ponendo invece di $x+\frac{1}{2}i$, x,

$$\operatorname{sen} x=-\frac{\Delta\cos\left(x-\frac{1}{2}i\right)}{2\operatorname{sen}\frac{1}{2}i}.$$

Si ottiene dunque, integrando,

$$\Sigma \operatorname{sen} x=-\frac{\cos\left(x-\frac{1}{2}i\right)}{2\operatorname{sen}\frac{1}{2}i}+\mathit{costante}\ \ldots\ (11).$$

Un metodo simile, rammemorandosi la relazione generale

$$\operatorname{sen} A-\operatorname{sen} B=2\operatorname{sen}\frac{1}{2}\left(A-B\right)\cos\frac{1}{2}\left(A+B\right),$$

ci condurrebbe all'espressione

$$\Sigma\cos x=\frac{\operatorname{sen}\left(x-\frac{1}{2}i\right)}{2\operatorname{sen}\frac{1}{2}i}+\mathit{costante}\ \ldots\ (12).$$

13. La generazione degli integrali del prim'ordine, conduce molto facilmente a quella degli integrali degli ordini superiori, poichè $\Sigma^2\varphi x$ è la medesima cosa di $\Sigma(\Sigma\varphi x)$, $\Sigma^3\varphi x$ di $\Sigma^2(\Sigma\varphi x)$ ovvero di $\Sigma\left(\Sigma(\Sigma\varphi x)\right)$ ec., ec. Così per ottenere $\Sigma^2(\varphi x)$, si comincia dal prendere l'integrale del prim'ordine che, nel caso di $\varphi x=x^2$, è

$$\Sigma x^2=\frac{x^3}{3i}-\frac{x^2}{2}+\frac{xi}{6}+A,$$

A indicando la costante. Integrando quest'ultima espressione si ottiene

$$\Sigma^2x^2=\frac{1}{3i}\Sigma x^3-\frac{1}{2}\Sigma x^2+\frac{i}{6}\Sigma x+A\Sigma x^0+\mathit{costante},$$

il che dà definitivamente, effettuando l'integrazioni indicate

$$\Sigma^2x^2=\frac{x^4}{12i^2}-\frac{x^3}{3i}+\frac{5x^2}{12}-\frac{ix}{6}+\frac{Ax}{i}+\mathit{costante}.$$

Si vede che l'integrazione introduce un numero di costanti arbitrarie eguale a quello dell'esponente.

14. Uno degl'immensi vantaggi del calcolo delle differenze finite, consiste a determinare il termine sommatorio di una serie, cioè l'espressione algebrica per mezzo della quale possiamo trovare la somma dei termini di questa serie.

Esaminiamo come può ottenersi il termine sommatorio, quando si conosce il termine generale di una serie. Perciò si abbia la serie

$$a,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ \ldots\ a_{n-1},\ a_n\ \ldots\ (13),$$

la quale corrisponde agli indici

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots\ldots\ n-1,\ n.$$

Si veda che dando successivamente ad n i valori o, 1, 2, 3, 4....n, si formerà con a_n, tutti i tarmini della seria (13); a_n ne è per conseguenza il termine generale. Ma questo tarmine generale può considerarsi come la differenza di cui si accrescerebbe

$$a+a_1+a_2+a_3\ \ldots\ldots + a_{n-1}\ \ldots\ (14),$$

per formare la serie (13).

Per conseguenza, se indichiamo con S la somma dei termini della saria (14), avremo

$$\Delta S = a_n;$$

donde ne ricaveremo, integrando,

$$S = \Sigma a_n\ \ldots\ldots\ (15).$$

15. Tale sarà la somma dei termini compresi inclusivamente da a fino ad a_{n-1}, cioè, fino al termine cha occupa l'$(n-1)^{simo}$ posto, a partire da a_1; ma se invece di contare i posti da a_1, gli contiamo da a, il termina a_{n-1} occuperà l' n^{simo} posto, e allora gl'indici

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ldots\ (n-1),$$

della serie (14), si cangerannn negli altri

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ldots\ n;$$

in questn modo, il termine sommatorin S esprimerà la serie dai termini compresi da $n=1$ fino ad $n=n$.

16. Per darne nn esempio, cerchiamo il termine sommatorio dalla serie

$$3,\ 7,\ 11,\ 15,\ 19,\ 23\ \ldots\ldots\ (16),$$

il cui termine generale è $4n+3$. Questa formola ci darà

$$S = \Sigma(4n+3),$$

ovvero

$$S = 4\Sigma n + 3\Sigma n^0\ \ldots\ldots\ (17),$$

mettendo n invece di x, nell'equazioni del n° 3, e facendo $i=1$, perchè gl' indici crescono di un' unità, dedurremo da quest' equazione

$$\Sigma n^0 = n,\quad \Sigma n = \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n,$$

sostituendo questi valori nell'equazione (17), riducendn, ed aggiungendo nna costante, troveremn

$$S = 2n^2 + n + costante\ \ldots\ldots\ (18).$$

Si determinerà la costante, osservando che quando $n=0$, la somma S dei termini è nulla, il che riduce l'equazione (18) a

$$costante = 0,$$

sopprimendo dunque la costante, avremo

$$S = 2n^2 + n \ldots\ldots (18).$$

17. Per applicare questa formola alla somma dai termini della serie (16), osserveremo che questi termini essendo nel numero di sei, abbiamo, n.° 15,

$$n = 6,$$

mettendo questo valore nell' equazione (17), troveremo

$$S = 78.$$

18. Cerchiamo ancora i quindici primi termini della serie dei numeri naturali, cioè sommiamo la serie

$$1, 2, 3, 4, \ldots\ldots 15,$$

il termine generale di questa serie essendo $n+1$, abbiamo per il suo termine sommatorio

$$S = \Sigma n + \Sigma n^0.$$

Per mezzo delle solite equazioni, ridurremo questa a

$$S = \frac{1}{2} n^2 + \frac{1}{2} n.$$

Quest' equazione, come quella dell'esempio precedente, non comporta costante.
Gl' indici non differendo dai termini delle serie, troveremo facendo $n = 15$, che la somma di questi termini è

$$S = 120.$$

19. Per terza applicazione, sommiamo la serie

$$1+4+9+16+25+36+49+64+81+100,$$

che è la serie dei dieci primi termini dei quadrati dei numeri naturali. Il termine generale di questa serie essendo $(n+1)^2$, in conseguenza avremo per il termine sommatorio

$$S = \Sigma(n+1)^2 = \Sigma(n^2+2n+1) = \Sigma n^2 + 2\Sigma n + \Sigma n^0;$$

sostituendo in quest' espressione i valori di Σn^2, di Σn, e di Σn^0, dati dalle solite equazioni del n.° 3, nelle quali si cangerà x in n ed i nell' unità, il termine sommatorio avrà per espressione

$$S = \frac{1}{3} n^3 + \frac{1}{2} n^2 + \frac{1}{6} n + \textit{costante} \ldots\ldots (19);$$

e siccome il numero dei termini delle serie è 10, troveremo facendo $n = 10$

$$S = 385.$$

Non aggiungiamo costante per la ragione che abbiamo spiegata (n.° 16); ma se invece di contare la serie dal numero 1; si contasse dal numero 36, la somma dei termini che precedono 36 dovrebbe esser nulla. Per conseguenza facendo $n = 5$, si dovrebbe avere $S = 0$. Quest' ipotesi ridurrebbe l' equazione (19) a

$$\textit{costante} = -55.$$

Questo valore cangerebbe l'equazione (19) in

$$S=\frac{1}{3}n^3+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{6}n-55;$$

e siccome il numero dei termini della serie proposta è 10, facendo $n=10$, si avrebbe per la somma dei termini di questa serie, compresi da 36 fino a 100 inclusivamente

$$S=\frac{1000}{3}+\frac{100}{2}+\frac{10}{6}-55,$$

ossia

$$S=385-55=330.$$

20. L'interpolazione, come abbiamo di già veduto in altri articoli ha per scopo d'inserire in una serie di termini che seguono una data legge, altri termini subordinati a questa medesima legge.

21. Se fossero date, per esempio, le coordinate AP e PM (*Tav.* CL, *fig.* 1) AQ e QN di due punti M ed N, situati sopra un piano, basterebbe far passare la retta MN per questi due punti per risolvere il problema; poichè è evidente che le coordinate AP e PM, AQ e QN, e tutte quelle della retta AN sarebbero concatenate mediante una medesima legge.

22. Se tre punti L, M, N (*Tav.* CL, *fig.* 2) dati sul medesimo piano, fossero determinati dalle coordinate AI, IL, AP, PM, AQ e QN, facendo passare per questi tre punti l'arco di circolo LMN, si soddisfarebbe ancora al problema; ma l'arco LMN non ne somministrerà più la soluzione, quando verrà dato un maggior numero di punti. D'altra parte, quantunque il circolo sia una curva facile a descrivere, essa non è, per la sua equazione, quella che si potrebbe considerare come la più adattata al caso presente. Ne sceglieremo perciò un'altra che si presti più facilmente all'ipotesi che potremo stabilire sopra il numero dei punti per i quali la curva deve passare. Questa curva è la parabola di tutti i generi, che è compresa nell'equazione

$$y=M+Nx+Px^2+Qx^3+\ldots\ldots(20).$$

23. Supponiamo dunque che dall'osservazione, o per qualunque altro mezzo, si sia giunti a sapere che le ascisse AI, AP, AQ, AR (*Tav.* CL, *fig.* 3), abbiano per ordinate corrispondenti IL, PM, QN, RS, ec.; se queste ascisse sono rappresentate dalle lettere a, b, c, d, ec., e che le loro ordinate lo siano con A, B, C, D, ec. l'equazione (20), nella quale i coefficienti M, N, P, Q, ec. sono indeterminati, sarà ancora soddisfatta tanto dai valori a e A, quanto dai valori b e B e così di seguito, dimodochè avremo per determinare i coefficienti N, M, P, Q, ec., le equazioni

$$\left.\begin{array}{l} A=M+Na+Pa^2+Qa^3+\text{ec.} \\ B=M+Nb+Pb^2+Qb^3+\text{ec.} \\ C=M+Nc+Pc^2+Qc^3+\text{ec.} \\ D=M+Nd+Pd^2+Qd^3+\text{ec.} \\ \text{ec.}\qquad \text{ec.}\qquad \text{ec.} \end{array}\right\}\ldots\ldots(21).$$

Quest'equazioni dovranno essere nel medesimo numero dei coefficienti M, N,

P, Q, ec., che sono da determinare. Se la prima è sottratta dalla seconda, e che la seconda lo sia dalla terza, e così di seguito, si otterrà

$$B-A=N(b-a)+P(b^2-a^2)+Q(b^3-a^3)+\text{ec.},$$
$$C-B=N(c-b)+P(c^2-b^2)+Q(c^3-b^3)+\text{ec.},$$
$$D-C=N(d-c)+P(d^2-c^2)+Q(d^3-c^3)+\text{ec.},$$
$$\text{ec.}\qquad\text{ec.}\qquad\text{ec.}\qquad\text{ec.};$$

e dividendo per il fattore che moltiplica N, si avrà

$$\left.\begin{aligned}\frac{B-A}{b-a}&=N+P\frac{(b^2-a^2)}{b-a}+Q\frac{(b^3-a^3)}{b-a}+\text{ec.}\\ \frac{C-B}{c-b}&=N+P\frac{(c^2-b^2)}{c-b}+Q\frac{(c^3-b^3)}{c-b}+\text{ec.}\\ \frac{D-C}{d-c}&=N+P\frac{(d^2-c^2)}{d-c}+Q\frac{(d^3-c^3)}{d-c}+\text{ec.}\\ \text{ec.}\qquad&\qquad\text{ec.}\qquad\qquad\text{ec.}\end{aligned}\right\}\ldots\ldots(22).$$

i termini che si trovano compresi tra le parentesi essendo le differenze di due quantità elevate ad una medesima potenza, sono della forma u^m-v^m; ora si sa che un' espressione di questo genere, quando m è un numero intero, è esattamente divisibile per $u-v$ e dà

$$u^m-v^m=(u-v)\left[u^{m-1}+vu^{m-2}+v^2u^{m-3}+\ldots+v^{m-2}u+v^{m-1}\right]\ldots(23),$$

e paragonando le quantità (b^2-a^2), (b^3-a^3), (c^2-b^2), ec., della formula 22 alla formula 23, facendovi $m=2$, $=3$, $=4$, ec., possiamo decomporle così

$$(b-a)(b+a),\quad (b-a)(b^2+ab+a^2),\ \text{ec.},$$

e sostituendo questi valori nell' equazione (22), si ottengono i seguenti risultamenti

$$\left.\begin{aligned}\frac{B-A}{b-a}&=N+P(b+a)+Q(b^2+ab+a^2)+\text{ec.}\\ \frac{C-B}{c-b}&=N+P(c+b)+Q(c^2+cb+b^2)+\text{ec.}\\ \frac{D-C}{d-c}&=N+P(d+c)+Q(d^2+cd+c^2)+\text{ec.}\\ \text{ec.}\qquad&\qquad\text{ec.}\qquad\qquad\text{ec.}\end{aligned}\right\}\ldots\ldots(24).$$

Se si suppone

$$\frac{B-A}{b-a}=B',\quad \frac{C-B}{c-b}=C',\quad \frac{D-C}{d-c}=D',\ \text{ec.},$$

B', C', D', ec., componendosi dei valori dati saranno ancora, delle quantità co-

nosciute; e sostituendola nell' equazioni (24), si avrà

$$\left.\begin{array}{l} B' = N + P(b+a) + Q(b^2+ab+a^2) + \text{ec.} \\ C' = N + P(c+b) + Q(c^2+cb+b^2) + \text{ec.} \\ D' = N + P(d+c) + Q(d^2+cd+c^2) + \text{ec.} \\ \text{ec.} \qquad \text{ec.} \qquad \text{ec.} \end{array}\right\} \ldots (25),$$

allora quest' equazioni potranno adoprarsi invece dell'equazioni (21), il cui numero sarà diminuito di un'unità; e in luogo dell'incognite M, N, P, Q ec., esse non conterranno più che N, P, Q, ec., vale a dire una di meno. Se continuando a operare come sopra, si prendono le differenze $C'-B'$, $D'-C'$, ec., si avrà, dividendo per il moltiplicatore di P,

$$\frac{C'-B'}{c-a} = P + Q\,\frac{[c^2-a^2+b(c-a)]}{c-a} + \text{ec.},$$

$$\frac{D'-C'}{d-b} = P + Q\,\frac{[d^2-b^2+c(d-b)]}{d-b} + \text{ec.},$$

$$\text{ec.} \qquad \text{ec.} \qquad \text{ec.}$$

e si vede che i divisori $c-a$ e $d-b$ spariranno ancora dai secondi membri di quest' equazioni, liberate dall' incognite M ed N. Per assicurarsi che seguirà il medesimo di qualunque termine dell' equazioni (25), siano

$$\frac{k(b^n-a^n)}{b-a}, \quad \frac{k(c^n-b^n)}{c-b}, \quad \frac{k(d^n-c^n)}{d-c}, \text{ ec.},$$

i valori generali dell' ultimo termine dell'equazioni (25), gli troveremo sviluppandogli con l' aiuto della formula (23),

$$C' = N + \text{ec.} \ldots\ldots + k(c^{n-1}+bc^{n-2}+b^2c^{n-3}+\ldots+b^{n-1}),$$
$$B' = N + \text{ec.} \ldots\ldots + k(a^{n-1}+ba^{n-2}+b^2a^{n-3}+\ldots+b^{n-1}).$$

Abbiamo scritto in un ordine inverso la quantità racchiusa tra l' ultime parentesi, perchè essa sia ordinata rapporto a b, come l' altra.

Prendendo la differenza, troveremo

$$C'-B' = \ldots\, k\,[c^{n-1}-a^{n-1}+b(c^{n-2}-a^{n-2})+b^2(c^{n-3}-a^{n-3})+\text{ec.}],$$

quantità che è esattamente divisibile per $c-a$.

Seguirebbe il medesimo dell' altre differenze $D'-C'$, ec.

Continuando ad operare come sopra giungeremo ad eliminare tutte l' incognite meno una sola, e si otterranno quindi i valori di M, di N, di P, di Q ec., che si sostituiranno nell' equazione (20).

24. Il metodo d' interpolazione esposto appartiene al Newton. Il Lagrange ne ha dato uno che riposa egualmente sul fattore comune che abbiamo soppresso, e del quale possiamo dare la seguente dimostrazione: siano dunque p, q, r, s, ec. differenti ascisse, alle quali si sia riconosciuto che corrispondono le ordinate P, Q, R, S, ec.; se consideriamo p, q, r, s, ec., come valori che, messi invece di x in una data equazione, portino per y quelli di P, Q, R, S, ec., quest' equazione

dovrà avere la seguente forma

$$y = \mathrm{AP}+\mathrm{BQ}+\mathrm{CR}+\mathrm{DS}+ \text{ec.} \ldots\ldots (26).$$

Infatti, la condizione domandata sarà adempita, se facendo

$x=p$, si ha $\mathrm{A}=1$, $\mathrm{B}=0$, $\mathrm{C}=0$, $\mathrm{D}=0$, ec. . . . (27),

$x=q$, si ha $\mathrm{B}=1$, $\mathrm{A}=0$, $\mathrm{C}=0$, $\mathrm{D}=0$, ec. . . . (28),

$x=r$, si ha $\mathrm{C}=1$, $\mathrm{A}=0$, $\mathrm{B}=0$, $\mathrm{D}=0$, ec. . . . (29),

ec. ec. ec.

Per soddisfare alle equazioni (27) $\mathrm{B}=0$, $\mathrm{C}=0$, $\mathrm{D}=0$, ec., bisogna che B, C, D, ec., siano delle seguenti forme

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{B}=(x-p)\mathrm{Q}' \\ \mathrm{C}=(x-p)\mathrm{R}' \\ \mathrm{D}=(x-p)\mathrm{S}' \\ \text{ec. . . . . ec.} \end{array}\right\} \ldots\ldots (30).$$

Si proverebbe egualmente che per soddisfare all'equazioni $\mathrm{A}=0$, $\mathrm{C}=0$, $\mathrm{D}=0$, ec. (28), il fattore $x-q$ deve appartenere a tutti i coefficienti A, C, D, ec., fuori che a quello di Q, e che seguirà il medesimo dei fattori $x-r$, $x-s$, ec., avuto riguardo ai coefficienti di P, di Q, di S, e a quelli di P, di Q, e di R, ec.

Se ci limitiamo ai quattro primi termini del secondo membro dell'equazione (26), vale a dire a quelli che non sono compresi nell'ec., si vede dunque che il valore di y sarà della forma

$$\left.\begin{array}{l} y=\alpha\,(x-q)(x-r)(x-s)\,\mathrm{P} \\ \quad+\beta\,(x-p)(x-r)(x-s)\,\mathrm{Q} \\ \quad+\gamma\,(x-p)(x-q)(x-s)\,\mathrm{R} \\ \quad+\varepsilon\,(x-p)(x-q)(x-r)\,\mathrm{S} \end{array}\right\} \ldots (31).$$

Ora, perchè il coefficiente di P si riduca all'unità quando $x=p$, bisogna che α sia della forma

$$\frac{1}{(p-q)(p-r)(p-s)}.$$

Si dimostrerebbe egualmente che si deve avere

$$\beta=\frac{1}{(q-p)(q-r)(q-s)},$$

$$\gamma=\frac{1}{(r-p)(r-q)(r-s)},$$

$$\varepsilon=\frac{1}{(s-p)(s-q)(s-r)},$$

sostituendo questi valori e quelli di α nell'equazione (31), si avrà perciò questa formula d'interpolazione

$$
\left.
\begin{aligned}
y = & \frac{(x-q)(x-r)(x-s)}{(p-q)(p-r)(p-s)} \mathrm{P} + \\
+ & \frac{(x-p)(x-r)(x-s)}{(q-p)(q-r)(q-s)} \mathrm{Q} + \\
+ & \frac{(x-p)(x-q)(x-s)}{(r-p)(r-q)(r-s)} \mathrm{R} + \\
+ & \frac{(x-p)(x-q)(x-r)}{(s-p)(s-q)(s-r)} \mathrm{S} +
\end{aligned}
\right\} \quad \ldots\ldots (32).
$$

Per conseguenza, se, (*Tav.* CL, *fig.* 4) eoo l'aiuto delle eoordioate

$$
\begin{aligned}
\mathrm{A}p &= p, & pk &= \mathrm{P}, \\
\mathrm{A}q &= q, & ql &= \mathrm{Q}, \\
\mathrm{A}r &= r, & rm &= \mathrm{R}, \\
\mathrm{A}s &= s, & sn &= \mathrm{S},
\end{aligned}
$$

si eostruiscouo i puoti k, l, m, n, per i quali passa una curva $klmn$, un valore arbitrarío AP dato all'ascissa x, essendo messo nell'equazione (32), determinerà sempre per y il valore PM, ehe eorrispooderà a quest'ascissa.

25. La differeoziale di una variabile di una funziooe potendo rappresentarsi con l'espressione udx, nella quale u è una funzione di x, se si ehiama z l'integrale di quest'espressione, si avrà

$$dz = udx \ \ldots\ldots (33),$$

e siceome z in virtù di quest'eqoazione, non poò essere ehe una fuoziooe di x, se diamo ad x l'aecreseimento h, avremo, per il teorema del Taylor

$$z' = z + \frac{dz}{dx} h + \frac{d^2z}{dx^2} \cdot \frac{h^2}{1.2} + \frac{d^3z}{dx^3} \cdot \frac{h^3}{1.2.3} + \text{ec.},$$

da questa ricaveremo

$$z' - z = \frac{dz}{dx} h + \frac{d^2z}{dx^2} \cdot \frac{h^2}{1.2} + \frac{d^3z}{dx^3} \cdot \frac{h^3}{1.2.3} + \text{ec.},$$

e osservando ehe $z'-z$ uoo è altra cosa che la differenza Δz, avremo

$$\Delta z = \frac{dz}{dx} h + \frac{d^2z}{dx^2} \frac{h^2}{1.2} + \frac{d^3z}{dx^3} \frac{h^3}{1.2.3} + \text{ec.} \ldots (34),$$

integrando e eonsideraodo h eome una oostante che possiamo metter fuori del segno d'integraziooe, otterremo

$$z = h\Sigma \frac{dz}{dx} + \frac{h^2}{1.2} \Sigma \frac{d^2z}{dx^2} + \frac{h^3}{1.2.3} \Sigma \frac{d^3z}{dx^3} + \text{ec.} \ldots (35).$$

Premesso ciò, l'equaziooe (33) ci dà (*Vedi* Calcolo Integrale).

$$z = \int udx, \quad \frac{dz}{dx} = u, \quad \frac{d^2z}{dx^2} = \frac{du}{dx}, \quad \frac{d^3z}{dx^3} = \frac{d^2u}{dx^2}, \ \text{ec.},$$

mettendo questi valori nell'equazione (35), avremo

$$\int u dx = h\Sigma u + \frac{h^2}{1 \cdot 2}\Sigma\frac{du}{dx} + \frac{h^3}{1 \cdot 2 \cdot 3}\Sigma\frac{d^2x}{dx^2} + \text{ec.},$$

dedurremo da quest' equazione

$$\Sigma u = \frac{1}{h}\int u dx - \frac{h}{1 \cdot 2}\Sigma\frac{du}{dx} - \frac{h^2}{1 \cdot 2 \cdot 3}\Sigma\frac{d^2u}{dx^2} - \text{ec.},$$

ovvero rimettendo la costante h sotto il segno Σ

$$\Sigma u = \frac{1}{h}\int u dx - \frac{1}{1 \cdot 2}\Sigma\frac{du}{dx}h - \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3}\Sigma\frac{d^2u}{dx^2}h^2 - \text{ec.} \ldots (36).$$

Ciò che in questo caso mi ha diretto, contro l'uso, a trasportare una costante sotto il segno d'integrazione, si è che h entrando nella medesima maniera di $\frac{du}{dx}$, nello sviluppo di Σu, ho preveduto che h si troverà elevato, in questo sviluppo, alle medesime potenze di $\frac{du}{dx}$. Per conseguenza, quando avremo provato, come lo faremo, che lo sviluppo di Σu contiene una serie di termini in $\frac{du}{dx}$ in $\frac{d^2u}{dx^2}$ in $\frac{d^3u}{dx^3}$, ec., ne resulterà che questi termini saranno moltiplicati respettivamente per h, per h^2, per h^3, ec., vale a dire daranno luogo ad una serie di questa forma.

$$\mathrm{M}\frac{du}{dx}h + \mathrm{N}\frac{d^2u}{dx^2}h^2 + \mathrm{P}\frac{d^3u}{dx^3}h^3 + \text{ec.}$$

Se nell'equazione (36), prendiamo per u la funzione $\frac{du}{dx}$, bisognerà cangiare $\frac{du}{dx}$ in $\frac{d^2u}{dx^2}$, $\frac{d^2u}{dx^2}$ in $\frac{d^3u}{dx^3}$, ec., ed avremo facendo nuovamente passare h sotto il segno Σ,

$$\Sigma\frac{du}{dx} = \frac{1}{h}\int du - \frac{1}{1 \cdot 2}\Sigma\frac{d^2u}{dx^2}h - \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3}\Sigma\frac{d^3u}{dx^3}h^2 - \text{ec.},$$

sostituendo $\int du$ con u, e per liberarci dal divisore che affetta $\int du$, moltiplicando per h, che faremo passare sotto i segni d'integrazione, avremo

$$\Sigma\frac{du}{dx}h = u - \frac{1}{1 \cdot 2}\Sigma\frac{d^2x}{dx^2}h^2 - \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3}\Sigma\frac{d^3u}{dx^3}h^3 - \text{ec.} \ldots (37),$$

cangiando in quest' equazione u in $\frac{du}{dx}$, e per conseguenza $\frac{du}{dx}$ in $\frac{d^2u}{dx^2}$,

$\frac{d^4u}{dx^4}$ in $\frac{d^5u}{dx^5}$, ec., otterremo

$$\Sigma \frac{d^2u}{dx^2}h = \frac{du}{dx} - \frac{1}{1.2}\Sigma\frac{d^3u}{dx^3}h^2 - \frac{1}{1.2.3}\Sigma\frac{d^4u}{dx^4}h^3 - \text{ec.},$$

moltiplicando per h, che faremo passare sotto il segno Σ, si troverà

$$\Sigma\frac{d^2u}{dx^2}h^2 = \frac{du}{dx}h - \frac{1}{1.2}\Sigma\frac{d^3u}{dx^3}h^3 - \frac{1}{1.2.3}\Sigma\frac{d^4u}{dx^4}h^4 - \text{ec.} \ldots (38).$$

26. Con un processo analogo, otterremo quindi

$$\left.\begin{array}{l} \Sigma\frac{d^3u}{dx^3}h^3 = \frac{d^2u}{dx^2}h^2 - \frac{1}{1.2}\Sigma\frac{d^4u}{dx^4}h^4 - \frac{1}{1.2.3}\Sigma\frac{d^5u}{dx^5}h^5 - \text{ec.} \\ \Sigma\frac{d^4u}{dx^4}h^4 = \frac{d^3u}{dx^3}h^3 - \frac{1}{1.2}\Sigma\frac{d^5u}{dx^5}h^5 - \frac{1}{1.2.3}\Sigma\frac{d^6u}{dx^6}h^6 - \text{ec.} \\ \text{ec.} \qquad \text{ec.} \qquad \text{ec.} \qquad \text{ec.} \end{array}\right\} \ldots (39).$$

Scriviamo le equazioni (36) e (37) abbreviate nella seguente maniera

$$\Sigma u = \frac{1}{h}\int udx + \textit{termini in } \Sigma\frac{du}{dx}h, \text{ in } \Sigma\frac{d^2u}{dx^2}h^2, \text{ ec.} \ldots (40).$$

$$\Sigma\frac{du}{dx}h = u + \textit{termini in } \Sigma\frac{d^2u}{dx^2}h^2, \text{ in } \Sigma\frac{d^3u}{dx^3}h^3, \text{ ec.} \ldots (41).$$

Potremo, con l'aiuto dell'equazione (41), eliminare $\Sigma\frac{du}{dx}h$ dall'equazione (40) e ottenere questo risultamento,

$$\Sigma u = \frac{1}{h}\int udx + \textit{termini in } u, \text{ in } \Sigma\frac{d^2u}{dx^2}h^2, \text{ in } \Sigma\frac{d^3u}{dx^3}h^3, \text{ ec.}$$

L'equazione (38), nella quale gl'integrali del secondo membro non cominciano che dal terz'ordine, sarà quindi sufficiente ad eliminare $\Sigma\frac{d^2u}{dx^2}h^2$; e continuando così otterremo un'equazione il cui primo termine sarà $\frac{1}{h}\int udx$, e il quale, essendo una funzione delle quantità non eliminate u, $\frac{du}{dx}h$, $\frac{d^2u}{dx^2}h^2$, $\frac{d^3u}{dx^3}h^3$, ec., e delle funzioni numeriche, dovrà essere della forma,

$$\Sigma u = \frac{1}{h}\int udx + Au + B\frac{du}{dx}h + C\frac{d^2u}{dx^2}h^2 + \text{ec.} \ldots (42).$$

27. Per determinare i coefficienti A, B, C, ec., supponiamo $u = e^{x}$ avremo,

(*Vedi* Calcolo Differenziale n.° 42),

$$du = de^x = e^x dx \ldots . (43),$$

e per conseguenza

$$\frac{du}{dx} = e^x, \quad \frac{d^2u}{dx^2} = e^x, \quad \frac{d^3u}{dx^3} = e^x, \text{ ec.} \ldots . (44).$$

Sostituendo questi valori e quelli di u, nell'equazione (42), troveremo

$$\Sigma e^x = \frac{1}{h}\int e^x dx + Ae^x + Bhe^x + Ch^2e^x + \text{ ec.},$$

e siccome la prima dell'equazioni (44) ci dà $\int e^x dx = u$, e che u equivale ad e^x, per ipotesi, si avrà

$$\Sigma e^x = \frac{e^x}{h} + Ae^x + Bhe^x + Ch^2e^x + \text{ ec.} \ldots \ldots (45),$$

Il primo membro di quest'equazione può mettersi sotto un'altra forma. Infatti abbiamo trovato (*Vedi* Differenza n.° 35), che la differenza di a^x era

$$\Delta a^x = a^x\left(a^{\Delta x} - 1\right);$$

nel caso presente, abbiamo

$$\Delta x = h, \quad \text{e} \quad a = e,$$

per conseguenza

$$\Delta e^x = e^x\left(e^h - 1\right),$$

integrando si ottiene

$$e^x = \Sigma e^x\left(e^h - 1\right),$$

e siccome $e^h - 1$ è un fattore costante, possiamo metterlo fuori del segno Σ, il che ci darà, mettendo il primo membro invece del secondo,

$$\left(e^h - 1\right)\Sigma e^x = e^x,$$

donde dedurremo

$$\Sigma e^x = \frac{e^x}{e^h - 1}.$$

Sostituendo questo valore nell'equazione (45), e^x sparirà come fattore comune, e trasportando il primo termine del secondo membro, rimarrà

$$\frac{1}{e^h - 1} - \frac{1}{h} = A + Bh + Ch^2 + \text{ ec.} \ldots . (46);$$

e si vede che i coefficienti A, B, C, ec., dell'equazione (42), non sono altra cosa

che i termini i quali moltiplicano le potenze di h nello sviluppo di

$$\frac{1}{e^h - 1} - \frac{1}{h},$$

seguendo le potenze ascendenti di h.

Questo bel teorema appartiene all' Eulero, e, come lo prova l' equazione (42), fa dipendere l' integrale Σu da $\int u dx$, come pure dai coefficienti differenziali

$$\frac{du}{dx},\ \frac{d^2u}{dx^2},\ \frac{d^3u}{dx^3},\ \text{ec.}$$

28. Per determinare i coefficienti A, B, C, D, ec., cominciamo dal cercare lo sviluppo di e^h. Per eseguir ciò abbiamo veduto (*Vedi* Calcolo Differenziale n.° 41), che si aveva

$$a^x = 1 + \frac{Ax}{1} + \frac{A^2x^2}{1.2} + \frac{A^3x^3}{1.2.3} + \text{ec.} \ldots (47),$$

e che A, dall' equazione (26), stabilita al citato numero del calcolo differenziale, era eguale a $\frac{\log a}{\log e}$. Per conseguenza, quando si prende $a = e$, la costante A riducendosi all' unità, l' equazione (47) si cangia in

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \text{ec.} \ldots (48),$$

e facendo $x = h$, l' equazione (48) diventa

$$e^h = 1 + h + \frac{h^2}{1.2} + \frac{h^3}{1.2.3} + \frac{h^4}{1.2.3.4} + \text{ec.} \ldots (49).$$

Premesso ciò, l' equazione (46) ci dà, facendo sparire i denominatori, e trasportando $e^h - 1$ nel secondo membro,

$$h = e^h - 1 + \left(e^h - 1\right) h \left(A + Bh + Ch^2 + Dh^3 + \text{ec.}\right),$$

ovvero

$$h = \left(e^h - 1\right)\left(1 + Ah + Bh^2 + Ch^3 + Dh^4 + \text{ec.}\right),$$

mettendo in questo risultamento il valore di $e^h - 1$, dato dall' equazione (49), si avrà

$$h = \left(h + \frac{h^2}{1.2} + \frac{h^3}{1.2.3} + \frac{h^4}{1.2.3.4} + \text{ec.}\right) \times$$

$$\times \left(1 + Ah + Bh^2 + Ch^3 + \text{ec}\right),$$

ovvero eseguendo le operazioni indicate

$$h = h + Ah^2 + Bh^3 + Ch^4 + Dh^5 + \text{ec.}$$
$$+ \frac{h^2}{1.2} + A\frac{h^3}{1.2} + B\frac{h^4}{1.2} + C\frac{h^5}{1.2} + \text{ec.}$$
$$+ \frac{h^3}{2.3} + A\frac{h^4}{2.3} + B\frac{h^5}{2.3} + \text{ec.}$$
$$+ \frac{h^4}{2.3.4} + A\frac{h^5}{2.3.4} + \text{ec.}$$
$$+ \frac{h^5}{2.3.4.5} + \text{ec.}$$
$$+ \text{ec.}, \quad \text{ec.}$$

Quest' equazione avendo luogo qualunque sia h, eguaglieremo a zero i coefficienti delle medesime potenze di h, il che ci somministrerà le equazioni

$$A + \frac{1}{1.2} = 0,$$

$$B + \frac{A}{1.2} + \frac{1}{2.3} = 0,$$

$$C + \frac{B}{1.2} + \frac{A}{2.3} + \frac{1}{2.3.4} = 0,$$

$$D + \frac{C}{1.2} + \frac{B}{2.3} + \frac{A}{2.3.4} + \frac{1}{2.3.4.5} = 0,$$

quest' equazioni ci daranno

$$A = -\frac{1}{2},\ B = \frac{1}{3.4},\quad C = 0,\quad D = -\frac{1}{2}.\frac{1}{3.4}.\frac{1}{5.6},\ \text{ec.}$$

29. La generazione dell' integrale dell' ordine m di una funzione qualunque φx, si ottiene in un modo generale per mezzo delle differenziali di questa funzione, e questa generazione presenta delle particolarità osservabili, che dobbiamo far conoscere.

Se si sviluppa la funzione $\Delta\varphi x$, per mezzo della formula del Taylor (*Vedi* DIFFERENZA n.° 73), si trova

$$\Delta\varphi x = \varphi(x+i) - \varphi x = \frac{d\varphi x}{dx}\frac{i}{1} + \frac{d^2\varphi x}{dx^2}\frac{i^2}{1.2} + \frac{d^3\varphi x}{dx^3}\frac{i^3}{1.2.3} + \text{ec.} \ldots\ldots$$

e paragonando questo sviluppo con quello della funzione esponenziale e^y, che è

$$e^y = 1 + \frac{y}{1} + \frac{y^2}{1.2} + \frac{y^3}{1.2.3} + \text{ec.},$$

si vede, quando $y = \frac{d\varphi x}{dx} i$, il che dà

$$e^{\frac{d\varphi x}{dx} i} - 1 = \frac{d\varphi x}{dx} \cdot \frac{i}{1} + \frac{(d\varphi x)^2}{dx^2} \frac{i^2}{1.2} + \frac{(d\varphi x)^3}{dx^3} \frac{i^3}{1.2.3} + \text{ec.},$$

che quest' ultimo sviluppo non differisce, nella sua forma, da quello di $\Delta\varphi x$ che per gli esponenti delle potenze di $d\varphi x$. Così si potrà stabilire

$$\Delta\varphi x = e^{\frac{d\varphi x}{dx} i} - 1 \ldots\ldots (50),$$

porchè nello sviluppo del secondo membro di quest' eguaglianza si trasporti nella caratteristica d gli esponenti delle potenze di $d\varphi x$. Condizione essenziale senza la quale l' eguaglianza (50) non ha alcun senso; quest' eguaglianza non diventando effettiva che mediante lo sviluppo del secondo membro.

Il Lagrange è stato il primo ad osservare che quest' analogia tra le differenze e le potenze aveva egualmente luogo per tutti i gradi, e che in generale si aveva

$$\Delta^m\varphi x = \left(e^{\frac{d x}{dx} i} - 1\right)^m \ldots\ldots\ldots (51),$$

osservando sempre, che bisogna sviluppare il secondo membro e trasportare alla caratteristica d gli esponenti delle potenze di $d\varphi x$.

Questa relazione (51), essendo stata dimostrata per tutti i valori positivi e negativi dell' esponente m, dà immediatamente

$$\Delta^{-m}\varphi x = \Sigma^m\varphi x = \left(e^{\frac{d\varphi x}{dx} i} - 1\right)^{-m} \ldots . (52).$$

Questa relazione si scrive ancora nella seguente maniera

$$\Sigma^m\varphi x = \left(e^{\frac{d}{dx} i} - 1\right)^{-m} \varphi x,$$

allora gli esponenti delle potenze appartengono immediatamente alla caratteristica d, e con la riunione della quantità φx, si formano le differenziali successive $d\varphi x$, $d^2\varphi x$, ec.

30. Consideriamo ora, una variabile indipendente x ed una funzione y di questa variabile. La variazione di x è la costante Δx, la quale è sempre conosciuta. Un' equazione alle differenze finite esprime in generale una relazione tra la variabile x, la funzione y, e un dato numero di differenze Δy, $\Delta^2 y$, $\Delta^3 y$, ec. di questa funzione.

D' altra parte si vede sul momento che mettendo invece di Δy, $\Delta^2 y$, $\Delta^3 y$, ec. le espressioni generali date (*Vedi* DIFFERENZA n.° 27), la relazione di cui si tratta si troverà data tra x, y_0, y_1, y_2, y_3, ec., l' indice del termine il più lontano nella serie dei valori di y, essendo eguale all' ordine il più elevato delle

differenze contenute nell' equazione proposta. Donde si vede che un' equazione alle differenze finite non è altra cosa, che una relazione tra un dato numero di termini consecutivi di una serie, per mezzo della quale possiamo determinare tutti i termini di questa serie, dopo averne presi arbitrariamente un numero eguale all' ordine dell' equazione.

Integrare un' equazione alle differenze finite, equivale a trovare l' espressione del termine generale della serie della quale abbiamo parlato. Resulta da ciò che precede che quest' espressione deve necessariamente contenere un numero di costanti arbitrarie, eguale all' ordine più elevato delle differenze che si trovano nell' equazione, o all' indice il più elevato dei valori successivi della funzione y i quali ci sono contenuti.

31. Il caso più semplice è quello in cui l' equazione proposta si riduce a

$$\Delta^n y = 0,$$

la quale, per la formula stabilita (*Vedi* DIFFERENZA n.° 27), equivale a

$$y_n - ny_{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}y_{n-2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{2.3}y_{n-3} + \ldots \pm y_n = 0,$$

e donde si ricava

$$y_n = ny_{n-1} - \frac{n(n-1)}{2}y_{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{2.3}y_{n-3} - \ldots \mp y_n.$$

Il termine della serie affetto dall' indice n in questo punto è dato dalla somma di n termini precedenti, moltiplicati ciascuno da coefficienti numerici dipendenti da quest' indice.

L' integrazione dell' equazione $\Delta^n y = 0$ si effettuerà d' altra parte per mezzo di ciò che abbiamo veduto n.° 3, facendovi, $i = \Delta x$. Si avrà

$$\Delta^{n-1}y = \Sigma^1 y_0 = A_1,$$

$$\Delta^{n-2}y = \Sigma^2 y_n = \frac{A_1 x}{\Delta x} + A_1,$$

$$\Delta^{n-3}y = \Sigma^3 y_0 = \frac{A^1 x^2}{2(\Delta x)^2} - \frac{(A_1 - 2A_2)x}{2\Delta x} + A_3,$$

ec. = ec. = ec.

A_1, A_2, A_3, ec., essendo costanti arbitrarie; e in generale l' integrale dell' ordine n sarà

$$_n y = \alpha + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \ldots + \alpha_{n-1} x^{n-1},$$

α, α_1, α_2, α_3, ... α_{n-1} essendo coefficienti costanti arbitrari, il cui numero è eguale all' ordine dell' equazione.

32. Consideriamo ora l' equazione

$$y_{x+n} + Py_{x+n-1} + Qy_{x+n-2} + Ry_{x+n-3} + \ldots + Uy_x = 0 \ldots . (53),$$

nella quale P, Q, R, ...U indicano numeri costanti. Se facciamo $y = \delta^x$, δ indicando una costante, tutti i termini, dopo la sostituzione di questo valore saranno divisibili per δ^x, e rimarrà

$$\delta^n + P\delta^{n-1} + Q\delta^{n-2} + R\delta^{n-3} + U = 0 \ldots . (54),$$

dimodochè l' espressione $y = \delta^x$ soddisferà all' equazione proposta (53), quando δ sia una qualunque delle radici dell' equazione (54).

Rappresentando dunque con $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots \delta_n$ le n radici dell' equazione (54), che comincercmo dal supporre tutte reali ed ineguali, avremo per y gli n valori particolari $y = \delta^x{}_1$, $y = \delta^x{}_2$, $y = \delta^x{}_3 \ldots y = \delta^x{}_n$; e poichè l' equazione (53) sarebbe egualmente soddisfatte delle somma di due, o di un numero qualunque di questi valori, affetti ciascuno da coefficienti costanti qualunque, si avrà,

$$y = A_1\delta^x{}_1 + A_2\delta^x{}_2 + A_3\delta^x{}_3 + \ldots A_n\delta^x{}_n$$

per l' espressione dell' integrale generale di quest' equazione; $A_1, A_2, A_3, \ldots A$, essendo le n costanti arbitrarie che debbono entrare in questo integrale.

33. Nel caso in cui l' equazione (54) abbia delle radici immaginarie, sia

$$\delta^2 - 2k\delta\cos\varphi + k^2 \quad \text{e} \quad \delta = k(\cos\varphi \pm \sqrt{-1}\,.\operatorname{sen}\varphi)$$

uno dei fattori reali del secondo grado del suo primo membro, e le due radici immaginarie corrispondenti.

Ora, abbiamo

$$e^{x\sqrt{-1}} = \cos x + \sqrt{-1}\,.\operatorname{sen} x,$$

nella quale x rappresenta un numero qualunque, e ove possiamo indifferentemente attribuire il segno + o il segno — al radicale $\sqrt{-1}$. Se si scrive mx invece di x, m indicando ancora un numero costante qualunque, (purchè esso sia reale) verrà

$$e^{mx\sqrt{-1}} = \cos mx + \sqrt{-1}\operatorname{sen} mx.$$

Ma se si elevano i due membri dell' equazione precedente alla potenze m, si avrà

$$e^{mx\sqrt{-1}} = \left(\cos x + \sqrt{-1}\operatorname{sen} x\right)^m.$$

Dunque

$$\left(\cos x + \sqrt{-1}\operatorname{sen} x\right)^m = \cos mx + \sqrt{-1}\operatorname{sen} mx$$

formula importantissima nell' analisi, la quale è stata data dal Moivre.

Questa formula è dimostrata, qualunque sia il valore dell' esponente m. Possiamo non ostante giungervi molto semplicemente nel caso in cui m è un numero intero positivo, formando le potenze successive di

$\cos x + \sqrt{-1}\operatorname{sen} x$. Infatti, si ha evidentemente

$$\left(\cos x + \sqrt{-1}\operatorname{sen} x\right)^2 = \cos^2 x + 2\sqrt{-1}\operatorname{sen} x\cos x - \operatorname{sen}^2 x,$$

donde resulta

$$\left(\cos x+\sqrt{-1}\operatorname{sen} x\right)^2=\cos 2x+\sqrt{-1}\operatorname{sen} 2x:$$

si ha egualmente

$$\left(\cos x+\sqrt{-1}\operatorname{sen} x\right)^3=\left(\cos x+\sqrt{-1}\operatorname{sen} x\right)\left(\cos 2x+\sqrt{-1}\operatorname{sen} 2x\right)$$

donde si ricava, sviluppando

$$\left(\cos x+\sqrt{-1}\operatorname{sen} x\right)^3=\cos 3x+\sqrt{-1}\operatorname{sen} 3x,$$

e così di seguito

Mediante ciò, con facilità si riconosce, che l'equazione (53) è soddisfatta dai due valori particolari

$$y=k^x\left(\cos\varphi x+\sqrt{-1}\operatorname{sen}\varphi x\right),$$

e

$$y=k^x\left(\cos\varphi x-\sqrt{-1}\operatorname{sen}\varphi x\right),$$

e, per conseguenza, dalla somma di questi valori, moltiplicati ciascuno da un coefficiente costante qualunque. Donde si conclude che la parte dell'espressione generale della funzione y, corrispondente alle due radici immaginarie di cui si tratta è, sotto forma reale,

$$B_1 k^x\cos\varphi x+B_2 k^x\operatorname{sen}\varphi x,$$

B_1 e B_2 essendo delle costanti arbitrarie.

34. Il caso, in cui l'equazione (54) ha delle radici eguali, si risolve in un modo simile a quello, che si vedrà nel Calcolo Integrale *alle differenze infinitamente piccole*, per l'integrazione delle equazioni lineari a due variabili di un ordine qualunque, allorchè esse hanno delle radici eguali. Se si rappresentasse con δ_1, e $\delta_1+\omega$ due della radici di quest'equazione, la somma dei valori particolari corrispondenti sarebbe

$$A_1\delta_1{}^x+A_2\left(\delta_1+\omega\right)^x,$$

ovvero, sviluppando la potenza indicata,

$$\left(A_1+A_2\right)\delta_1{}^x+A_2\omega\,.\,x\delta_1{}^{x-1}+A_2\omega^2\frac{x(x-1)}{2}\delta_1{}^{x-2}+\text{ec.}$$

Ora, possiamo dare ad A_1 e A_2 valori tali che le quantità A_1+A_2 e $A_2\omega$ si riducano a costanti finite qualunque, quando supporremo ω infinitamente piccola, il che riduce l'espressione precedente a

$$B_1\delta_1{}^x+B_2 x\delta_1{}^{x-1}.$$

Nel caso di tre radici eguali, la somma dei tre valori particolari corrispondenti sarà

$$A_1\delta_1^x + A_2 x\delta_1^{x-1} + A_3\left(\delta_1+\omega\right)^x,$$

ovvero

$$\left(A_1+A_3\right)\delta_1^x + \left(A_2+A_3\omega\right)x\delta_1^{x-1} + A_3\omega^2\frac{x(x-1)}{2}\delta_1^{x-2} + \text{ec.}$$

E siccome possiamo attribuire alle costanti A_1, A_2, A_3 valori tali, che le quantità A_1+A_3, $A_2+A_3\omega$, $A_3\omega^2$ diventino delle costanti finite qualunque, quando ω diventerà infinitamente piccola, la somma dei tre valori particolari di cui si tratta prende la forma

$$B_1\delta_1^x + B_2 x\delta_1^{x-1} + B_3\frac{x(x-1)}{2}\delta_1^{x-2}.$$

E così di seguito nel caso in cui vi fossero un maggior numero di radici eguali tra loro.

35. Le costanti arbitrarie introdotte nell'integrale generale, si determineranno sempre dalla condizione che quest'integrale riproduce n valori dati dalla funzione y, corrispondenti a n valori egualmente dati dalla variabile x.

36. Abbiamo dovuto in questo punto limitarci a presentare nella maniera la più succinta i principii fondamentali del *Calcolo inverso delle differenze*; quanto a completare l'integrazione dell'equazioni alle differenze, essa impegna in particolarità, le quali non possono trovar luogo in questo dizionario, e siamo obbligati a rimandare il lettore al gran *Trattato del calcolo differenziale* del La-croix.

II. Calcolo Integrale *alle differenze infinitamente piccole.*

Si dà esclusivamente il nome di Calcolo Integrale particolarmente a questo ramo del *Calcolo delle differenze inverse*. Fin qui gli autori delle opere elementari hanno presentato il calcolo dalle differenze finite, come interamente distinto dal calcolo differenziale, sebbene però tutti riconoscessero che questi calcoli hanno moltissimi punti in cui si rassomigliano. Questa distinzione che si è voluta stabilire tra i due rami di un solo e medesimo calcolo, (rami che non differiscono tra loro che per la natura dagli *accrescimenti* che ci si considerano) non ha alcun fondamento; e se si risale al principio medesimo dell'esistenza delle Differenze delle funzioni, vale a dire alla generazione di queste differenze, la cui accezione primitiva è data dall'espressioni

Differenze *reali*. $\Delta\varphi x = \varphi(x+\Delta x) - \varphi x$,
Differenze *ideali*. $d\varphi x = d\varphi(x+dx) - \varphi x$,

si riconosce facilmente che le differenze ideali o *infinitamente piccole* non potrebbero avere altra leggi generali, che quelle delle differenza reali o *finite*. Abbiamo infatti riconosciuto (*Vedi* Differenza), che le prime di queste leggi non sono che casi particolari delle seconde, quelli ove la differenza Δx, diventa dx, cioè da *reale* diventa *ideale*; e se allora l'espressioni si rendono molto più semplici, per la sottrazione dei termini che diventano nulli, ciò è unicamente in virtù

di questa legge fondamentale delle quantità infinitesimali, mediante la quale l'eguaglianza di due quantità qualunque A e B, prese in una medesima sfera di grandezza, non può essere alterata dall'influenza di un'altra quantità C infinitamente piccola, comparativamente con le grandezze dell'ordine A e B. Evidentemente segue lo stesso delle *differenze inverse* o *integrali*, e possiamo sempre passare dall'integrale $\Sigma\varphi x$ all'integrale $\int\varphi x$, facendo l'accrescimento i della variabile x, infinitamente piccolo, e facendo sparire dalla sua espressione i termini affetti dalle potenze i^2, i^3 ec., le quali sono altrettante quantità infinitesimali nulle davanti i o dx. Per esempio, se nell'integrale dato n.° 4, per la potenza x^m si fa $i = dx$ quest'integrale si riduce a

$$\int x^m = \frac{x^{m+1}}{(m+1)dx}.$$

Il che può mettersi sotto la forma

$$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}$$

perchè dx si considera come una quantità costante.

Ciò non ostante è sempre molto più corto di cercare direttamente la differenziale $d\varphi x$, che di ottenerla dalla differenza $\Delta\varphi x$, facendovi $i = dx$, e tale è l'immenso vantaggio delle differenze infinitamente piccole, che la generazione di una quantità qualunque può ottenersi col loro mezzo, nel modo il più semplice possibile. Procederemo perciò alla deduzione diretta degli integrali, ossia alla generazione delle fonzioni primitive le cui differenziali sono date.

37. Cominciamo dal proporre la differenziale $x^m dx$; poichè si ha (*Vedi* DIFFERENZIALE n.° 21)

$$d\left[x^n\right] = nx^{n-1}dx \; \ldots\ldots \; (55),$$

otterremo, integrando i due membri

$$\int d\left[x^n\right] = \int nx^{n-1}dx,$$

ove, i due segni $\int$ e d distruggendosi, si ha

$$x^n = \int nx^{n-1}dx = n\int x^{n-1}dx.$$

Abbiamo già avvertito che i fattori costanti possono mettersi fuori delle caratteristiche.

Quest'ultima eguaglianza ci dà, facendo $n-1=m$

$$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{(m+1)}.$$

Così la regola generale per ottenere l'integrale di $x^m dx$, è la seguente: *aumentare l'esponente di un'unità e quindi dividere per il nuovo esponente e per dx*. Possiamo osservare che quest'espressione è quella che abbiamo ottenuto di sopra passando da Σx^m a $\int x^m$.

Si abbia, per esempio, $\frac{adx}{x^3}$, avremo dunque

$$\int\frac{adx}{x^3}=\int ax^{-3}dx=\frac{ax^{-3+1}}{-3+1}$$

$$=\frac{ax^{-2}}{-2}=-\frac{a}{2x^2}.$$

Si troverà egualmente

$$\int dx\sqrt[3]{x^2}=\int x^{\frac{2}{3}}dx=\frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1}$$

$$=\frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}}=\frac{3x^{\frac{5}{3}}}{5}=\frac{3x\sqrt[3]{x^2}}{5}.$$

Per ottenere l'integrale completo, è necessario di aggiungere al membro dell'eguaglianza trovata sopra una quantità costante C, la quale rimane interamente arbitraria, fintantochè qualche circostanza non venga a determinare il valore, che deve avere l'integrale per un valore particolare della variabile x. Infatti, qualunque sia la costante C, si ha

$$d\left[C+x^n\right]=dx^n=nx^{n-1}dx;$$

e siccome qualunque traccia di C è scomparsa nella funzione differenziale $nx^{n-1}dx$, si vede che questa differenziale è la medesima per tutte le funzioni della forma $M+x^n$, M essendo una quantità costante qualunque; così reciprocamente, l'integrale di $nx^{n-1}dx$, vale a dire $M+x^n$ può avere un'infinità di valori corrispondenti a tutti i valori, che si possono dare arbitrariamente ad M. Abbiamo dunque generalmente per l'integrale di $x^m dx$, l'espressione

$$\int x^m dx=\frac{x^{m+1}}{m+1}+C \ldots . (56).$$

Se, dalla natura della questione che conduce alla differenziale $x^m dx$, il suo integrale dovesse annullarsi, o diventare *zero*, quando la variabile x riceve un valore particolare b, questa circostanza espressa nell'equazione (54) darebbe

$$0=\frac{b^{m+1}}{m+1}+C,$$

donde si otterrebbe

$$C=-\frac{b^{m+1}}{m+1}.$$

Allora la costante non sarebbe più arbitraria, e l'integrale completo sarebbe,

$$\int x^m dx = \frac{x^{m+1} - b^{m+1}}{m+1} \ldots\ldots (57).$$

Ed è mediante un processo interamente simile, che possiamo determinare il valore della costante in tutte le integrazioni, ove gl'integrali debbono ricevere dei valori particolari per certi valori della variabile.

38. L'espressione (55) avendo luogo per tutti i valori dell'esponente, seguirà il medesimo dell'espressione (56). Nel caso dell'esponente negativo, si hà dunque ancora

$$\int x^{-m} dx = \frac{x^{-m+1}}{-m+1} + C.$$

Il che è la medesima cosa di

$$\int \frac{dx}{x^m} = \frac{1}{(1-m)x^{m-1}} + C \ldots\ldots (58).$$

Per i valori frazionari positivi e negativi dell'esponente, si avrebbe egualmente

$$\int x^{\frac{n}{m}} dx = \frac{mx^{\frac{n+m}{m}}}{n+m} + C \ldots (59),$$

$$\int \frac{dx}{x^{\frac{n}{m}}} = \frac{m}{(m-n)x^{\frac{n-m}{m}}} + C \ldots\ldots (60).$$

L'applicazione di queste formule non presenta veruna difficoltà. Per esempio se vogliamo integrare la quantità $ax^{\frac{4}{5}}dx$; facendo nelle formula (59), $n=4$, $m=5$, si ottiene immediatamente

$$a\int x^{\frac{4}{5}} dx = a.\frac{5x^{\frac{9}{5}}}{9} = \frac{5}{9}.ax^{\frac{9}{5}} + C.$$

La formula (60) farebbe egualmente trovare

$$\int dx\sqrt[3]{ax^{-2}} = \sqrt[3]{a}\int\frac{dx}{x^{\frac{2}{3}}} = \sqrt[3]{a}.\frac{3}{1.x^{-\frac{1}{3}}} = 3\sqrt[3]{a}.x^{\frac{1}{3}}$$

$$= 3\sqrt[3]{ax} + C$$

39. La formula generale (56) da cui ne derivano la (58), (59) e (60), presenta un caso particolare, che merita osservazione, e che dobbiamo esaminare; questo

è quello in cui $m = -1$, poichè allora essa dà

$$\int \frac{dx}{x} = \frac{1}{0} + C,$$

$\frac{1}{0}$, essendo una quantità infinitamente grande, da questo resultamento niente si rileva, a motivo dell' indeterminazione completa della quantità C. Così ammettendo che esista una funzione ψx di x tale che la sua differenziale sia $\frac{dx}{x}$, o tale che si abbia

$$d\psi x = \frac{dx}{x},$$

la formula generale (56) sembra insufficiente per darne la generazione. Non è niente affatto così però, poichè se questa funzione ψx esiste, essa deve avere un valore qualunque b, corrispondente a $x = 0$, b potendo essere d' altra parte esso medesimo eguale zero; e siccome mediante quest' osservazione l' integrale completo, per tutti i valori dell' esponente m, è mediante la formula (57)

$$\int x^m dx = \frac{x^{m+1} - b^{m+1}}{m+1},$$

quest' integrale, nel caso di $m = -1$, diventa

$$\int \frac{dx}{x} = \frac{x^0 - b^0}{0} = \frac{0}{0},$$

vale a dire, una quantità indeterminata della quale possiamo trovare il valore col processo dato alla parola *Differenza*. Infatti, considerando m come la variabile, nell' espressione generale, e differenziando i due termini della funzione, si ottiene, indicando con la caratteristica log, il logaritmo naturale della quantità che ne è affetta.

$$\frac{d[x^{m+1} - b^{m+1}]}{d[m+1]} = \frac{x^{m+1}.\log x.dm - b^{m+1}.\log b.dm}{dm}$$

$$= x^{m+1}.\log x - b^{m+1}.\log b,$$

il che diviene nel caso di $m = -1$

$$\log x - \log b.$$

Abbiamo dunque ancora

$$\int \frac{dx}{x} = \log x - \log b,$$

ovvero

$$\int \frac{dx}{x} = \log x + C.$$

$\log b$ rimanendo indeterminato. Questa difficoltà che si presenta nell'applicazione della formula generale (56) dipende dalla natura trascendente della funzione $\log x$.

Partendo dalla differenziale

$$d\log x = \frac{dx}{x},$$

(*Vedi* DIFFERENZIALE n.° 64) si sarebbe immediatamente riconosciuto che

$$\int \frac{dx}{x} = \log x + C \ldots\ldots (61).$$

40. L'integrazione della funzione semplice $x^m dx$, dà i mezzi di ottenere non solamente quella di tutte le funzioni differenziali razionali e intere di una sola variabile x, ma ancora quella di un gran numero di funzioni differenziali irrazionali. Questo è quello cha faremo conoscere.

Qualunque funzione differenziale razionale e intera di una medesima variabile può riportarsi alla forma

$$\left[Ax^{\alpha} + Bx^{\beta} + Cx^{\gamma} + Dx^{\delta} + \text{ec.} \ldots\ldots\right]dx,$$

ora, in virtù di

$$\int\left(X+Y+Z \text{ ec.}\right) = \int X + \int Y + \int Z + \text{ec.},$$

si ha

$$\int\left[Ax^{\alpha} + Bx^{\beta} + Cx^{\gamma} + Dx^{\delta} + \text{ec.} \ldots\right]dx = A\int x^{\alpha}dx$$
$$+ B\int x^{\beta}dx$$
$$+ C\int x^{\gamma}dx$$
$$+ D\int x^{\delta}dx$$
$$+ \text{ec.}$$

espressione che, integrando ciascun termine in particolare, diventa

$$\int\left[Ax^{\alpha} + Bx^{\beta} + \text{ec.} \ldots\right]dx = A\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + B\frac{x^{\beta+1}}{\beta+1}$$
$$+ \text{ec.} \ldots\ldots + \text{cost.}$$

In questo caso non vi è bisogno di aggiungere che una sola costante arbitraria, poichè facilmente si vede che, aggiungendone una per ciascun monomio, la loro somma sarebbe ancora rappresentata da una sola quantità arbitraria.

41. Le funzioni della forma

$$\left(A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{ec.} \ldots\right)^m dx,$$

potranno ancora essere integrate nella medesima maniera, poichè sviluppando la

potenza si ottiene un seguito di termini, la cui forma generale è

$$Mx^{\mu} dx ,$$

e, quest'integrazione può aver luogo per mezzo delle formule (56), (58), (59) e (60), per tutti i valori interi ed altri dell'esponente m. Quando quest'esponente è intero e positivo, l'integrale si compone di un numero finito di termini; in tutti gli altri casi, esso è rappresentato da una serie indefinita.

42. Esistono alcune funzioni della forma di sopra delle quali possiamo, con l'aiuto di certe trasformazioni, ottenere l'integrale, senza aver bisogno di sviluppare la potenza. Passeremo ad esaminarle.

L'integrazione della funzione binomia $\left(a+bx\right)^m dx$, è prima di tutte in questo caso, qualunque sia ancora l'esponente; poichè facciamo $a+bx=z$, il che dà

$$x=\frac{z-a}{b}, \quad e \quad dx=\frac{dz}{b},$$

sostituendo questi valori nella funzione data, otterremo

$$\left(a+bx\right)^m dx=\frac{z^m dz}{b},$$

e, per conseguenza

$$\int\left(a+bx\right)^m dx=\int\frac{z^m dx}{b}=\frac{z^{m+1}}{(m+1)b},$$

mettendo per z il suo valore, otterremo definitivamente

$$\int\left(a+bx\right)^m dx=\frac{(a+bx)^{m+1}}{(m+1)b}+C.$$

43. La medesima trasformazione può ancora impiegarsi per la funzione più complicata

$$\left(a+bx^n\right)^m x^{n-1} dx,$$

infatti, facendo $a+bx^n=z$, si trova

$$dz=d\left(a+bx^n\right)=bd\left(x^n\right)=nbx^{n-1}dx,$$

e per conseguenza

$$\left(a+bx^n\right)^m x^{n-1} dx=\frac{z^m dz}{nb}.$$

Ma

$$\int\frac{z^m dz}{nb}=\frac{1}{nb}\int z^m dz=\frac{z^{m+1}}{(m+1)nb}.$$

Dunque

$$\int\left(a+bx^{n}\right)^{m}x^{n-1}dx=\frac{z^{m+1}}{(m+1)nb}$$

$$=\frac{(a+bx^{n})^{m+1}}{(m+1)nb}+C.$$

Siccome in generale $d\varphi x^{m}=m\varphi x^{m-1}.d\varphi x$, tutte le volte che la quantità che moltiplica la potenza φx^{m-1} sarà la differenziale della base φx, si potrà ottenere l'integrale, per mezzo di considerazioni simili alle precedenti.

Sia per esempio la funzione differenziale

$$(a+bx+cx^{2})^{m}.(b+2cx)dx,$$

è facile riconoscere che $(b+2cx)dx$, ovvero che $bdx+2cxdx$, è la differenziale di $a+bx+cx^{2}$, poichè facendo

$$z=a+bx+cx^{2},$$

si ha

$$dz=bdx+2cxdx.$$

Questa funzione è dunque la medesima cosa di $z^{m}dz$, e per conseguenza il suo integrale è

$$\int\left(a+bx+cx^{2}\right)^{m}.\left(b+2cx\right)dx=\frac{(a+bx+cx^{2})^{m+1}}{m+1}+C.$$

La medesima trasformazione può applicarsi ancora per riportare certe differenziali a logaritmi: se si avesse per esempio, $\frac{dx}{a+bx}$, facendo $a+bx=z$, se ne dedurrebbe $dx=\frac{dz}{b}$; sostituendo, si avrebbe

$$\int\frac{dx}{a+bx}=\int\frac{1}{b}.\frac{dz}{z}=\frac{1}{b}\int\frac{dz}{z}=\frac{1}{b}\log z+C,$$

e, mettendo per z il suo valore,

$$\int\frac{dx}{a+bx}=\frac{1}{b}\log\left(a+bx\right)+C.$$

Operando egualmente per $\frac{dx}{a-bx}$, si troverà che l'integrale di quest'espressione, è

$$\int\frac{dx}{a-bx}=-\frac{1}{b}\log\left(a-bx\right)+C.$$

44. Quando le trasformazioni precedenti non possono aver luogo, bisogna, come l'abbiamo già detto, sviluppare la potenza e integrare la serie resultante termine per termine. Sia, per esempio, $(a+bx^{2})^{4}dx$ la funzione proposta; si ot-

tiene sviluppando

$$(a-bx^3)^4dx = a^4.\,dx - 4a^3bx^3.\,dx + 6a^2b^2x^6.\,dx$$
$$-4ab^3x^9.\,dx + b^4x^{12}.\,dx$$

Così, integrando ciascun termine in particolare, si troverà

$$\int(a-bx^3)^4dx = a^4x - a^3bx^4 + \frac{6}{7}\,a^2b^2x^7$$
$$-\frac{4}{10}\,ab^3x^{10} + \frac{1}{13}\,b^4x^{13} + C.$$

Se la funzione proposta fosse $\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}}$, si avrebbe ancora

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x)}} = \int dx\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}} = \int\left[dx + \frac{1}{2}\,x^2dx + \text{ec.}\right];$$

donde

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{x^5}{5} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\;\frac{5}{6}\cdot\frac{x^7}{7} + \text{ec.} + C.$$

45. Le funzioni circolari *seno* e *coseno* possono in molti casi dispensare dall'integrazione per serie, e somministrano allora degli integrali semplicissimi e assai utili. Rammentiamoci (DIFFERENZE ni. 46 e 49), che

$$d\,\text{sen}\,z = \cos z\,.\,dz\,,$$
$$d\cos z = -\text{sen}\,z\,.\,dz.$$

Dalla natura di queste funzioni si ha (*Vedi* SENO)

$$\cos^2 z + \text{sen}^2 z = 1$$

donde si deduce

$$\cos z = \sqrt{1-\text{sen}^2 z}.$$

Sostituendo questo valore in quello di $d\,\text{sen}\,z$, viene

$$d\,\text{sen}\,z = dz\,.\sqrt{1-\text{sen}^2 z}.$$

Facciamo ora $\text{sen}\,z = x$, ed otterremo l'espressione

$$dz = \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}},$$

l'integrazione della quale dà

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = z + C.$$

Ma z è qui l'arco il cui seno è eguale ad x, così si ha,

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = \textit{arco}\ (\text{sen} = x) + C\ldots.\ (62).$$

46. Possiamo riportare all' integrale precedente quello di $\frac{dx}{\sqrt{(a^2-x^2)}}$, poichè dividendo i due termini della frazione per a, si ottiene

$$\frac{\frac{dx}{a}}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}},$$

e questa quantità essendo composta in $\frac{x}{a}$, come $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ lo è in x, ne resulta

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=arco\left(\text{sen}=\frac{x}{a}\right)+C.$$

47. Si troverebbe operando come sopra

$$\int\frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}}=arco\,(\cos=x)+C\ \ldots\ (63),$$

$$\int\frac{dx}{1+x^2}=arco\,(\text{tang}=x)+C\ \ldots\ (64),$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}=arco\,(\text{seno-verso}=x)+C\ \ldots\ (65).$$

Integrali che conducono ai seguenti:

$$\int\frac{-dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=arco\left(\cos=\frac{x}{a}\right)+C,$$

$$\int\frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}.arco\left(\text{tang}=\frac{x}{a}\right)+C,$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{2ax-x^2}}=arco\left(\text{seno-verso}=\frac{x}{a}\right)+C.$$

Quest' espressioni somministrano molte conseguenze degne di osservazioni, che esamineremo.

48. Consideriamo in particolare l' integrale (64), e cerchiamone un'altra espressione integrando per serie. Abbiamo

$$\frac{dx}{1+x^2}=\left(1+x^2\right)^{-1}dx,$$

Ora $\left(1+x^2\right)^{-1}$, sviluppando la potenza dà

$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+\text{ec.}\ \ldots\ (66),$$

e per conseguenza

$$\frac{dx}{1+x^2} = dx - x^2dx + x^4dx - x^6dx + \text{ec.}$$

Così integrando termine per termine otterremo

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \text{ec.} \ldots,$$

donde, paragonando con l'equazione (64)

$$arco\left(\text{tang} = x\right) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \text{ec.} \ldots (67).$$

Non vi è bisogno di aggiungere costante, perchè facendo $x=0$, l'arco si riduce a zero.

Questa serie che dà l'*arco*, per mezzo della *tangente*, può servire per trovare il valore della circonferenza del circolo il cui raggio è l'unità, poichè si sa che l'arco eguale all'ottava parte della circonferenza ha la sua tangente eguale al raggio, facendo dunque $x=1$, avremo

$$arco\,(\text{tang} = 1) = \frac{\pi}{4},$$

π indicando sempre la semi-circonferenza per il raggio $=1$, e per conseguenza,

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \text{ec.} \ldots (68).$$

Se la tangente è maggiore dell'unità, i termini della serie (67) andando aumentando, non potremo dare un valore approssimato dell'arco; in questo caso si otterrà una serie discendente operando così: si farà $x = \frac{1}{x}$ nell'equazione (66), il che la cangerà in

$$\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = 1 - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4} - \frac{1}{x^6} + \text{ec.};$$

moltiplicando i due termini del primo membro per x^2, si avrà

$$\frac{x^2}{x^2+1} = 1 - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4} - \frac{1}{x^6} + \text{ec.}$$

dividendo tutta l'equazione per x^2, si otterrà

$$\frac{1}{x^2+1} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^6} - \frac{1}{x^8} + \text{ec.}$$

(Possiamo osservare che si giungerebbe al medesimo risultamento dividendo 1 per x^2+1). Dunque

$$\int \frac{dx}{x^2+1} = \int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^6} - \frac{1}{x^8} + \text{ec.}\right) dx;$$

e, effettuando l'integrazione indicata

$$\text{arco}\left(\text{tang}=x\right)=-\frac{1}{x}+\frac{1}{3x^3}-\frac{1}{5x^5}+\text{ec.}\ldots+\text{C}\ldots(69).$$

Per trovare il valore della costante, non faremo $x=0$, poichè ciò renderebbe i termini del secondo membro dell'equazione (69) infiniti; ma facendo $x=\infty$, l'espressione arco(tang$=x$) sarà eguale al quarto della circonferenza, e l'equazione (69) diventerà

$$\frac{1}{4}\ circonf=0+\text{C};$$

e rappresentando con $\frac{1}{2}\pi$ il quarto della circonferenza, l'equazione (69), ci darà

$$\text{arco}\left(\text{tang}=x\right)=\frac{1}{2}\pi-\frac{1}{x}+\frac{1}{3x^3}-\frac{1}{5x^5}+\text{ec.}$$

49. Per integrare per mezzo delle serie

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}dx,$$

si svilupperà $\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}$, per mezzo della formula del binomio, nel seguente modo: si comincerà dal calcolare i coefficienti dello sviluppo di $\left(1-x^2\right)^m$, nell'ipotesi di $m=-\frac{1}{2}$, scrivendo per formare questi cofficienti,

$$m,\frac{m-1}{2},\quad\frac{m-2}{3},\quad\frac{m-3}{4},\ \text{ec.}$$

e, cangiando m in $-\frac{1}{2}$, quest'espressioni diventeranno

$$-\frac{1}{2},\quad-\frac{3}{4},\quad-\frac{5}{6},\quad-\frac{7}{8},\quad\text{ec.}$$

Moltiplicando successivamente $-\frac{1}{2}$ per $-\frac{3}{4}$, per $-\frac{5}{6}$, ec., si formeranno i coefficienti che si metteranno in luogo di A, di B, di C, ec., in quest'equazione

$$\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}=1-\text{A}x^2+\text{B}x^4-\text{C}x^6+\text{ec.},$$

il che darà

$$\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}x^4+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}x^6+\text{ ec.}$$

e integrando l'equazione

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\left(1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}x^4+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}x^6+\text{ ec.}\right)dx,$$

si troverà

$$arco\,(\text{seu}=x)=x+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{x^5}{5}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{x^7}{7}+\text{ ec. . . . . (70),}$$

espressione che non ha nemmeno bisogno di costante, poichè l'arco il cui seno è zero si annulla. Siccome il seno del quarto della circonferenza è eguale al raggio, se facciamo in quest' ultima espressione $x=1$, essa darà il valore di $\frac{\pi}{2}$; ma possiamo ottenere una serie molto più convergente, osservando che il raggio di un circolo è eguale al lato dell' esagono regolare inscritto (*Vedi* ESAGONO), e, per conseguenza, che la metà del raggio è eguale al seno della dodicesima parte della circonferenza; facendo dunque $x=\frac{1}{2}$, avremo

$$arco\left(\text{sen}=\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{6},$$

e quindi

$$\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3.2^3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{5.2^5}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{7.2^7}+\text{ ec.,}$$

serie convergentissima, poichè bastano 10 termini per ottenere

$$\pi=6(0{,}5235987\ldots)=3{,}1415926\ldots,$$

valore esatto fino all' ottava decimale.

50. Esiste un caso in cui, per determinare il valore della costante, non possiamo fare nè $x=0$, nè $x=\infty$. Si abbia, per esempio,

$$\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}=\left(x^2-1\right)^{-\frac{1}{2}}dx=\left(x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^{-\frac{1}{2}}dx=\frac{dx}{x}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^{-\frac{1}{2}};$$

sviluppando al solito per mezzo della formula del binomio, ponendo

$$m,\quad \frac{m-1}{2},\quad \frac{m-2}{3},\quad \text{ec.,}$$

e facendo

$$m=-\frac{1}{2},$$

si trova

$$-\frac{1}{2},\ -\frac{3}{4},\ -\frac{5}{6},\ \text{ec.},$$

donde si conclude come nell'articolo 49,

$$\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}=\frac{dx}{x}\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{x^4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{x^6}+\text{ec.}\right),$$

e integrando, si troverà

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}=\log x-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4x^4}-\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6x^6}+\text{ec.},$$

da un'altra parte,

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}\times\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}}$$

$$=\int\frac{\frac{xdx}{\sqrt{x^2-1}}+dx}{x+\sqrt{x^2-1}}=\log\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$$

dunque

$$\log\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)=\log x-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\cdot 2x^2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4x^4}-\text{ec.}+C\ldots(71).$$

Per determinare la costante, non si farà $x=\infty$, poichè allora $\log x$ diventerebbe infinito; da un'altra parte, non si eguaglierà x a zero, poichè i termini $\log x$, $\frac{1}{2x^2}$, ec. diventerebbero infiniti; ma se si suppone $x=1$, l'equazione (71) diventerà

$$0=0-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}-\text{ec.}+C=0,$$

dalla quale si ricava

$$C=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}+\text{ec.}$$

51. L'integrazione per serie applicata alla funzione $\frac{dx}{a+x}$, ci dà ancora una generazione del logaritmo naturale di $a+x$, che dobbiamo esporre. Bisogna osservare prima di tutto, che

$$\int\frac{dx}{a+x}=\log(a+x)+C\ .\ .\ .\ (72),$$

infatti, rappresentiamo $a+x$ con z, avremo

$$a+x=z,\quad\text{e}\quad d(a+x)=dz,\quad\text{ovvero}\quad dx=dz;$$

così $\dfrac{dx}{a+x}=\dfrac{dz}{z}$, e siccome dalla formola (61)

$$\int\frac{dz}{z}=\log z+C,$$

se si sostituisce invece di z il suo valore, si trova l'espressione (72).

Premesso ciò, poichè $\dfrac{dx}{a+x}=(a+x)^{-1}dx$, si ha

$$\left(a+x\right)^{-1}dx=\frac{1}{a}\,dx-\frac{x}{a^2}\,dx+\frac{x^2}{a^3}\,dx-\text{ec.},$$

il cui integrale è

$$\int\frac{dx}{a+x}=\frac{x}{a}-\frac{x^2}{2a^2}+\frac{x^3}{3a^3}-\frac{x^4}{4a^4}+\text{ec.}\ldots\ldots+C,$$

abbiamo dunque ancora

$$\log\left(a+x\right)=\frac{x}{a}-\frac{x^2}{2a^2}+\frac{x^3}{3a^3}-\text{ec.}\ldots\ldots\ldots+C.$$

Per determinare la costante, osserveremo che, quando $x=0$, quest'equazione diventa $\log a=0+C$. Sostituendo questo valore di C, viene

$$\log\left(a+x\right)=\log a+\frac{x}{a}-\frac{x^2}{2a^2}+\frac{x^3}{3a^3}-\text{ec.}\ldots\ldots,$$

sviluppo che altrove abbiamo trovato, per il caso di $a=1$, in un modo ben differente. (*Vedi* Differenziale n.° 127)

Questa serie essendo poco convergente, facciamo $x=-x$, avremo

$$\log\left(a-x\right)=\log a-\frac{x}{a}-\frac{x^2}{2a^2}-\frac{x^3}{3a^3}-\text{ec.}$$

sottraendo quest'equazione dalla precedente, avremo

$$\log\left(a+x\right)-\log\left(a-x\right)=2\left(\frac{x}{a}+\frac{x^3}{3a^3}+\frac{x^5}{5a^5}+\text{ec.}\right),$$

ovvero

$$\log\left(\frac{a+x}{a-x}\right)=2\left(\frac{x}{a}+\frac{x^3}{3a^3}+\frac{x^5}{5a^5}+\text{ec.}\right)\ldots.(73).$$

52. Per determinare, per esempio, con l'aiuto di questa formula, il logaritmo di 2, sopporremo

$$\frac{a+x}{a-x}=\frac{2}{1},$$

per conseguenza

$$a+x=2,\qquad a-x=1;$$

dunque

$$a=\frac{3}{2},\quad x=\frac{1}{2},\quad \frac{x}{a}=\frac{1}{3},\quad \frac{x^2}{a^2}=\frac{1}{9},\ \text{ec.};$$

sostituendo, si avrà

$$\log 2=2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{27}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{243}+\text{ec.}\right).$$

Limitandosi ai primi dieci termini di questa serie, ridotta in decimali, si determinerà il valore del logaritmo di 2, triplando questo logaritmo, si avrà quello di 2^3, cioè di 8. Se da un'altra parte si calcola con la formula (72) il logaritmo di $\frac{10}{8}$, e che si aggiunga questo logaritmo a quello di 8, si avrà il logaritmo di $\frac{10}{8}\times 8=\log 10$. Si vede che, con processi analoghi la formula (72) darebbe qualunque altro logaritmo; ma conviene osservare che questi logaritmi sono logaritmi neperiani. Per dedurne i logaritmi delle tavole, se rappresentiamo con La il logaritmo tabulario di un numero a, avremo $a=10^{La}$; prendendo i logaritmi neperiani, quest' equazione ci darà

$$\log a=\log 10^{La}=La\log.10:$$

e per conseguenza

$$La=\frac{\log a}{\log 10};$$

vale a dire che un logaritmo delle tavole di un numero, è eguale al logaritmo neperiano di questo numero, diviso per il logaritmo neperiano di 10.

53. Abbiamo trovato una serie ancora più convergente di quelle che abbiamo avuto con la formula (73). Ecco in qual modo possiamo dedurla da queste formule:

Dividendo $a+x$ per $a-x$, si trova

$$\frac{a+x}{a-x}=1+\frac{2x}{a-x},$$

rappresentiamo con $\frac{v}{z}$ la frazione $\frac{2x}{a-x}$, si ha l'equazione

$$\frac{a+x}{a-x}=1+\frac{v}{z}=\frac{z+v}{z},$$

e, moltiplicando per $a-x$, viene

$$a+x=a-x+\frac{av}{z}-\frac{vx}{z};$$

tutti gli x essendo trasportati nel primo membro, si ottiene

$$2x+\frac{vx}{z}=\frac{av}{z};$$

moltiplicando per z, si trova

$$2xz+vx=av,$$

e per conseguenza

$$\frac{x}{a}=\frac{v}{2z+v};$$

sostituendo i valori di $\frac{a+x}{a-x}$, e di $\frac{x}{a}$ nella formula (73), si ha questo risultamento:

$$\log\left(\frac{z+v}{z}\right)=2\left(\frac{v}{2z+v}+\frac{v^3}{3(2z+v)^3}+\frac{v^5}{5(2z+v)^5}+\text{ec.}\right),$$

e finalmente

$$\log(z+v)=\log z+2\left(\frac{v}{2z+v}+\frac{v^3}{3(2z+v)^3}+\frac{v^5}{5(2z+v)^5}+\text{ec.}\right).$$

Per esempio, per avere il logaritmo di 2, si farà $v=1$, $z=1$, e per conseguenza $\log z=0$; sostituendo questi valori nella formula precedente, si otterrà

$$\log 2=2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3(3)^3}+\frac{1}{5(3)^5}+\text{ec.}\right).$$

Bisognerà dividere questo logaritmo per il logaritmo neperiano di 10, (n.° 52), per avere il logaritmo delle tavole di 2.

54. Passiamo alle funzioni differenziali frazionarie più composte delle precedenti, e cominciamo dal considerare la funzione

$$\frac{Ax^m dx}{(a+bx)^n};$$

se facciamo $a+bx=z$, troveremo

$$x=\frac{z-a}{b}, \quad \text{e} \quad dx=\frac{dz}{b},$$

sostituendo, la funzione proposta diventerà

$$\frac{A(z-a)^m dz}{b^{m+1}z^n},$$

così, sviluppando la potenza $(z-a)^m$, moltiplicando il resultamento per dz e quindi dividendo ciascun termine per $b^{m+1}z^n$, si avrà una serie di monomi da integrare, dopo l'integrazione si sostituirà invece di z il suo valore $a+bx$.

L'esempio seguente renderà più chiaro questo processo; sia la funzione proposta

$$\frac{Ax^2dx}{(a+bx)},$$

in questo caso, si ha $n=1$, $m=2$, e la funzione in z diviene

$$\frac{A(z-a)^2dz}{b^3z}.$$

Abbiamo dunque, sviluppando la potenza

$$\frac{A(z-a)^2 dz}{b^3 z} = \frac{Azdz}{b^3} - \frac{2Aadz}{b^3} + \frac{Aa^2 dz}{b^3 z}.$$

Integrando mediante le regole date ai numeri 40 e 45 i monomi

$$\frac{A}{b^3}.zdz, \quad \frac{2Aa}{b^3}.dz, \quad \frac{Aa^2}{b^3}.\frac{dz}{z},$$

otteremo

$$\int \frac{A(z-a)^2 dz}{b^3 z} = \frac{Az^2}{2b^3} - \frac{2Aaz}{b^3} + \frac{Aa^2}{b^3}.Lz + C.$$

Rimettendo per z il suo valore, avremo definitivamente

$$\int \frac{Ax^2 dx}{a+bx} = \frac{A}{b^3}\left\{\frac{1}{2}\left(a+bx\right)^2 - 2a\left(a+bx\right) + a^2 L\left(a+bx\right)\right\} + C.$$

55. Tutte le funzioni della forma

$$\frac{Ax^m dx + Bx^n dx + Cx^p dx + \text{ec.}}{(a+bx)^\lambda},$$

potendo decomporsi come segue

$$\frac{Ax^m dx}{(a+bx)^\lambda} + \frac{Bx^n dx}{(a+bx)^\lambda} + \frac{Cx^p dx}{(a+bx)^\lambda} + \text{ec.}\ldots,$$

la loro integrazione si effettuerà, operando sopra ciascun termine in particolare, come l'abbiamo fatto vedere sopra.

56. Se con U e V indichiamo delle funzioni razionali e intere, la cui forma generale è

$$Ax^\alpha + Bx^\beta + Cx^\gamma + Dx^\delta + \text{ec.}\ldots,$$

la forma

$$\frac{Udx}{V},$$

rappresenterà tutte le funzioni differenziali razionali e frazionarie.

Dobbiamo cominciare da osservare che il massimo esponente di x in U può sempre supporsi più piccolo, almeno di un'unità, del massimo esponente di x in V; poichè nel caso contrario una semplice divisione potrà cangiare l'espressione $\frac{U}{V}$, in $R+\frac{U'}{V}$; R indicando il quoziente e U' il resto di questa divisione; si avrebbe dunque allora

$$\frac{Udx}{V} = Rdx + \frac{U'dx}{V}.$$

Ma R essendo una funzione intera e razionale, la sua integrazione può effettuarsi con i principii esposti qui sopra; non rimane dunque che da trovare

l' integrale di $\frac{U'dx}{V}$, nella quale il massimo esponente di x è minore in U' che in V.

Per integrare le differenziali di qoesta forma, bisogna decomporre $\frac{U}{V}$ in *frazioni parziali*, servendosi di un processo che indicheremo, e che è fondato sul metodo dei coefficienti indeterminati. Proponiamoci per esempio la funzione

$$\frac{(a^3+bx^2)dx}{a^2x-x^3}.$$

Bisogna cominciare dal decomporre il denominatore nei suoi fattori del primo grado, il che in questo caso non presenta veruna difficoltà, poichè si ha

$$a^2x-x^3=x(a^2-x^2)=x(a-x)(a+x).$$

Questa decomposizione, fondamento di tutta l' operazione, mette la frazione sotto la forma

$$\frac{a^3+bx^2}{x(a-x)(a+x)},$$

e rappresentando con A, B, C, delle quantità indeterminate, possiamo porre

$$\frac{a^3+bx^2}{x(a-x)(a+x)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{a-x}+\frac{C}{a+x}\ldots\ldots(74).$$

Riducendo le frazioni del secondo membro al medesimo denominatore, viene per la loro somma

$$\frac{Aa^2-Ax^2+Bax+Bx^2+Cax-Cx^2}{x(a-x)(a+x)},$$

quantità il cui denominatore dev' essere identico con quello della proposta. Eguagliando dunque tra loro i coefficienti delle medesime potenze di x, si avrà

$$B-A-C=b,\quad Ba+Ca=o,\quad Aa^2=a^3.$$

L' ultima eqoazione dà $A=a$, e questo valore sostituito nelle due prime ci fa in seguito trovare

$$B=\frac{a+b}{2},\quad C=-\frac{a+b}{2};$$

mettendo i valori di A, di B e di C nell' equazione di sopra (n.° 74), si trova

$$\frac{(a^3+bx^2)dx}{a^2x-x^3}=\frac{adx}{x}+\frac{(a+b)dx}{2(a-x)}-\frac{(a+b)dx}{2(a+x)},$$

dunque, integrando

$$\int\frac{(a^3+bx^2)dx}{a^2x-x^3}=aLx-\frac{(a+b)}{2}L(a-x)$$

$$-\frac{(a+b)}{2}L(a+x)+C$$

$$=aLx-(a+b)L\sqrt{a^2-x^2}+C.$$

Per secondo esempio, sia $\frac{adx}{x^2-a^2}$: decomponendo il denominatore nei suoi fattori, si scriverà

$$\frac{adx}{x^2-a^2}=\frac{adx}{(x-a)(x+a)},$$

e supporremo

$$\frac{adx}{(x-a)(x+a)}=\left(\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x+a}\right)dx \ldots . (75),$$

A e B sono due costanti che si tratta di determinare. Per quest' effetto, riducendo il secondo membro al medesimo denominatore, si otterrà

$$\frac{adx}{(x-a)(x+a)}=\frac{(Ax+Aa+Bx-Ba)\,dx}{(x-a)(x+a)}.$$

Sopprimendo il divisore comune $(x-a)(x+a)$, e il fattore dx, rimarrà

$$a=Ax+Aa+Bx-Ba \ldots . (76);$$

e, ordinando rapporto ad x, si avrà

$$(A+B)x+(A-B-1)a=0,$$

x avendo un valore indeterminato, come lo suppone la differenziale proposta, quest' equazione ha luogo qualunque sia x; per conseguenza, col metodo dei coefficienti indeterminati, eguaglieremo separatamente a zero i coefficienti delle differenti potenze di x; ovvero, ciò che equivale al medesimo, eguaglieremo tra loro i termini che nell' equazione (76), contengono le medesime potenze di x, ed avremo

$$A+B=0, \quad (A-B-1)a=0;$$

quest' equazioni danno

$$A=\frac{1}{2}, \quad B=-\frac{1}{2}.$$

Sostituendo questi valori nell' equazione (75), si avrà dunque

$$\frac{adx}{x^2-a^2}=\frac{\frac{1}{2}dx}{x-a}-\frac{\frac{1}{2}dx}{x+a},$$

e integrando, si troverà

$$\int\frac{adx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2}\log\left(x-a\right)-\frac{1}{2}\log\left(x+a\right)+C,$$

e per conseguenza

$$\int\frac{adx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2}\log\frac{x-a}{x+a}+C=\log\left(\frac{x-a}{x+a}\right)^{\frac{1}{2}}+C.$$

57. Per terzo esempio, sia

$$\frac{3x-5}{x^2-6x+8}\,dx.$$

Siccome si tratta di cominciare a decomporre il denominatore in fattori del primo grado, osserveremo che avendo un'equazione della medesima forma, e rappresentata da $z^2-6z+8=0$, e la quale sia soddisfatta per i valori $z=2$ e $z=4$, potremo concludere che essa equivale al prodotto $(z-2)(z-4)=0$. Ora, effettuando la moltiplicazione, si vede che qualunque valore che si attribuisca a z, il prodotto sarà sempre z^2-6z+8; dunque, quando in luogo di z, metteremo x, avremo ancora

$$(x-2)(x-4)=x^2-6x+8.$$

Per conseguenza, qualunque sia il valore del polinomio x^2-6x+8, può decomporsi in fattori come se esso fosse eguale a zero.

Avendo dunque trovato che le radici dell'equazione $x^2-6x+8=0$ sono 2 e 4, scriveremo

$$\frac{3x-5}{x^2-6x+8}\,dx=\frac{A\,dx}{x-2}+\frac{B\,dx}{x-4}\ldots\ (77),$$

e sopprimendo il fattore comune dx, il che in seguito avremo sempre cura di fare, troveremo, dopo aver ridotto al medesimo denominatore,

$$\frac{3x-5}{x^2-6x+8}=\frac{Ax-4A+Bx-2B}{x^2-6x+8};$$

eguagliando tra loro i coefficienti delle medesime potenze di x, otterremo queste equazioni di condizione,

$$-5=-4A-2B,\quad 3=A+B,$$

donde dedurremo

$$B=\frac{7}{2},\quad A=-\frac{1}{2};$$

mettendo questi valori nell'equazione (77), si troverà

$$\int\frac{3x-5}{x^2-6x+8}\,dx=-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-2}+\frac{7}{2}\int\frac{dx}{x-4}+C$$

$$=\frac{7}{2}\log\left(x-4\right)-\frac{1}{2}\log\left(x-2\right)+C.$$

58. Prendiamo ancora per esempio

$$\frac{x\,dx}{x^2+4ax-b^2}:$$

eguagliando il denominatore a zero, e risolvendo l'equazione, si trova

$$x^2+4ax-b^2=\left(x+2a+\sqrt{4a^2+b^2}\right)\left(x+2a-\sqrt{4a^2+b^2}\right).$$

Per maggior semplicità rappresentiamo quest' ultimo prodotto con

$$\left(x+K\right)\left(x+L\right),$$

supporremo dunque

$$\frac{x}{x^2+4ax-b^2}=\frac{A}{x+K}+\frac{B}{x+L};$$

riducendo il secondo membro al medesimo denominatore, troveremo

$$\frac{x}{x^2+4ax-b^2}=\frac{Ax+AL+Bx+BK}{x^2+4ax-b^2},$$

donde si ricava

$$AL+BK=o,\quad A+B=1,$$

per conseguenza

$$A=\frac{K}{K-L},\quad B=-\frac{L}{K-L};$$

dunque

$$\int\frac{x\,dx}{x^2+4ax-b^2}=\frac{K}{K-L}\log\left(x+K\right)-\frac{L}{K-L}\log\left(x+L\right)+C.$$

59. In generale, sia

$$\frac{Px^{m-1}+Qx^{m-2}\ldots+Rx+S}{x^m+Q'x^{m-1}\ldots\ldots+R'x+S'}dx,$$

una frazione razionale nella quale i fattori del primo grado del denominatore si suppongono ineguali; si comincerà dal risolvere l'equazione

$$x^m+Q'x^{m-1}\ldots\ldots+R'x+S'=u;$$

e trovando, che essa è il prodotto dei fattori $x-a$, $x-b$, $x-c$, ec., si scriverà

$$\frac{Px^{m-1}+Qx^{m-2}+\ldots\ldots+Rx+S}{x^m+Q'x^{m-1}\ldots\ldots+R'x+S'}=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\frac{C}{x-c}+\text{ec.}$$

Riducendo al medesimo denominatore il secondo membro di quest'equazione, ciascun termine del numeratore di una delle frazioni dovrà moltiplicarsi per il prodotto dei denominatori dell'altre, vale a dire per un polinomio in x dell'ordine $m-1$; dunque il secondo membro di quest'equazione sarà un polinomio composto di m termini. Ne resulta da ciò che se si eguagliano tra loro i coefficienti delle medesime potenze di x, si avranno m equazioni di condizione per determinare i coefficienti A, B, C, ec. Questi coefficienti essendo conosciuti, non avremo più che da integrare una serie di termini, tali come

$$\frac{A\,dx}{x-a},\quad\frac{B\,dx}{x-b},\ \text{ec.};$$

l'integrale cercato sarà dunque

$$A\log(x-a)+B\log(x-b)+\text{ec.}+C.$$

60. L'integrazione delle funzioni differenziali razionali e frazionarie riposa dunque sopra la decomposizione delle funzioni frazionarie in frazioni parziali, decomposizione che essa medesima riposa sopra quella del denominatore della frazione nei suoi fattori del primo grado. Quando quest'ultima decomposizione può effettuarsi, l'integrazione non ha veruna difficoltà, e possiamo sempre ope-

rare come l'abbiamo fatto sopra; nel caso però in cui tutti i fattori del primo grado sono ineguali; poichè se il contrario avesse luogo, questo metodo non sarebbe più adattato, o almeno bisognerebbe far ad esso subire delle modificazioni. Senza entrare in particolari di dimostrazione che ci condurrebbero troppo lontani, riepilogheremo il processo che bisogna allora impiegare.

$\frac{U}{V}$, essendo la frazione razionale, supponiamo che i fattori primi di V siano $(x-a)$, $(x-b)$, $(x-c)$, ec., ovvero, che si abbia

$$\frac{U}{V}=\frac{U}{(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)\ldots\ldots \text{ec.}}$$

se fra questi fattori, se ne trovano da una parte m eguali tra loro; dall'altra n, e che gli altri siano ineguali; se, per esempio, si ha

$$\frac{U}{V}=\frac{U}{(x-a)^m\cdot(x-b)^n\cdot(x-c)(x-d)\ldots \text{ec.}},$$

si formeranno le frazioni parziali

$$\frac{A+Bx+Cx^2\ldots\ldots+Mx^{m-1}}{(x-a)^m},$$

$$\frac{A'+B'x+C'x^2\ldots+M'x^{n-1}}{(x-b)^n},$$

$$\frac{A''}{x-c},\quad \frac{B''}{x-d},\quad \frac{C''}{x-e},\ \text{ec.},$$

nelle quali A, B, C, ec., A′, B′, C′, ec., A″, B″, C″ ec., saranno coefficienti indeterminati, dei quali troveremo il valore riducendo tutte queste frazioni al medesimo denominatore, e prendendo la loro somma la quale deve essere identica con $\frac{U}{V}$. Eguagliando i coefficienti delle medesime potenze di x, nel numeratore di questa somma e in U, si formeranno l'equazioni di condizione necessarie per la determinazione delle quantità A, B, C, ec.

Possiamo ancora, il che è più semplice, sostituire alle frazioni i cui numeratori sono composti, un seguito di frazioni semplici, e i cui denominatori procedano per potenze decrescenti dell'esponente m o n fino ad 1; vale a dire che possiamo sostituire alle due prime frazioni qui sopra indicate le due serie di frazioni

$$\frac{A}{(x-a)^m}+\frac{B}{(x-a)^{m-1}}+\frac{C}{(x-a)^{m-2}}+\text{ec. fino a }+\frac{M}{x-a},$$

$$\frac{A'}{(x-b)^n}+\frac{B'}{(x-b)^{n-1}}+\frac{C'}{(x-b)^{n-2}}+\text{ec. fino a }+\frac{M'}{x-b}.$$

Per provare che questa seconda forma è sempre permessa invece della prima, e tanto per fissare le idee, supponiamo che si tratti d'integrare la frazione

$$\frac{Px^4+Qx^3+Rx^2+Sx+T}{(x-a)^3\,(x-d)\,(x-e)},$$

si faccia

$$x-a=z,$$

si ha

$$x=z+a;$$

dunque

$$\frac{A+Bx+Cx^2}{(x-a)^3}=\frac{A+Ba+Ca^2+Bz+2Caz+Cz^2}{z^3}$$

$$=\frac{A+Ba+Ca^2}{z^3}+\frac{B+2Ca}{z^2}+\frac{C}{z};$$

mettendo il valore di z in quest' equazione, si otterrà

$$\frac{A+Bx+Cx^2}{(x-a)^3}=\frac{A+Ba+Ca^2}{(x-a)}+\frac{B+2Ca}{(x-a)^2}+\frac{C}{x-a},$$

risultamento della forma prescritta, poichè le A', B', C', ec. supposte in generale di sopra sono delle costanti.

Questa dimostrazione potendo applicarsi a un' equazione di un grado più elevato, concludiamo che in generale possiamo supporre

$$\frac{Px^{m-1}+Qx^{m-2}\ldots+Rx+S}{(x-a)^m}$$

$$=\frac{A}{(x-a)^m}+\frac{A'}{(x-a)^{m-1}}+\frac{A''}{(x-a)^{m-2}}\ldots+\frac{A^{(m)}}{x-a}.$$

Resulta da ciò che precede, che per integrare l' espressione

$$\frac{Px^4+\text{ec.}\ldots}{(x-a)^3(x-d)(x-e)}dx,$$

si scriverà

$$\frac{Px^4+\text{ec.}\ldots\ldots}{(x-a)^3(x-d)(x-e)}$$

$$=\frac{A}{(x-a)^3}+\frac{A'}{(x-a)^2}+\frac{A''}{x-a}+\frac{D}{x-d}+\frac{E}{x-e};$$

riducendo le frazioni al medesimo denominatore, si determineranno le costanti A, A', A'', D, E, ec., col processo che abbiamo già adoprato, e quindi avremo da trovare gl' integrali delle seguenti espressioni:

$$\frac{Adx}{(x-a)^3},\quad \frac{A'dx}{(x-a)^2},\quad \frac{A''dx}{x-a},\quad \frac{Ddx}{x-d},\quad \frac{Edx}{x-e}.$$

Per integrare le due prime, siccome dx è la differenziale dell' espressione $x-a$, racchiusa tra le parentesi, supporremo (n.° 43) $x-a=z$, ed avremo

$$\int\frac{Adx}{(x-a)^3}=\int\frac{Adz}{z^3}=\int Az^{-3}dz=-\frac{A}{2z^2}=-\frac{A}{2(x-a)^2};$$

$$\int\frac{A'dx}{(x-a)^2}=\int\frac{A'dz}{z^2}=\int A'z^{-2}dz=-\frac{A'}{z}=-\frac{A'}{x-a},$$

riguardo alle tre altre, esse s' integrano con logaritmi; dunque finalmente

$$\int \frac{(Px^4+Qx^3+ \text{ec.} \dots)dx}{(x-a)^3(x-d)(x-e)} =$$

$$-\frac{A}{2(x-a)^2} - \frac{A'}{x-a} + A'' \log(x-a) + D\log(x-d) + E\log(x-e)$$

$+$ *costante.*

Rendiamo più chiaro questo processo con alcuni esempii, sia la frazione

$$\frac{2axdx}{(x+a)^2};$$

avremo

$$\frac{2ax}{(x+a)^2} = \frac{A}{(x+a)^2} + \frac{A'}{x+a};$$

riducendo il secondo membro al medesimo denominatore, e sopprimendo questo denominatore comune, rimane

$$2ax = A + A'x + A'a,$$

donde dedurremo quest' equazioni di condizione

$$2a = A', \quad A + A'a = 0;$$

esse danno

$$A' = 2a, \quad A = -2a^2;$$

per conseguenza

$$\frac{2axdx}{(x+a)^2} = -\frac{2a^2dx}{(x+a)^2} + \frac{2adx}{x+a} \dots (78).$$

Per ottenere l' integrale osserviamo, che dx essendo la differenziale di $x+a$ possiamo (n.° 43) supporre $x+a=z$; dunque

$$\frac{2axdx}{(x+a)^2} = -2a^2\frac{dz}{z^2} + 2a\frac{dz}{z};$$

integrando la prima frazione del secondo membro per mezzo della regola del n.° 37, e l' altra con logaritmi, otterremo

$$\int \frac{2axdx}{(x+a)^2} = \frac{2a^2}{z} + 2a\log z + C;$$

e rimettendo il valore di z,

$$\int \frac{2axdx}{(x+a)^2} = \frac{2a^2}{a+x} + 2a\log(a+x) + C.$$

Per secondo esempio. Si abbia da integrare la frazione

$$\frac{x^2dx}{x^3 - ax^2 - a^2x + a^3};$$

per trovare i fattori primi del denominatore, osserviamo in generale che se que-

sti fattori sono $(x-\alpha)$, $(x-\beta)$, $(x-\delta)$, poichè si deve avere

$$x^3-ax^2-a^2x-a^3=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\delta),$$

le quantità α, β, δ non sono altro che le radici dell'equazione

$$x^3-ax^2-a^2x+a^3=0.$$

(*Vedi* Equazione). Così per trovare i fattori primi di V, nella forma generale $\frac{U}{V}$, bisogna fare $V=0$ e cercare le radici di quest'equazione. Nel caso che ci occupa, con facilità si riconosce che una delle radici è a, poichè facendo $x=a$, il primo membro si riduce a zero. $x-a$ sarà dunque uno dei fattori del primo grado di $x^3-ax^2-a^2x+a^3$; così dividendo questa quantità per $x-a$, il quoziente x^2-a^2, che è immediatamente decomponibile in $(x-a)(x+a)$, farà conoscere i due altri. Abbiamo dunque

$$\frac{x^2}{x^3-ax^2-a^2x+a^3}=\frac{x^2}{(x-a)^2(x+a)},$$

così, supporremo

$$\frac{x^2}{(x-a)^2(x+a)}=\frac{A}{(x-a)^2}+\frac{B}{x-a}+\frac{C}{x+a}\ \ldots(79).$$

Riducendo il secondo membro al medesimo denominatore, otterremo per la somma delle frazioni parziali

$$\frac{A(x+a)+B(x-a)(x+a)+C(x-a)^2}{(x-a)^2(x+a)},$$

ovvero, sviluppando,

$$\frac{Aa-Ba^2+Ca^2+(A-2Ca)x+(B+C)x^2}{(x-a)^2(x+a)}.$$

Paragonando il numeratore con quello della proposta, ed eguagliando tra loro i coefficienti delle medesime potenze di x, si ottengono quest'equazioni di condizione

$$Aa-Ba^2+Ca^2=0,$$
$$A-2Ca=0,$$
$$B+C=1,$$

donde si deduce

$$A=\frac{a}{2},\quad B=\frac{3}{4},\quad C=\frac{1}{4},$$

per mezzo di questi valori l'eguaglianza (79), diviene

$$\frac{x^2dx}{(x-a)^2(x+a)}=\frac{adx}{2(x-a)^2}+\frac{3dx}{4(x-a)}+\frac{dx}{4(x+a)}.$$

Integrando ciascun termine in particolare con i metodi precedenti, troveremo

$$\int\frac{x^2dx}{(x-a)^2(x+a)}=-\frac{a}{2(x-a)}+\frac{3}{4}L\left(x-a\right)+\frac{1}{4}L\left(x+a\right)+C.$$

61. Si opererà nella medesima maniera, se nel denominatore sono più gruppi di radici eguali. Sia per esempio,

$$\frac{adx}{(x^2-1)^2}=\frac{adx}{(x-1)^2(x+1)^2};$$

supporremo

$$\frac{a}{(x-1)^2(x+1)^2}=\frac{A}{(x-1)^2}+\frac{A'}{x-1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{B'}{x+1}\ldots(80);$$

e, riducendo al medesimo denominatore, troveremo

$$\frac{a}{(x-1)^2(x+1)^2}=$$

$$\frac{A(x+1)^2+A'(x-1)(x+1)^2+B(x-1)^2+B'(x+1)(x-1)^2}{(x-1)^2(x+1)^2};$$

sopprimendo i denominatori e sviluppando i numeratori, troveremo quest' equazioni di condizione

$$A'+B'=0,$$
$$A+A'+B-B'=0,$$
$$2A-A'-2B-B'=0,$$
$$A-A'+B+B'=a.$$

La prima di quest' equazioni riduce la terza a $2A-2B=0$, dunque $A=B$; la seconda riduce la quarta a $2A+2B=a$; da quest' equazioni si conclude $A=\frac{a}{4}=B$, per conseguenza la quarta diviene $B'-A'=\frac{1}{2}a$; quest' equazione combinata con la prima, dà

$$A'=-\frac{a}{4},\quad B'=\frac{a}{4}.$$

Per mezzo dei valori di quest' costanti, la differenziale proposta diviene

$$\frac{1}{4}a\left[\frac{dx}{(x-1)^2}+\frac{dx}{(x+1)^2}-\frac{dx}{x-1}+\frac{dx}{x+1}\right].$$

S' integreranno le due prime di quest' espressioni per mezzo delle regole dei numeri 43 e 37, e le altre con i logaritmi, e si troverà

$$\int\frac{adx}{(x^2-1)^2}=\frac{1}{4}a\left[-\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}-\log\left(x-1\right)+\log\left(x+1\right)\right]+C.$$

62. Avanti di esaminare il caso in cui il denominatore contenga delle radici immaginarie, facciamo alcune osservazioni sopra queste specie di quantità: cominciamo dal considerare l' equazione

$$x^2+px+q=0\ldots\ldots(81),$$

e cerchiamo le condizioni necessarie perchè le radici di quest' equazione siano

immaginarie: risolvendola, si trova

$$x = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q},$$

La prima condizione necessaria perchè questo valore di x sia immaginario, è che l'ultimo termine dell'equazione (81) sia positivo; poichè se esso fosse negativo, l'espressione $-q$, che è sotto il radicale, cangerebbe di segno, e il radicale non contenendo allora che quantità positive, x non potrebbe essere immaginario. Questa condizione essendo adempita, x sarà immaginario, se q supera $\frac{1}{4}p^2$. L'eccesso di q sopra $\frac{1}{4}p^2$ essendo allora una quantità essenzialmente positiva, rappresentiamola con β^2, poichè un quadrato è sempre positivo: avremo

$$q = \frac{1}{4}p^2 + \beta^2;$$

facciamo $\frac{p}{2} = \alpha$ per evitare le frazioni, quest'equazione diventerà

$$q = \alpha^2 + \beta^2;$$

sostituiamo questi valori di p e di q nella proposta, troveremo

$$x^2 + 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2 = 0 \;.\;.\;.\;.\; (82).$$

Quest'equazione essendo risoluta, dà

$$x = -\alpha \pm \beta\sqrt{-1} \;.\;.\;.\;.\; (83),$$

le sue due radici sono dunque

$$-\alpha + \beta\sqrt{-1}\,, \text{ e } -\alpha - \beta\sqrt{-1}\,;$$

ciò prova che queste radici sono disposte per coppie, in modo tale che una, essendo conosciuta, fa conoscere l'altra cangiando il segno della parte immaginaria.

63. In generale, un'equazione può avere più coppie di radici immaginarie, e ciascuna coppia darà luogo a un fattore del secondo grado, della forma

$$x^2 + 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2 \;.\;.\;.\;.\; (84).$$

64. Alcune volte le radici immaginarie sono eguali, eccettuato il segno; questo è quello che succede quando $\alpha = 0$; allora una delle radici è $\beta\sqrt{-1}$ e l'altra $-\beta\sqrt{-1}$, e il fattore (84), del secondo grado, si riduce a $x^2 + \beta^2$.

65. Per dare un esempio di un'equazione le cui radici sono immaginarie, prendo l'equazione

$$x^2 - 6ax + 10a^2 = 0;$$

risoluta, dà

$$x = 3a \pm \sqrt{-a^2} = 3a \pm a\sqrt{-1};$$

paragonando questo valore di x con l'equazione (83), viene

$$-\alpha = 3a, \quad \beta = a;$$

dunque, nel caso presente, l'equazione (84) diviene

$$x^2 - 6ax + 9a^2 + a^2.$$

66. Del rimanente, quando si ha un'equazione come

$$x^2 + 4x + 12 = 0,$$

le cui radici sono immaginarie, possiamo paragonarla immediatamente alla formula (84), e si ha $2\alpha = 4$, dunque $\alpha^2 = 4$; se si sottrae 4 da 12, rimane 8 per β^2, e l'equazione proposta può mettersi sotto la forma

$$x^2 + 4x + 4 + 8 = 0.$$

Il termine 8, per verità, non è un quadrato perfetto; ma allora si considera come quello di $\sqrt{8}$.

67. Occupiamoci ora dell'integrazione delle frazioni razionali, i denominatori delle quali contengono dei fattori immaginari; e per cominciare dal caso più semplice, consideriamo quello in cui non vi è che una coppia di radici immaginarie nel denominatore: supponiamo, per esempio, che dopo aver decomposto il denominatore nei suoi fattori, si sia trovato

$$\frac{P + Qx + Rx^2 + Sx^3 + \text{ec.}}{(x-a)(x-b)\ldots(x-h)(x^2 + 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2)}\,dx;$$

si eguaglierà, come l'abbiamo già fatto n.° 60, questa frazione alla seguente serie di termini

$$\frac{Adx}{x-a} + \frac{Bdx}{x-b} \ldots \frac{Hdx}{x-h} + \frac{Mx+N}{x^2 + 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2}\,dx,$$

e avendo determinato le costanti A, B ... H, M, N, col processo che abbiamo impiegato, tutti questi termini, fuori dell'ultimo, s'integreranno per mezzo di logaritmi; e quest'ultimo s'integrerà nella seguente maniera:

Si osserverà che $x^2 + 2\alpha x + \alpha^2$ essendo un quadrato perfetto, il termine da integrare può scriversi così:

$$\frac{Mx+N}{(x+\alpha)^2 + \beta^2}\,dx.$$

E facendo, $x + \alpha = z$, esso diviene

$$\frac{Mz + N - M\alpha}{z^2 + \beta^2}\,dz;$$

e, chiamando P la parte costante $N-M\alpha$; esso si riduce a

$$\frac{Mz+P}{z^2+\beta^2}\,dz;$$

quest' espressione si decompone nelle seguenti:

$$\frac{Mz\,dz}{z^2+\beta^2}+\frac{P\,dz}{z^2+\beta^2}.$$

Per integrare la prima, osserveremo che $z\,dz$ essendo la differenziale di $z^2+\beta^2$, all' eccezione di un fattore costante, possiamo n.° 43 supporre $z^2+\beta^2=y$, il che differenziando, ci darà

$$z\,dz=\frac{dy}{2};$$

sostituendo questi valori, otterremo $\frac{M\,dy}{2y}$, il cui integrale sarà

$$\frac{M}{2}\log y=\frac{M}{2}\log\left(z^2+\beta^2\right)=\frac{M}{2}\log\left[\left(x+\alpha\right)^2+\beta^2\right]$$

$$=\frac{M}{2}\log\left(x^2+2\alpha x+\alpha^2+\beta^2\right)$$

$$=M\log\left(x^2+2\alpha x+\alpha^2+\beta^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=M\log\sqrt{x^2+2\alpha x+\alpha^2+\beta^2}.$$

Riguardo all' espressione $\frac{P\,dz}{z^2+\beta^2}$, dividendo i suoi due termini per β^2, essa può mettersi sotto questa forma:

$$\frac{P}{\beta}\cdot\frac{\frac{dz}{\beta}}{\frac{z^2}{\beta^2}+1},$$

e si vede che il suo integrale è (n.° 47)

$$\frac{P}{\beta}\,\text{arco}\left(\text{tang}=\frac{z}{\beta}\right)=$$

$$=\frac{N-M\alpha}{\beta}\,\text{arco}\left(\text{tang}=\frac{x+\alpha}{\beta}\right);$$

dunque, finalmente

$$\int\frac{Mx+N}{x^2+2\alpha x+\alpha^2+\beta^2}\,dx$$

$$=M\log\sqrt{x^2+2\alpha x+\alpha^2+\beta^2}+\frac{N-M\alpha}{\beta}\,\text{arco}\left(\text{tang}=\frac{x+\alpha}{\beta}\right)\ldots\ldots(85).$$

68. Prendiamo per esempio la frazione $\frac{a+bx}{x^3-1}dx$: il denominatore avendo $x-1$ per fattore, troveremo l'altro fattore con la divisione, e la frazione proposta potrà mettersi sotto la forma

$$\frac{a+bx}{(x-1)(x^2+x+1)}dx;$$

x^2+x+1 essendo il prodotto di due fattori immaginari, come possiamo riconoscerlo risolvendo l'equazione $x^2+x+1=0$, scriveremo

$$\frac{a+bx}{(x-1)(x^2+x+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Mx+N}{x^2+x+1};$$

riducendo al medesimo denominatore e operando come abbiamo indicato, troveremo

$$A=\frac{a+b}{3},\ M=-\frac{a+b}{3},\ N=\frac{b-2a}{3};$$

decomporremo quindi il fattore x^2+x+1 in fattori semplici, paragonandolo all'espressione (84), il che ci darà

$$2\alpha=1,\quad \alpha^2+6^2=1,$$

e per conseguenza

$$\alpha=\frac{1}{2},\quad 6=\sqrt{\frac{3}{4}};$$

sostituendo questi valori e quelli di M e di N, nell'eqoazione (85), che ci dà la seconda parte dell'integrale, e osservando che la prima è

$$\int\frac{Adx}{x-1}=\frac{a+b}{3}\log\left(x-1\right),$$

troveremo

$$\int\frac{(a+bx)dx}{x^3-1}=\frac{a+b}{3}\log\left(x-1\right)-\frac{a+b}{3}\log\sqrt{x^2+x+1}$$

$$+\frac{b-a}{\sqrt{3}}\text{arco}\left\{\text{tang}=\frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\frac{3}{4}}}\right\}+C.$$

69. Quando la frazione avrà nel suo denominatore dei fattori immaginari eguali, essa conterrà uno o più fattori del secondo grado, della forma $(x^2+2\alpha x+\alpha^2+6^2)^p$; secondo che essa conterrà uno o più groppi di fattori immaginari eguali, il fattore

$$(x^2+2\alpha x+\alpha^2+6^2)^p,$$

corrisponderà a questo seguito di termini

$$\frac{H+Kx}{(x^2+2\alpha x+\alpha^2+\beta^2)^p}+\frac{H'+K'x}{(x^2+2\alpha x+\alpha^2+\beta^2)^{p-1}}$$

$$+\frac{H''+K''x}{(x^2+2\alpha x+\alpha^2+\beta^2)^{p-2}}+\ldots+\frac{H_1+K_1x}{x^2+2\alpha x+\alpha^2+\beta^2}\ldots(86);$$

avendo operato egualmente per gli altri gruppi di fattori egnali, si determineranno le costanti

$$H,\ K,\ H',\ K',\ H'',\ K''\ \ldots\ H_1,\ K_1,\ \text{ec.},$$

come precedentemente.

Si moltiplicherà quindi per dx, e non si tratterà più che d'integrare ciascun termine separatamente, ciò che si potrà sempre fare, quando si saprà integrare il primo termine della serie (86) moltiplicato per dx, poichè tutti gli altri sono della medesima forma. A quest'effetto scriveremo così questo termine

$$\frac{H+Kx}{[(x+\alpha)^2+\beta^2]^p}dx;$$

facendo $x+\alpha=z$, esso diventerà

$$\frac{H-K\alpha+Kz}{(\beta^2+z^2)^p}dz;$$

e, chiamando M la parte costante $H-K\alpha$, avremo da integrare

$$\frac{M+Kz}{(\beta^2+z^2)^p}dz.$$

Questa frazione può decomporsi nelle due seguenti:

$$\frac{Kzdz}{(\beta^2+z^2)^p}+\frac{Mdz}{(\beta^2+z^2)^p}.$$

Per integrare la prima, siccome zdz è la differenziale di $z^2+\beta^2$, all'eccezione di un fattore costante, supporremo $z^2+\beta^2=y$, n.° 43, ed avremo $zdz=\frac{1}{2}dy$; sostituendo, si otterrà

$$\int\frac{Kzdz}{(\beta^2+z^2)^p}=\int\frac{1}{2}K\frac{dy}{y^p}=\frac{1}{2}K\int y^{-p}dy$$

$$=\frac{1}{2}\frac{Ky^{-p+1}}{1-p}=\frac{1}{2}K\frac{(\beta^2+z^2)^{-p+1}}{1-p}$$

$$=\frac{1}{2}\frac{K}{(1-p)}\frac{1}{(\beta^2+z^2)^{p-1}}+C.$$

70. Ci rimane da integrare $\frac{Mdz}{(\beta^2+z^2)^p}$; o piuttosto,

$$M(\beta^2+z^2)^{-p}dz\ \ldots\ (87).$$

Per giungere a quest' integrale, lo dedurremo da quello di $\int (\beta^2+z^2)^p dz$, nella seguente maniera:

Diminuendo l'esponente p di un' unità, che equivale a dividere per β^2+z^2; per conseguenza, moltiplicando nello stesso tempo per la medesima quantità, avremo l'equazione identica

$$\left(\beta^2+z^2\right)^p dz=\left(\beta^2+z^2\right)^{p-1}\left(\beta^2+z^2\right)dz;$$

e, eseguendo la moltiplicazione indicata nel secondo membro, verrà

$$\left(\beta^2+z^2\right)^p dz=\beta^2\left(\beta^2+z^2\right)^{p-1}dz+\left(\beta^2+z^2\right)^{p-1}z^2dz,$$

integrando, si avrà

$$\int\left(\beta^2+z^2\right)^p dz=\beta^2\int\left(\beta^2+z^2\right)^{p-1}dz+\int\left(\beta^2+z^2\right)^{p-1}z^2dz \ldots \quad (88).$$

Dei due integrali che sono nel secondo membro di quest'equazione, lasceremo il primo sotto il segno che l'indica; riguardo al secondo ci applicheremo il processo indicato sotto il nome d' *integrazione per parti*, esso è fondato sopra la legge delle differenziali di un prodotto di funzioni variabili, e generalmente consiste in ciò che segue.

71. Si abbia (*Vedi* DIFFERENZA)

$$d\left[Fx.fx\right]=Fx.dfx+fx.dFx.$$

L'integrazione dei due membri di quest'eguaglianza dà

$$Fx.fx=\int Fx.dfx+\int fx.dFx,$$

donde

$$\int Fx.dfx=Fx.fx-\int fx.dFx.$$

Così quando una funzione differenziale qualunque $\varphi x.dx$ potrà decomporsi in $PQdx$, P e Q essendo due funzioni di x; se possiamo integrare la differenziale Qdx, indicando con V il suo integrale, si avrà

$$\int P.Qdx=PV-\int V.dP,$$

ovvero

$$\int PdV=PV-\int V.dP \ldots\ldots \quad (89);$$

ciò che riporta l'integrale generale all'integrale particolare $\int VdP$.

72. Premesso ciò, per eseguire l'integrazione per parti, moltiplicando e dividendo per 2 l'espressione $\left(\beta^2+z^2\right)^{p-1}z^2dz$, la scriveremo così:

$$\frac{z}{2}\left(\beta^2+z^2\right)^{p-1}2zdz \;\ldots\ldots\ldots\; (90);$$

allora $\left(\beta^2+z^2\right)^{p-1}2zdz$ sarà la differenziale di $\frac{(\beta^2+z^2)^p}{p}$, dimodochè l'espressione (90) diventerà

$$\frac{z}{2}\,d\,\frac{(\beta^2+z^2)^p}{p};$$

paragonandola alla formula (89)

$$\int \mathrm{P}d\mathrm{V}=\mathrm{PV}-\int \mathrm{V}\,.\,d\mathrm{P},$$

dell'integrazione per parti, faremo

$$\mathrm{P}=\frac{z}{2},\quad \mathrm{V}=\frac{(\beta^2+z^2)^p}{p},$$

e troveremo

$$\int\frac{z}{2}\left(\beta^2+z^2\right)^{p-1}2zdz=\frac{z}{2}\,\frac{(\beta^2+z^2)^p}{p}-\int\frac{(\beta^2+z^2)^p}{p}\,\frac{dz}{2}.$$

Sostituendo questo valore invece dell'ultimo termine dell'equazione (88), e mettendo le costanti fuori del segno d'integrazione, quest'equazione (88) diventerà

$$\int\left(\beta^2+z^2\right)^p dz=\beta^2\int\left(\beta^2+z^2\right)^{p-1}dz$$

$$+\frac{z}{2}\,\frac{(\beta^2+z^2)^p}{p}-\frac{1}{2p}\int\left(\beta^2+z^2\right)^p dz;$$

trasportando l'ultimo termine nel primo membro, e riducendo, si troverà

$$\frac{(1+2p)}{2p}\int\left(\beta^2+z^2\right)^p dz=\frac{z}{2}\,\frac{(\beta^2+z^2)^p}{p}$$

$$+\beta^2\int\left(\beta^2+z^2\right)^{p-1}dz;$$

si deduce da quest'equazione

$$\int\left(\beta^2+z^2\right)^{p-1}dz=-\frac{z}{2p\beta^2}\left(\beta^2+z^2\right)^p$$

$$+\frac{1+2p}{2p\beta^2}\int\left(\beta^2+z^2\right)^p dz;$$

facendo $p-1=-p'$, e per conseguenza $p=1-p$, si ha finalmente

$$\int\left(6^2+z^2\right)^{-p}dz=$$

$$-\frac{z}{2(1-p)6^2}\left(6^2+z^2\right)^{-p+1}+\frac{3-2p}{(2-2p)6^2}\int\left(6^2+z^2\right)^{-(p-1)}dz \ldots (91).$$

Per mezzo di questa formula, si farà dipendere l'integrale di $\left(6^2+z^2\right)^{-p}dz$, da un altro, nel quale il valore numerico dell'esponente, in luogo di essere p, sarà minore di un'unità; per mezzo della medesima formula, si farà quindi dipendere l'integrale di $\left(6^2+z^2\right)^{-(p-1)}dz$, da quello di $\left(6^2+z^2\right)^{-(p-2)}dz$, e così di seguito; dimodochè dopo ciascuna sostituzione, l'esponente della parte integrale diminuendo di un'unità, in ultimo luogo non rimarrà che da integrare l'espressione

$$\left(6^2+z^2\right)^{-1}dz=\frac{dz}{6^2+z^2};$$

ora, abbiamo veduto (n.° 47), che l'integrale di quest'espressione era

$$\frac{1}{6}\text{arco}\left(\text{tang}=\frac{z}{6}\right).$$

Non si cerca di far dipendere l'integrale $\int\left(6^2+z^2\right)^{-1}dz$ da quello di .... $\int\left(6^2+z^2\right)^{0}dz$, quantità che si riduce a z; poichè, se nella formula (91) si facesse $p=1$, il termine

$$\frac{-z}{2(1-p)6^2}\left(6^2+z^2\right)^{-p+1}$$

diventerebbe infinito.

73. Siccome il metodo che abbiamo tenuto sopra per integrare $\frac{Mdz}{(6^2+z^2)^p}$, è un poco complicato, indicheremo un processo meno diretto, ma che è in uso per giungere prontamente a questo scopo.

Si supporrà

$$\int\frac{dz}{(6^2+z^2)^p}=\frac{Hz}{(6^2+z^2)^{p-1}}+K\int\frac{dz}{(6^2+z^2)^{p-1}} \ldots (92),$$

ovvero, ciò che equivale al medesimo,

$$\int\frac{dz}{(6^2+z^2)^p}=Hz\left(6^2+z^2\right)^{1-p}+K\int\frac{dz}{(6^2+z^2)^{p-1}},$$

differenziando, si ha

$$\frac{dz}{(6^2+z^2)^p} = \mathrm{H}dz\left(6^2+z^2\right)^{1-p} + \mathrm{H}\left(1-p\right)\left(6^2+z^2\right)^{-p} 2z^2dz$$
$$+ \mathrm{K}\frac{dz}{(6^2+z^2)^{p-1}},$$

ovvero

$$\frac{dz}{(6^2+z^2)^p} = \frac{\mathrm{H}dz(6^2+z^2)}{(6^2+z^2)^p} + \frac{2\mathrm{H}(1-p)z^2dz}{(6^2+z^2)^p}$$
$$+ \mathrm{K}\frac{(6^2+z^2)\,dz}{(6^2+z^2)^p};$$

sopprimendo i fattori comuni, si trova

$$1 = \mathrm{H}\left(6^2+z^2\right) + 2\mathrm{H}\left(1-p\right)z^2 + \mathrm{K}\left(6^2+z^2\right);$$

eguagliando tra loro i coefficienti di z^2, e, da un'altra parte, quelli che ne sono indipendenti, si otterrà

$$1 = \mathrm{H}6^2 + \mathrm{K}6^2, \quad \mathrm{H} + 2(1-p)\mathrm{H} + \mathrm{K} = 0,$$

questi valori danno

$$\mathrm{H} = \frac{1}{2(p-1)6^2}, \quad \mathrm{K} = \frac{2p-3}{2(p-1)6^2};$$

H e K essendo conosciuti, se ne sostituiranno i valori nell'equazione (92), e si avrà

$$\int\frac{dz}{(6^2+z^2)^p} =$$

$$\frac{1}{2(p-1)6^2}\cdot\frac{z}{(6^2+z^2)^{p-1}} + \frac{2p-3}{2(p-1)6^2}\int\frac{dz}{(6^2+z^2)^{p-1}} \ldots . (93);$$

così l'integrale di $\frac{dz}{(6^2+z^2)^p}$ dipenderà da un altro, nel quale l'esponente della parentesi sarà minore di un'unità. Se nella formula (93) si suppone quindi $p = p - 1$, si farà dipendere l'integrale di $\frac{dz}{(6^2+z^2)^{p-1}}$ da quello di $\frac{dz}{(6^2+z^2)^{p-2}}$; e diminuendo così successivamente l'esponente della parentesi di un'unità, si caderà sopra $\int\frac{dz}{6^2+z^2}$, il cui integrale è (n.° 47)

$$\frac{1}{6}\,\mathrm{arco}\left(\mathrm{tang} = \frac{z}{6}\right).$$

74. Resulta da questa teoria che l' integrazione di qualunque frazione razionale non dipende che da queste tre specie di formule,

$$1.^{\circ} \int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1},$$

$$2.^{\circ} \int \frac{dx}{x+a} = \log (x+a),$$

$$3.^{\circ} \int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \text{ arco} \left(\text{tang} = \frac{x}{a} \right),$$

ed è per questo che si dice, che qualunque frazione razionale può sempre integrarsi o algebricamente, o con logaritmi, o con archi di circolo, ovvero col concorso di questi mezzi.

75. Termineremo questa teoria con un esempio il quale contiene tutti i casi: sia dunque la frazione razionale

$$\frac{Px^m+P'x^{m-1}+P''x^{m-2}+ \text{ ec.}}{RR'R''\ldots SS'\ldots TT'\ldots UU'\ldots} dx,$$

nella quale si ha

$$\left.\begin{array}{l} R\ = x-a \\ R' = x-b \\ R'' = x-c \\ \ldots\ldots \end{array}\right\} \textit{fattori reali ineguali};$$

$$\left.\begin{array}{l} S = (x-e)^m \\ S' = (x-d)^n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \textit{fattori reali eguali};$$

$$\left.\begin{array}{l} T\ = x^2+2\alpha x+\alpha^2+\beta^2 \\ T' = x^2+2\alpha' x+\alpha'^2+\beta'^2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \textit{fattori immaginari ineguali};$$

$$\left.\begin{array}{l} U\ = (x^2+2\alpha_{,}x+\alpha_{,}^2+\beta_{,}^2)^p \\ U' = (x^2+2\alpha_{,,}x+\alpha_{,,}^2+\beta_{,,}^2)^q \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \textit{fattori immaginari eguali};$$

si supporrà

$$\frac{Px^m+P'x^{m-1}+P''x^{m-2}+ \text{ ec.}}{RR'R''\ldots SS'\ldots TT'\ldots UU'\ldots} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-a} + \frac{C}{x-c} + \text{ ec.}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ \frac{E}{(x-e)^m} + \frac{E'}{(x-e)^{m-1}} + \frac{E''}{(x-e)^{m-2}} + \text{ ec.}$$

$$+ \frac{F}{(x-d)^n} + \frac{F'}{(x-d)^{n-1}} + \frac{F''}{(x-d)^{n-2}} + \text{ ec.}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{G+Hx}{x^2+2\alpha x+\alpha^2+\beta^2} + \frac{K+Lx}{x^2+2\alpha' x+\alpha'^2+\beta'^2} + \text{ec.}$$

. . . .

$$\frac{M+Nx}{(x^2+2\alpha_{\prime}x+\alpha_{\prime}^2+\beta_{\prime}^2)^p} + \frac{M'+N'x}{(x^2+2\alpha_{\prime}x+\alpha_{\prime}^2+\beta_{\prime}^2)^{p-1}} + \text{ec.}$$

$$+ \frac{P+Qx}{(x^2+2\alpha_{\prime\prime}x+\alpha_{\prime\prime}^2+\beta_{\prime\prime}^2)^q} + \frac{P'+Q'x}{(x^2+2\alpha_{\prime\prime}x+\alpha_{\prime\prime}^2+\beta_{\prime\prime}^2)^{q-1}} + \text{ec.}$$

. . . .

e riducendo al medesimo denomioatore, opereremo come è stato spiegato.

76. I nostri limiti ooo ci permettono di entrare in maggiori particolarità sopra la decomposizione delle funzioni frazionarie in frazioni parziali. Questa teoria estremamente importante per il calcolo integrale, potrà studiarsi più completamente nell' opera dell' Eulero, intitolata; *Introduction à l'analyse des infiniment petits*, ovvero nel gran trattato del Lacroix. Occupiamoci ora dell' integrazione delle fuozioni irraziooali.

Il processo foodameotale di quest' integrazione consiste a trasformare le funzioni irraziooali in altre ehe siano raziooali, o almeoo io una serie di mooomi irrazionali, poichè qoest' ultimi possono sempre iotegrarsi con l' aiuto delle formule (59) e (60)

Si abbia, per esempio:

$$\left(a\sqrt[3]{x} - b\sqrt[4]{cx^3}\right)dx,$$

mettendo questa funzione sotto la forma

$$ax^{\frac{1}{3}}\,dx - bc^{\frac{1}{4}}\,.\,x^{\frac{3}{4}}\,dx,$$

ciascuo termine può essere immediatamente integrato, e siccome dalla formula (59) si ha

$$\int x^{\frac{1}{3}}dx = \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}, \quad \int x^{\frac{3}{4}}dx = \frac{4}{7}x^{\frac{7}{4}},$$

l' integrale cercato sarà perciò

$$\int\left(a\sqrt[3]{x} - b\sqrt[4]{cx^3}\right)dx = \frac{3}{4}a\sqrt[3]{x^4} + \frac{4}{7}b\sqrt[4]{c}\,.\,\sqrt[4]{x^7} + C$$

$$= \frac{3}{4}a\,.\sqrt[3]{x^4} + \frac{4}{7}b\sqrt[4]{cx^7} + C.$$

77. Se si trattasse di una funzione frazionaria,

$$\frac{a\sqrt[3]{x}-b\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}+c\sqrt[3]{x}}\,dx, \text{ ovvero } \frac{ax^{\frac{1}{3}}-bx^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{4}}+cx^{\frac{1}{3}}}\,dx,$$

si ridorrebbero gli esponenti frazionsri al loro più piccolo comun denominatore, e, avendo trovato che qoesto deoominatore è 12, si farebbe

$$x=z^{12},\ \text{doode}\ dx=12z^{11}dz,$$

e

$$x^{\frac{1}{2}}=z^{6},\quad x^{\frac{1}{3}}=z^{4},\quad x^{\frac{1}{4}}=z^{3},$$

sostitoendo questi valori oella fuozione proposta, essa diventerebbe

$$\frac{az^{4}-bz^{6}}{z^{3}+cz^{4}}\,12z^{11}dz=\frac{12az^{15}-12bz^{17}}{z^{3}+cz^{4}}\,dz,$$

ovvero definitivamente, sottraendo il fattor comune z^{3}

$$\frac{12az^{12}-12bz^{14}}{1+cz}\,dz.$$

Per integrare quest' oltima, cominceremo dall' osservare che possiamo dividere il nomeratore pel denomioatore; eseguendo la divisione, viene

$$\frac{12az^{12}-12bz^{14}}{1+cz}\,dz=-\frac{12b}{c}\,z^{13}dz+\frac{12b}{c^{2}}\,z^{12}dz$$

$$+\frac{12(ac^{2}-b)}{c^{3}}\,z^{11}\,dz-\frac{12(ac^{2}-b)}{c^{4}}\,z^{10}\,dz$$

$$+\frac{12(ac^{2}-b)}{c^{5}}\,z^{9}\,dz-\frac{12(ac^{2}-b)}{c^{6}}\,z^{8}\,dz$$

$$+\frac{12(ac^{2}-b)}{c^{7}}\,z^{7}\,dz-\frac{12(ac^{2}-b)}{c^{8}}\,z^{6}\,dz$$

$$+\frac{12(ac^{2}-b)}{c^{9}}\,z^{5}\,dz-\frac{12(ac^{2}-b)}{c^{10}}\,z^{4}\,dz$$

$$+\frac{12(ac^{2}-b)}{c^{11}}\,z^{3}\,dz-\frac{12(ac^{2}-b)}{c^{12}}\,z^{2}\,dz$$

$$+\frac{12(ac^{2}-b)}{c^{13}}\,z\,dz-\frac{12(ac^{2}-b)}{c^{14}}\,dz$$

$$+\frac{12(ac^{2}-b)}{c^{15}}\cdot\frac{dz}{(1+cz)}.$$

Integrando ciascun termine in particolare, e osservando che mediante l' espressione (72)

$$\int \frac{dz}{1+cz} = \frac{1}{c} \cdot \log(1+cz)$$

otterremo, dopo aver rimesso invece di z il suo valore $\sqrt[12]{x}$,

$$\int \frac{a\sqrt{x} - b\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x} + c\sqrt[3]{x}} dx = -\frac{12b}{14c} x^{\frac{14}{12}} + \frac{12b}{13c^2} x^{\frac{13}{12}}$$

$$+12\left(ac^3 - b\right)\left\{ \frac{x^{\frac{12}{12}}}{12c^3} - \frac{x^{\frac{11}{12}}}{11c^4} \right.$$

$$+ \frac{x^{\frac{10}{12}}}{10c^5} - \frac{x^{\frac{9}{12}}}{9c^6}$$

$$+ \frac{x^{\frac{8}{12}}}{8c^7} - \frac{x^{\frac{7}{12}}}{7c^8}$$

$$+ \frac{x^{\frac{6}{12}}}{6c^9} - \frac{x^{\frac{5}{12}}}{5c^{10}}$$

$$+ \frac{x^{\frac{4}{12}}}{4c^{11}} - \frac{x^{\frac{3}{12}}}{3c^{12}}$$

$$+ \frac{x^{\frac{2}{12}}}{2c^{13}} - \frac{x^{\frac{1}{12}}}{2c^{14}}$$

$$\left. + \frac{1}{c^{16}} \cdot \log\left(1 + c\sqrt[12]{x}\right) \right\} + C.$$

Si opererà egualmente in tutti i casi simili.

78. Tutte le volte che è impossibile di riportare una frazione irrazionale ad una forma razionale per mezzo di convenienti trasformazioni, bisogna svilupparla in serie, il che produce sempre una serie indefinita di monomi integrabili con i metodi esposti fin quì. Ma siccome è molto più vantaggioso ottenere l' integrale sotto una forma finita, non dobbiamo aver ricorso a quest' ultimo processo che quando è ben constatato che veruna trasformazione non può

riuscire. Passiamo a considerare ancora alcune forme particolari delle differenziali irrazionali alle quali certi metodi di trasformazione, dei quali non abbiamo ancora parlato, possono essere applicabili. φx essendo una funzione razionale di x, sia, per esempio, la differenziale

$$\frac{\varphi x \, . \, dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}.$$

Per rendere qnesta funzione raziooale, poniamo

$$\sqrt{a+bx+cx^2} = x\sqrt{c}+z.$$

Elevando al quadrato i due membri di quest' eguaglianza, otterremo

$$a+bx+cx^2 = cx^2+2xz\sqrt{c}+z^2,$$

donde

$$x = \frac{a-z^2}{2z\sqrt{c}-b},$$

$$dx = \frac{-2(z^2\sqrt{c}+a\sqrt{c}-bz)}{(2z\sqrt{c}-b)^2}dz,$$

e, per conseguenza,

$$\sqrt{a+bx+cx^2} = \frac{z^2\sqrt{c}+a\sqrt{c}-bz}{2z\sqrt{c}-b},$$

sostituendo questi valori nella funzione proposta, e indicando con ψz, la funzione in z che resulta da φx, quando si dà ad x il valore di sopra, avremo

$$-\frac{2\psi z \, . \, dz}{2z\sqrt{c}-b} \; \ldots\ldots \; (94),$$

che è una funzione razionale.

Nel caso di $\varphi x = 1$, si ha sempliocemente per l' integrale della trasformata

$$\int \frac{-2dz}{2z\sqrt{c}-b} = -\frac{1}{\sqrt{c}} \, . \, \log(2z\sqrt{c}-b);$$

donde, rimettendo i valori

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{c}} . \log\left\{2\sqrt{c}\left[\left(a+bx+cx^2\right)^{\frac{1}{2}} - x\sqrt{c}\right] - b\right\} + C \; \ldots\ldots \; (95).$$

Per dare almeno un' applicazione della formula generale, proponiamoci la funzione

$$\frac{x^2dx}{\sqrt{1+2x+4x^2}};$$

in questn easo, abbiamo

$$\varphi x = x^2,\quad a = 1,\quad b = 2,\quad c = 4,$$

per eonseguenza

$$x = \frac{1 - z^2}{4z - 2} = \frac{1 - z^2}{2(2z - 1)},$$

e

$$\psi z = \left[\frac{1 - z^2}{2(2z - 1)}\right]^2 = \frac{1 - 2z^2 + z^4}{4(4z^2 - 4z + 1)}.$$

La trasformata (94) in z sarà pereiò

$$-\frac{4z^5 - 2z^4 - 8z^3 + 4z^2 + 4z - 2}{2(4z^2 - 4z + 1)}\,dz.$$

il che dà, effettuaodo la divisiooe,

$$-\frac{1}{2}\left\{z^3 + \frac{1}{2}z^2 - \frac{7}{4}z - \frac{7}{8} + \frac{\frac{9}{4}\,z - \frac{9}{8}}{4z^2 - 4z + 1}\right\}dz,$$

quantità la eui iotegraziooe non presenta aleooa diffieoltà. Si trnva per l' iotegrale totale, nperando termine per termine, l' espressiooe

$$-\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{4}z^4 + \frac{1}{6}z^3 - \frac{7}{8}z^2 - \frac{7}{8}z - + \frac{9}{16}\log(2z - 1)\right\} + C.$$

L' ultimn termine, ehe possiamo mettere sotto la forma

$$\frac{9}{8}\cdot\frac{2z - 1}{(2z - 1)^2}\,dz = \frac{2dz}{2z - 1},$$

s' integra eol metodo del n.° 43.

Così sostituendo per z il suo valore

$$-2x + \sqrt{1 + 2x + 4x^2},$$

avremo, in un numero fioitn di termini, l' integrale della funziooe irraziouale

$$\frac{x^2dx}{\sqrt{1 + 2x + 4x^2}}.$$

79. Quando il eoeffieiente c è negativo nella quantità radieale $\sqrt{a + bx + cx^2}$,

o quandn la funzione che abbiamo eonsiderata è

$$\frac{\varphi x\,.\,dx}{\sqrt{a + bx - cx^2}},$$

la preeedente trasformazinne introduce oell' integrale delle quantità dette *immaginarie* (*Vedi* Questa parola). Iofatti, nel caso il più semplice, quello eioè di $\varphi x = 1$, la funzinne trasformata (94) è

$$\frac{-2dz}{-b + 2z\sqrt{-c}},$$

e il suo integrale essendo

$$\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{c}} \cdot \log\left(-b+2z\sqrt{-c}\right),$$

si ha

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx-cx^2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{c}} \cdot \log\left[2\left(a+bx-cx^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{-c} + 2cx - b\right] \quad \ldots\ldots (96).$$

Quest' integrale può riportarsi ad un arco di circolo mediante una trasformazione semplicissima. Facciamo

$$x = u + \frac{b}{2c},$$

avremo

$$\sqrt{a+bx-cx^2} = \left[a + b\left(u+\frac{b}{2c}\right) - c\left(u+\frac{b}{2c}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left[a + \frac{b^2}{4c} - cu^2\right]^{\frac{1}{2}},$$

e, per conseguenza

$$\frac{dx}{\sqrt{a+bx-cx^2}} = \frac{du}{\sqrt{\left[\frac{b^2+4ac}{4c} - cu^2\right]}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{c}} \frac{\frac{2c}{\sqrt{(b^2+4ac)}} \cdot du}{\sqrt{\left[1 - \frac{4c^2}{b^2+4ac}u^2\right]}}.$$

Osservando che quest' ultima espressione è della forma

$$A \cdot \frac{\alpha\, du}{\sqrt{1-\alpha^2u^2}},$$

e che si ha (n.° 45)

$$A \int \frac{\alpha\, du}{\sqrt{1-\alpha^2u^2}} = A \cdot \text{arco}(\text{sen} = \alpha u),$$

se ne concluderà

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx-cx^2}}=\frac{1}{\sqrt{c}}\cdot \text{arco}\left(\text{sen}=\frac{2cu}{\sqrt{b^2+4ac}}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{c}}\cdot \text{arco}\left(\text{sen}=\frac{2cx-b}{\sqrt{b^2+4ac}}\right)$$

$+$ *costante*

$$=-\frac{1}{\sqrt{c}}\cdot \text{arco}\left(\cos=\frac{2cx-b}{\sqrt{b^2+4ac}}\right)$$

$+$ *costante* . . . . (97).

Il paragone dei due valori, tanto differenti, che abbiamo ottenuto per l' integrale di

$$\frac{dx}{\sqrt{a+bx-cx^2}},$$

fa conoscere alcune proprietà singolari delle quantità dette *immaginarie*, poichè indicando con μ l' arco il cui coseno è

$$\frac{2cx-b}{\sqrt{b^2+4ac}},$$

ovvero, ponendo

$$\cos\mu=\frac{2cx-b}{\sqrt{b^2+4ac}},$$

donde

$$\text{sen}\,\mu=\left(1-\cos^2\mu\right)^{\frac{1}{2}}=\left[1-\frac{(2cx-b)^2}{b^2+4ac}\right]^{\frac{1}{2}},$$

possiamo dare all' integrale *logaritmico* la forma

$$\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{c}}\cdot\log\left(\cos\mu+\text{sen}\,\mu\sqrt{-1}\right)+\text{C}\,.\;.\;.\;.\;(98),$$

nel mentre che l' integrale *circolare* è semplicemente

$$-\frac{\mu}{\sqrt{c}}+\text{C}'.$$

Infatti, per dare all' integrale (96) la forma (98), mettiamoci $u+\frac{b}{2c}$, invece di x, esso diventerà

$$\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{c}}\cdot\log\left[2\sqrt{c}\left(\frac{b^2+4ac}{4c}-cu^2\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{-1}+2cu\right],$$

il che si potrà trasformare in

$$\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{c}}\log\left[\sqrt{b^2+4ac}\,.\left\{\left(1-\frac{4c^2u^2}{b^2+4ac}\right)^{\frac{1}{2}}.\sqrt{-1}\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{2cu}{\sqrt{b^2+4ac}}\right\}\right]\ .\ .\ .\ .\ .\ (99).$$

Così, poichè si ha

$$\frac{2cu}{\sqrt{b^2+4ac}}=\frac{2cx-b}{\sqrt{b^2+4ac}}=\cos\mu,$$

$$\left(1-\frac{4c^2u^2}{b^2+4ac}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(1-\frac{(2cx-b)^2}{b^2+4ac}\right)^{\frac{1}{2}}=\operatorname{sen}\mu,$$

l' espressione (99) si riduce a

$$\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{c}}\,.\log\left[\sqrt{b^2+4ac}\left(\cos\mu+\operatorname{sen}\mu\sqrt{-1}\right)\right]=$$

$$\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{c}}\,.\log\sqrt{b^2+4ac}+\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{c}}\log\left(\cos\mu+\operatorname{sen}\mu\sqrt{-1}\right),$$

e siccome vi è un termine costante, aggiungendolo alla costante arbitraria si otterrà la formula (98).

Abbiamo dunque

$$-\frac{\mu}{\sqrt{c}}=\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{c}}\log\left(\cos\mu+\operatorname{sen}\mu\sqrt{-1}\right)+C'',$$

C'' rappresentando la quantità costante che resulta dalle costanti arbitrarie dei due integrali. Ma questa costante è *zero*, poichè facendo l' arco $\mu=0$; viene $\cos\mu=1$, $\operatorname{sen}\mu=0$, e quest' ultima espressione dà

$$0=0+C'',\quad\text{donde}\quad C''=0.$$

Abbiamo dunque definitivamente, moltiplicando i due termini per $\sqrt{c}$ e per $\sqrt{-1}$, l' espressione degna di osservazione

$$\mu\sqrt{-1}=\log\left(\cos\mu+\operatorname{sen}\mu\sqrt{-1}\right)\ .\ .\ .\ .\ .\ (100).$$

80. Se in quest' espressione si fa $\mu=\frac{1}{2}\pi$, π essendo la semi-circonferenza

del circolo il cui raggio è l' unità; siccome allora $\cos\frac{1}{2}\pi = o$ e $\text{sen}\frac{1}{2}\pi = 1$;

essa diviene

$$\frac{1}{2}\pi\sqrt{-1} = \log\left(\sqrt{-1}\right),$$

il che ci dà una delle generazioni ideali del logaritmo della quantità datta *immaginaria* $\sqrt{-1}$.

Questa medesima espressione (100) riporta alla costruzione teorica delle funzioni *seno* e *coseno*; poichè e essendo la base dei logaritmi naturali, si ha in generale

$$e^{\log x} = x.$$

Così

$$e^{\log\left(\cos\mu + \text{sen}\,\mu\sqrt{-1}\right)} = \cos\mu + \text{sen}\,\mu\sqrt{-1},$$

e per conseguenza

$$e^{\mu\sqrt{-1}} = \cos\mu + \text{sen}\,\mu\sqrt{-1},$$

(*Vedi* SENO).

81. Avanti di passare all' integrazione delle funzioni trascendenti, dobbiamo ancora esaminare i casi in cui la funzione binomia

$$x^m dx\left(a + bx^n\right)^{\frac{p}{q}}$$

può divenire razionale; questa funziona essendo di un uso frequente.

Senza niente diminuire alla sua generalità possiamo supporre che gli esponenti m ed n siano numeri interi, poichè nel caso contrario, se si avesse, per esempio

$$x^{\frac{r}{s}}dx\left(a + bx^{\frac{t}{u}}\right)^{\frac{p}{q}},$$

la somma delle frazioni $\frac{r}{s}$ e $\frac{t}{u}$, essendo $\frac{ru + st}{su}$, si farebbe $x = z^{su}$, donde

risulterebbe

$$z^{ru}dz\left(a + bz^{st}\right)^{\frac{p}{q}},$$

che è la forma supposta. Possiamo ancora sempre considerare n come positiva, poichè si trasforma

$$x^m dx\left(a + bx^{-n}\right)^{\frac{p}{q}},$$

in

$$z^{-m}dz\left(a+bz^{n}\right)^{\frac{p}{q}},$$

mediante la sostituzione di $\frac{1}{z}$ invece di z.

Premesso ciò, diamo, per maggior semplicità, la forma $x^{m-1}dx\left(a+bx^{n}\right)^{\frac{p}{q}}$, alla funzione binomia e facciamo

$$a+bx^{n}=z^{q},$$

allora

$$\left(a+bx^{n}\right)^{\frac{p}{q}}=z^{p},$$

e si trova

$$x^{n}=\frac{z^{q}-a}{b},$$

$$x^{m}=\left(\frac{z^{q}-a}{b}\right)^{\frac{m}{n}},$$

$$x^{m-1}dx=\frac{q}{nb}z^{q-1}dz\left(\frac{z^{q}-a}{b}\right)^{\frac{m}{n}-1}.$$

Si ottiene dunque, invece della differenziale proposta,

$$\frac{q}{nb}z^{p+q-1}dz\left(\frac{z^{q}-a}{b}\right)^{\frac{m}{n}-1}\quad\ldots\ldots(101),$$

la quale diviene evidentemente razionale quando $\frac{m}{n}$ è un numero intero positivo; poichè allora $\frac{z^{q}-a}{b}$ è elevato ad una potenza intera, e possiamo ridurre l'espressione (101) ad un numero limitato di monomi, i quali sono integrabili ciascuno o per il n.° 37 o per il n.° 40. Se $\frac{m}{n}$ è un numero intero negativo, l'espressione (101) diventando ancora razionale, possiamo integrarla col metodo delle frazioni razionali.

Un'altra trasformazione, dovuta all'Eulero, ci farà conoscere una nuova condizione, che, in mancanza di quella che abbiamo trovato, permette di rendere razionale la funzione binomia. Poniamo

$$a+bx^{n}=x^{n}z^{q},$$

donde

$$x^n = \frac{a}{z^q - b},$$

$$x = \frac{a^{\frac{1}{n}}}{\left(z^q - b\right)^{\frac{1}{n}}},$$

$$x^m = \frac{a^{\frac{m}{n}}}{\left(z^q - b\right)^{\frac{m}{n}}},$$

$$x^{m-1}dx = -\frac{a^{\frac{m}{n}}.q.z^{q-1}dz}{n\left(z^q - b\right)^{\frac{m}{n}+1}},$$

ed otterremo la funzione trasformata

$$-\frac{a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}.q.z^{p+q-1}dz}{n\left(z^q - b\right)^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}+1}} \; .\;.\;.\;.\; (102),$$

la quale diventa razionale se $\frac{m}{n} + \frac{p}{p}$ è un numero intero.

Sia, per esempio, la funzione binomia

$$x^5dx\left(a+bx^3\right)^{\frac{4}{5}},$$

in questo caso $m-1=5$, donde $m=6$, $n=3$, $p=4$, $q=5$; così $\frac{m}{n}=\frac{6}{3}=2$, numero intero.

Sostituendo questi valori nella prima trasformazione (101), viene

$$\frac{5}{3b}z^8\left(\frac{z^5-a}{b}\right)dz = \frac{5}{3b^2}\left(z^{13}dz - az^8dz\right),$$

il cui integrale è

$$\frac{5}{3b^2}\left\{\frac{z^{14}}{14} - \frac{az^9}{9}\right\}.$$

Rimettendo invece di z il suo valore $\sqrt[5]{a+bx^3}$, si ha dunque

$$\int x^5 dx\left(a+bx^3\right)^{\frac{4}{5}} = \frac{5}{3b^2}\left\{\frac{1}{14}\left(a+bx^3\right)^{\frac{14}{5}} - \right.$$

$$\left. -\frac{1}{9}a\left(a+bx^3\right)^{\frac{9}{5}}\right\} + C.$$

Sia per secondo esempio

$$x^5\left(a+bx^2\right)^{\frac{2}{3}} dx.$$

In questo caso, abbiamo

$$p=2,\quad q=3,\quad m-1=5,\quad \text{ossia}\quad m=6,\quad n=2,$$

per conseguenza la condizione d'integrabilità è soddisfatta. Sostituendo questi valori nell'espressione (101), avremo da integrare

$$\frac{3}{2b^3}\left(z^3-a\right)^2 z^4 dz = \frac{3z^{11}}{2b^3}dz - \frac{3a}{b^3}z^7 dz + \frac{3a^2}{2b^3}z^4 dz;$$

dunque

$$\int\frac{3}{2b^3}\left(z^3-a\right)^2 z^4 dz = \frac{3z^{11}}{22b^3} - \frac{3az^8}{8b^3} + \frac{3a^2z^5}{10b^3} + C;$$

sostituendo quindi in questo risultamento il valore di z in x, verrà

$$\int x^5\left(a+bx^2\right)^{\frac{2}{3}} dx = \frac{3}{22b^3}\left(a+bx^2\right)^{\frac{11}{3}} - \frac{3a}{8b^3}\left(a+bx^2\right)^{\frac{8}{3}}$$

$$+\frac{3a^2}{10b^3}\left(a+bx^2\right)^{\frac{5}{3}} + C;$$

e finalmente

$$\int x^5\left(a+bx^2\right)^{\frac{2}{3}} dx = \frac{3}{22b^3}\sqrt[3]{\left(a+bx^2\right)^{11}} - \frac{3a}{8b^3}\sqrt[3]{\left(a+bx^2\right)^{8}}$$

$$+\frac{3a^2}{10b^3}\sqrt[3]{\left(a+bx^2\right)^{5}} + C.$$

Sia per terzo esempio

$$x^4 dx\left(a+bx^3\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Siccome allora $p=1$, $q=3$, $n=3$, $m-1=4$, donde $m=5$; $\frac{m}{n}=\frac{5}{3}$ non è un numero intero, e la prima trasformazione non può essere adoperata. Ma si ha $\frac{m}{n}+\frac{p}{q}=\frac{5}{3}+\frac{1}{3}=2$, numero intero; così sostituendo questi valori nella seconda trasformazione (102), si ottiene

$$-\frac{a^2 \cdot z^3 dz}{(z^3-b)^3},$$

espressione che possiamo integrare col metodo delle *frazioni razionali* n.° 56, e nel cui integrale bisognerà inseguito rimettere il valore di z, cioè:

$$\sqrt[3]{b+\frac{a}{x^3}}.$$

82. L'integrazione della funzione binomia della quale ci occupiamo, non potendo ottenersi in un modo generale senza aver ricorso alle serie, e i casi nei quali è possibile di applicare l'una o l'altra delle precedenti trasformazioni essendo assai limitati, si rende quindi importante di rendere più facile l'operazione decomponendola in modo da fare dipendere un integrale complicato da uno più semplice. Il processo che s'impiega per eseguir ciò è l'*integrazione per parti* che abbiamo stabilito n.° 71.

Per applicarvi questo metodo, diamo alla funzione binomia la forma

$$x^{m-n} \cdot x^{n-1} dx\,(a+bx^n)^p,$$

l'esponente p essendo sempre un numero frazionario qualunque; facciamo

$$x^{m-n}=\mathrm{P},$$

$$x^{n-1}dx(a+bx^n)^p=d\mathrm{V};$$

donde n.° 43

$$\mathrm{V}=\frac{(a+bx^n)^{p+1}}{nb(p+1)}.$$

Dalla formula (89), si ha

$$\int x^{m-n} \cdot x^{n-1}dx\left(a+bx^n\right)^p=\frac{x^{m-n} \cdot (a+bx^n)^{p+1}}{nb(p+1)}$$

$$-\int\frac{(a+bx^n)^{p+1}}{nb(p+1)} \cdot d(x^{m-n}).$$

Rappresentando, per abbreviare, $(a+bx^n)$ con X, quest'ultima espressione diventa

$$\int x^{m-1}dx \cdot \mathrm{X}^p=\frac{x^{m-n} \cdot \mathrm{X}^{p+1}}{nb(p+1)}-$$

$$-\frac{m-n}{nb(p+1)}\int x^{m-n-1}\,dx \cdot \mathrm{X}^{p+1}.$$

Ora, si ha

$$\int x^{m-n-1}dx\,.\,X^{p+1}=\int x^{m-n-1}dx\,.\,X^{p}\,.\,X$$

$$=a\int x^{m-n-1}dx\,.\,X^{p}$$

$$+b\int x^{m-1}dx\,.\,X^{p}$$

e per conseguenza

$$\int x^{m-1}dx\,.\,X^{p}=\frac{x^{m-n}X^{p+1}-a(m-n)\int x^{m-n-1}dx\,.\,X^{p}}{b(pn+m)}\;\ldots\ldots(103).$$

L'integrale di $x^{m-1}dx\,.\,X^{p}$, si trova dunque così riportato a quello di $x^{m-n-1}dx\,.\,X^{p}$, e operando nella medesima maniera, si riporterebbe quest' ultimo a quello di $x^{m-2n-1}dx\,.\,X^{p}$, e così di seguito.

83. Se nella formula (103) si cangia m in $m+n$ e p in $p-1$, essa diventa

$$\int x^{m+n-1}dx\,.\,X^{p-1}=\frac{x^{m}\,.\,X^{p}-am\int x^{m-1}dx\,.\,X^{p-1}}{b(pn+m)}.$$

Ma osservando che

$$\int x^{m-1}dx\,.\,X^{p}=\int x^{m-1}dxX^{p-1}\,.\,X$$

$$=a\int x^{m-1}dx\,.\,X^{p-1}+b\int x^{m+n-1}dx\,.\,X^{p-1},$$

si ottiene

$$\int x^{m-1}dx\,.\,X^{p}=\frac{X^{m}\,.\,x^{p}+pna\int x^{m-1}dx\,.\,X^{p-1}}{pn+m}\;\ldots\ldots(104).$$

Seconda formula di riduzione che fa dipendere l' integrale di $x^{m-1}dx\,.\,X^{p}$, da quello di $x^{m-1}dx\,.\,X^{p-1}$.

84. Applichiamo queste formule all' integrale

$$\int\frac{x^{m-1}dx}{\sqrt{1-x^{2}}}.$$

Abbiamo $X=1-x^{2}$, $a=1$, $b=-1$, $n=2$ e $p=-\frac{1}{2}$; sostituendo nella formula (103), troveremo

$$\int\frac{x^{m-1}dx}{\sqrt{1-x^{2}}}=-\frac{x^{m-2}\sqrt{1-x^{2}}}{m-1}+\frac{m-2}{m-1}\int\frac{x^{m-3}dx}{\sqrt{1-x^{2}}}.$$

In virtù di questa medesima espressione, avremo successivamente

$$\int\frac{x^{m-3}dx}{\sqrt{1-x^{2}}}=-\frac{x^{m-4}\sqrt{1-x^{2}}}{m-3}+\frac{m-4}{m-3}\int\frac{x^{m-5}dx}{\sqrt{1-x^{2}}},$$

$$\int\frac{x^{m-5}dx}{\sqrt{1-x^2}}=-\frac{x^{m-6}\sqrt{1-x^2}}{m-5}+\frac{m-6}{m-5}\int\frac{x^{m-7}dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\int\frac{x^{m-7}dx}{\sqrt{1-x^2}}=-\frac{x^{m-8}\sqrt{1-x^2}}{m-7}+\frac{m-8}{m-7}\int\frac{x^{m-9}dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

ec. = ec.

Sostituendo ciascuno di questi integrali in quello che lo precede, e ponendo m invece di $m-1$, otterremo l'espressione generale

$$\int\frac{x^m dx}{\sqrt{1-x^2}}=-\sqrt{1-x^2}\left\{\frac{1}{m}x^{m-1}+\frac{(m-1)^{1|-2}}{m^{2|-2}}x^{m-3}\right.$$

$$+\frac{(m-1)^{2|-2}}{m^{3|-2}}x^{m-5}$$

$$+\frac{(m-1)^{3|-2}}{m^{4|-2}}x^{m-7}$$

$$+\text{ec.}\ \ldots\ldots\ldots$$

$$\left.+\frac{(m-1)^{\mu-1|-2}}{m^{\mu|-2}}x^{m-2\mu+1}\right\}$$

$$+\frac{(m-1)^{\mu|-2}}{m^{\mu|-2}}\int\frac{x^{m-2\mu}dx}{\sqrt{1-x^2}}+\textit{costante};$$

μ essendo un numero intero qualunque.

Così prendendo μ in modo che sia $m-2\mu=0$, quando m è pari, e $m-2\mu=1$, quando m è impari; l'ultimo integrale dal quale dipende il valore di quest'espressione, sarà: per m pari

$$\frac{(m-1)^{\frac{m}{2}|-2}}{m^{\frac{m}{2}|-2}}\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}};$$

e per m impari,

$$\frac{(m-1)^{\frac{m+1}{2}|-2}}{m^{\frac{m+1}{2}|-2}}\int\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Ora, nel primo caso, si ha (*vedi* n.° 45)

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\text{arco}\,(\text{sen}=x),$$

e nel secondo, il coefficiente dell'integrale riducendosi a *zero*, poichè si ha,

(*vedi* FATTORIELLA n° 1) per l'ultimo fattore del suo numeratore,

$$m-1-2\left[\frac{m+1}{2}-1\right]=m-1-m-1+2=0,$$

quest' ultimo integrale sparisce. Dunque, nel caso di m, numero pari, l' integrale generale dipende da un arco di circolo, e nel caso di m impari, esso è immediatamente dato da un seguito di termini algebrici.

Per esempio, per $m=5$, donde $\mu=2$, si ha

$$\int\frac{x^5dx}{\sqrt{1-x^2}}=-\sqrt{1-x^2}\left\{\frac{1}{5}x^4+\frac{4}{5.3}x^2+\frac{4.2}{5.3.1}\right\}+C,$$

e, per $m=6$, donde $\mu=3$

$$\int\frac{x^6dx}{\sqrt{1-x^2}}=-\sqrt{1-x^2}\left\{\frac{1}{6}x^5+\frac{5}{6.4}x^3+\frac{5.3}{6.4.2}x\right\}$$

$$+\frac{5.3.1}{6.4.2}.\text{ arco }(\text{sen}=x)+C.$$

85. Le formule (103) e (104) cesserebbero di essere applicabili se gli esponenti m e p fossero negativi, poichè allora questi esponenti aumenterebbero invece di diminuire. In questo caso si rovesciano le formule nella seguente maniera: si deduce dalla (103)

$$\int x^{m-n-1}dx\,.\,X^p=\frac{x^{m-n}X^{p+1}-b(m+np)\int x^{m-1}dx\,.\,X^p}{a(m-n)},$$

e se si sostituisce $m+n$ invece di m, viene

$$\int x^{m-1}dx\,.\,X^p=\frac{x^m\,.\,X^{p+1}-b(m+n+np)\int x^{m+n-1}dx\,.\,X^p}{am}\;\ldots\;(105)$$

Con una simile trasformazione la (104), dà

$$\int x^{m-1}dx\,.\,X^p=\frac{-x^mX^{p+1}+(m+n+np)\int x^{m-1}dx\,.\,X^{p+1}}{(p+1)na}\;\ldots\;(106).$$

Così nel caso di m o di p negativi, ci serviremo delle formule (105) e (106): vale a dire della (105) quando si vorrà diminuire l' esponente di x, e della (106), quando la riduzione dovrà cadere sopra quello di X. Non dobbiamo impiegare le formule (104) e (106) che nel caso in cui l' esponente di X è maggiore dell' unità.

Quando in una delle formule (103), (104), (105), (106) il denominatore sparisce, la formula diventa illusoria, ma allora la differenziale proposta si riduce ad un monomio o ad una frazione integrabile con i processi esposti precedentemente.

86. Prendiamo ancora per esempio $\frac{dx}{x^m\sqrt{1-x^2}}$; e scrivendo come segue

quest' espressione

$$x^{-m}\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}dx,$$

si paragonerà alla formula (105) per diminuire l' esponente di x fuori delle parentesi, e si avrà

$$X=(1-x^2),\ m-1=-m,\ a=1,\ b=-1,\ n=2,\ p=-\frac{1}{2};$$

per mezzo di questi valori, la formula (105) diventerà

$$\int x^{-m}dx\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}=\frac{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}{1-m}x^{1-m}+\frac{(2-m)}{1-m}\int x^{-m+2}dx\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}},$$

o piuttosto

$$\int\frac{dx}{x^m\sqrt{1-x^2}}=-\frac{\sqrt{1-x^2}}{(m-1)x^{m-1}}+\frac{m-2}{m-1}\int\frac{dx}{x^{m-2}\sqrt{1-x^2}}\ \ldots\ldots\ (107).$$

Se m è un numero pari, per esempio 8, avremo successivamente

$$\int\frac{dx}{x^8\sqrt{1-x^2}}=-\frac{\sqrt{1-x^2}}{7x^7}+\frac{6}{7}\int\frac{dx}{x^6\sqrt{1-x^2}},$$

$$\int\frac{dx}{x^6\sqrt{1-x^2}}=-\frac{\sqrt{1-x^2}}{5x^5}+\frac{4}{5}\int\frac{dx}{x^4\sqrt{1-x^2}},$$

$$\int\frac{dx}{x^4\sqrt{1-x^2}}=-\frac{\sqrt{1-x^2}}{3x^3}+\frac{2}{3}\int\frac{dx}{x^2\sqrt{1-x^2}},$$

e finalmente

$$\int\frac{dx}{x^2\sqrt{1-x^2}}=-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}+C;$$

e per mezzo di sostituzioni successive, si otterrà l' integrale

$$\int\frac{dx}{x^8\sqrt{1-x^2}}=-\frac{\sqrt{1-x^2}}{7x^7}-\frac{6}{5\cdot7}\cdot\frac{\sqrt{1-x^2}}{x^5}-\frac{4\cdot6}{3\cdot5\cdot7}\cdot\frac{\sqrt{1-x^2}}{x^3}$$
$$-\frac{2\cdot4\cdot6}{3\cdot5\cdot7}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}+C,$$

ovvero

$$\int\frac{dx}{x^8\sqrt{1-x^2}}=-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\left\{\frac{1}{7x^6}+\frac{6}{5\cdot7\cdot x^4}+\frac{4\cdot6}{3\cdot5\cdot7x^2}\right.$$
$$\left.+\frac{2\cdot4\cdot6}{3\cdot5\cdot7}\right\}+C.$$

Nel caso in cui m sia impari, per esempio 7, mettendo successivamente nella formula (107) invece di m, i valori 7, 5, 3, non potremo arrestarci ad $m=1$; poichè in quest' ipotesi, il coefficiente $\frac{m-2}{m-1}$ del secondo integrale diventerebbe $-\frac{1}{0}=-\infty$; così il più piccolo valore che potremo dare ad m, sarà $m=3$. In quest'ipotesi la formula (107), diventerà

$$\int \frac{dx}{x^3\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{2x^2} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}.$$

Per integrare l' espressione $\frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$, faremo $x=\frac{1}{z}$, il che ci darà

$$dx=-\frac{dz}{z^2}, \text{ e } \sqrt{1-x^2} = \frac{\sqrt{z^2-1}}{z},$$

e per conseguenza

$$\frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} = -\frac{dz}{\sqrt{z^2-1}};$$

abbiamo trovato, n.° 50,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \log\left(x+\sqrt{x^2-1}\right);$$

dunque, cangiando x in z, avremo

$$\int -\frac{dz}{\sqrt{z^2-1}} = -\log\left(z+\sqrt{z^2-1}\right);$$

rimettendo per z il suo valore $\frac{1}{x}$, si avrà

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} = -\log\left[\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^2}-1}\right] + C$$

$$= -\log\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right) + C.$$

Così la formula

$$\frac{dx}{x^m\sqrt{1-x^2}}$$

può integrarsi, tanto che si prenda m pari o impari.

87. Procediamo all' integrazione delle funzioni trascendenti, vale a dire delle funzioni differenziali logaritmiche, esponenziali e circolari.

Gl' integrali delle funzioni differenziali di questa natura non si ottengono sotto forma finita che in alcuni casi particolari, e queste funzioni sono della

forma

$$\varphi x.(\log x)^n dx,\quad \varphi x.(\operatorname{sen} x)^n dx,\quad \varphi x.(a^x)\,dx,$$

φx essendo una funzione elementare di x.

Il metodo dell' *integrazione per parti* ci offre ancora in questo caso il mezzo di riportare gl'integrali di queste funzioni ad altri più semplici. Infatti si abbia la funzione della forma

$$dx.Pz^n$$

P indicando una funzione algebrica, z una funzione trascendente il cui coefficiente differenziale del prim' ordine è algebrico, ed n un numero intero positivo.

Integrando per parti la differenziale proposta, verrà, ponendo $Q=\int dx.P$

$$\int dx.Pz^n = Q\,z^n - n\int dx.Q\,z^{n-1}\frac{dz}{dx};$$

poi facendo $R=\int dx.Q\frac{dz}{dx}$, si avrà egualmente

$$\int dx.Q\,z^{n-1}\frac{dz}{dx} = Rz^{n-1}-(n-1)\int dx.Rz^{n-2}\frac{dz}{dx};$$

poi ponendo $S=\int dx.R\frac{dz}{dx}$,

$$\int dx.Rz^{n-2}\frac{dz}{dx} = Sz^{n-2}-(n-2)\int dx.Sz^{n-3}\frac{dz}{dx};$$

e così di seguito. Un' operazione analoga darebbe ancora il mezzo d'integrare la funzione proposta se l'esponente n fosse negativo. Quest' operazione darà l'integrale domandato se possiamo trovare l'espressione finita delle quantità indicate da Q, R, S, ec.

88. Prendiamo per esempio la funzione logaritmica

$$x^m dx.(\log x)^n,$$

e poniamo

$$x^m dx = dV,\quad \text{donde}\quad V=\frac{x^{m+1}}{m+1}.$$

Allora facendo $(\log x)^n = P$, la formula (89), n.° 71, ci conduce a

$$\int x^m dx.\left(\log x\right)^n = \frac{x^{m+1}(\log x)^n}{m+1} - \frac{n}{m+1}\int x^m dx.\left(\log x\right)^{n-1}\ldots(108),$$

espressione che fa dipendere l'integrale proposto da uno più semplice, poichè la potenza di $\log x$ è diminuita di un'unità. Dunque, nel caso in cui n è un numero intero positivo, siccome quest'ultima formula dà immediatamente le se-

guenti, cangiandovi successivamente n in $n-1$, $n-2$, ec.

$$\int x^m dx.\left(\log x\right)^{n-1} = \frac{x^{m+1}(\log x)^{n-1}}{m+1} - \frac{n-1}{m+1}\int x^m dx\left(\log x\right)^{n-2},$$

$$\int x^m dx.\left(\log x\right)^{n-2} = \frac{x^{m+1}(\log x)^{n-2}}{m+1} - \frac{n-2}{m+1}\int x^m dx\left(\log x\right)^{n-3};$$

ec. $=$ ec.,

si potrà sempre, diminuendo n, fino a tantochè diventi zero, riportare l'integrale generale a non dipendere che dall'integrale particolare $\int x^m dx$, il quale è semplicemente $\frac{x^{m+1}}{m+1}$.

La formula generale che si ottiene mediante la sostituzione di ciascuno integrale in quello che lo precede è

$$\begin{aligned}\int x^m dx.\left(\log x\right)^n = \frac{x^{m+1}}{m+1}\Big\{\left(\log x\right)^n &- \frac{n}{m+1}\left(\log x\right)^{n-1} \\ &+ \frac{n(n-1)}{(m+1)^2}\left(\log x\right)^{n-2} \\ &- \frac{n(n-1)(n-2)(\log x)^{n-3}}{(m+1)^3} \\ &+ \text{ec.} \ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ \left(-1\right)^n \frac{n^{n|-1}}{(m+1)^n}\left(\log x\right)^{n-n}\Big\} \\ &+ \textit{costante}.\end{aligned}$$

Nel caso di $n=3$, si ha

$$\begin{aligned}\int x^m dx\left(\log x\right)^3 = \frac{x^{m+1}}{m+1}\Big\{\left(\log x\right)^3 &- \frac{3}{m+1}\left(\log x\right)^2 \\ &+ \frac{3.2}{(m+1)^2}\left(\log x\right) \\ &- \frac{3.2.1}{(m+1)^3}\Big\} + \text{C}.\end{aligned}$$

Sia la differenziale

$$dy = dx\,(\log x)^n,$$

la quale dà, n essendo un numero intero positivo,

$$y = x(\log x)^n\left[1 - \frac{n}{\log x} + \frac{n(n-1)}{(\log x)^2} - \ldots \pm \frac{n(n-1)\ldots 3.2.1}{(\log x)^n}\right] + \text{C}.$$

sia ancora

$$dy = dx \, . \, x^{a-1} (\log x)^n,$$

verrà

$$y = \frac{x^a}{a}\left(\log x\right)^n \left\{ 1 - \frac{n}{a \log x} + \frac{n(n-1)}{a^2(\log x)^2} - \ldots \pm \frac{n(n-1)\ldots 3 \, . \, 2 \, . \, 1}{a^n(\log x)^n} \right\} + C.$$

La serie si prolunga all' infinito, quando n è frazionario, e si può ancora adoprare; ma quando n è negativo bisogna roveseiare l'espressione generale (108); come l'abbiamo fatto sopra (n.° 85), e si ha allora

$$\int \frac{x^m dx}{(\log x)^n} = - \frac{x^{m+1}}{(n-1)(\log x)^{n-1}} + \frac{m+1}{n-1} \int \frac{x^m dx}{(\log x)^{n-1}} \ldots . (109),$$

donde si deduce, supponendo che n sia un numero intero

$$\int \frac{x^m dx}{(\log x)^n} = - \frac{x^{m+1}}{(n-1)(\log x)^{n-1}} - \frac{(m+1)x^{m+1}}{(n-1)(n-2)(\log x)^{n-2}}$$

$$- \frac{(m+1)^2 x^{m+1}}{(n-1)(n-2)(n-3)(\log x)^{n-3}} - \text{ec.} \ldots \ldots$$

$$+ \frac{(m+1)^{n-1}}{(n-1)^{n|-1}} \, . \int \frac{x^m dx}{\log x} + C.$$

Quest' integrale dipende dunque, in ultimo luogo, da quello di $\frac{x^m dx}{\log x}$, che in seguito ne insegneremo a trovare il valore.

Dobbiamo fare osservare che quando $m = -1$, la formula (108) non è più applicabile: ma l'integrale si ottiene allora facilmente mediante una delle trasformazioni insegnate sopra; poichè facendo $\log x = u$, donde $\frac{dx}{x} = du$, siccome abbiamo veduto (n.° 40)

$$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1},$$

si ha

$$\int \frac{dx (\log x)^n}{x} = \frac{1}{n+1}\left(\log x\right)^{n+1} + C.$$

Per il medisimo valore -1, di m, la formola (109), dà

$$\int \frac{dx}{x(\log x)^n} = - \frac{1}{(n-1)(\log x)^{n-1}} + C,$$

quantità la cui parte variabile diviene infinita, quando $n = 1$. In questo caso, ancora, l'integrale può ottenersi facendo $\log x = u$, perchè allora si trasforma in

$$\int \frac{du}{u} = \log u,$$

e così si ottiene

$$\int \frac{dx}{x\,.\,(\log x)} = \log\left(\log x\right) + costante.$$

89. Per integrare le funzioni esponenziali, bisogna rammentarsi che (*vedi* DIFFERENZIALE n.° 41)

$$d(a^x) = a^x\,.\,\log a\,.\,dx,$$

espressione che somministra

$$a^x dx = \frac{d(a^x)}{\log a},$$

donde

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\log a} + cost.$$

90. Operando l' *integrazione per parti*, sopra l' integrale $\int a^x x^n dx$, dalla quale dipende l' integrale generale $\int P a^x dx$, quando P è una funzione razionale e intera, si ottiene: per n positiva

$$\int a^x x^n dx = \frac{a^x x^n}{\log a} - \frac{n}{\log a}\int a^x x^{n-1} dx \;\ldots\; (110),$$

e per quello di n negativa

$$\int \frac{a^x dx}{x^n} = -\frac{a^x}{(n-1)x^{n-1}} + \frac{\log a}{n-1}\int \frac{a^x dx}{x^{n-1}} \;\ldots\; (111).$$

Premesso ciò invece di x^n prendiamo in generale una funziune qualunque intera e razionale $\mathbf{X}$, avremo

$$\int \mathbf{X} a^x dx = \frac{\mathbf{X}\,a^x}{\log a} - \int \frac{a^x}{\log a}\,d\mathbf{X} \;\ldots\; (112),$$

differenziando successivamente la funzione $\mathbf{X}$, ne dedurremo $d\mathbf{X} = \mathbf{X}'dx$, $d\mathbf{X}' = \mathbf{X}''dx$, ec.; dunque $\int \frac{a^x}{\log a} d\mathbf{X}$,

ossia

$$\int \frac{\mathbf{X}'}{\log a}\,.\,a^x dx = \frac{\mathbf{X}'}{(\log a)^2}\,a^x - \int \frac{a^x}{(\log a)^2}\,d\mathbf{X}';$$

sostituendo questo valore invece dell' ultimo termine dell' equazione (112), otterremo

$$\int \mathbf{X} a^x dx = \frac{\mathbf{X}\,.\,a^x}{\log a} - \frac{\mathbf{X}'\,.\,a^x}{(\log a)^2} + \int \frac{a^x}{(\log a)^2}\,d\mathbf{X}'.$$

Continuando ad operare nello stesso modo, giongeremo a questo sviluppo

$$\int Xa^x dx = a^x\left(\frac{X}{\log a} - \frac{X'}{(\log a)^2} + \frac{X''}{(\log a)^3} - \frac{X'''}{(\log a)^4} + \right.$$

$$\left. \ldots\ldots \pm \frac{X^{(n)}}{(\log a)^{n+1}}\right) \pm \int \frac{a^x dX^{(n)}}{(\log a)^{n+1}}.$$

Se prendendo il seguito dei coefficienti differenziali X', X'', X''', ... $X^{(n)}$, l'ultimo di questi coefficienti è costante, si avrà $dX^{(n)} = 0$, e allora la parte integrale sparirà.

91. Prendiamo per esempio $X = x^3$, donde si deduce

$$X' = 3x^2,\quad X'' = 2 \cdot 3x,\quad X''' \text{ ossia } X^{(n)} = 3 \cdot 2;$$

dunque

$$\int x^3 a^x dx = a^x\left(\frac{x^3}{\log a} - \frac{3x^2}{(\log a)^2} + \frac{2 \cdot 3x}{(\log a)^3} - \frac{2 \cdot 3}{(\log a)^4}\right).$$

Se facciamo a eguale al numero e, che è la base del sistema neperiano, $\log a$ diventa $\log e$; ora $\log e = 1$, in virtù dell'equazione $e = e^{\log e}$; per conseguenza

$$\int x^3 e^x dx = e^x(x^3 - 3x^2 + 2 \cdot 3x - 2 \cdot 3).$$

Se invece si ha la funzione differenziale

$$x^n e^{ax} \cdot dx,$$

avremo

$$\int x^n e^{ax} . dx = \frac{x^n e^{ax}}{a} - \frac{n}{a}\int dx \cdot x^{n-1} e^{ax};$$

ed applicando la medesima trasformazione di sopra all'integrale del secondo membro, verrà

$$\int x^n e^{ax} . dx = \frac{x^n e^{ax}}{a}\left[1 - \frac{n}{ax} + \frac{n(n-1)}{a^2 x^2} - \ldots\right.$$

$$\left. \pm \frac{n(n-1) \ldots 3 \cdot 2 \cdot 1}{a^n x^n}\right]$$

$$+ C.$$

92. Possiamo ancora giungere ad un altro sviluppo di $\int a^x X dx$. Per eseguir ciò, facciamo

$$\int X dx = P,\quad \int P dx = Q,\quad \int Q dx = R,\quad \text{ec.},$$

e integrando per parti, avremo

$$\int a^x . X dx = a^x P - \int a^x \log a . P dx \ldots\ldots (113),$$

$$\int a^x \log a . P dx = a^x \log a . Q - \int a^x (\log a)^2 Q dx;$$

e sostituendo, l'equazione (113) diventerà

$$\int a^x . X dx = a^x P - a^x \log a . Q + \int a^x (\log a)^2 Q dx.$$

Continuando ad integrare per parti, avremo in generale

$$\int a^x X dx = a^x [P - Q \log a + R (\log a)^2 - \text{ec.}] \pm \int Z a^x (\log a)^n dx.$$

93. Se si applica la formula (111) al caso in cui $n=5$, operando come negli esempj di sopra trattati, si troverà

$$\int \frac{a^x dx}{x^5} = a^x \left[-\frac{1}{4x^4} - \frac{\log a}{3.4\,x^3} - \frac{\log a^2}{2.3.4.x^2} \right] - \frac{\log a^3}{2.3.4} \int \frac{a^x dx}{x}.$$

In generale, quando n è un numero intero positivo, la formula (110) dà sempre in un numero finito di termini l'integrale della funzione esponenziale, senza farlo dipendere da alcun altro integrale; ma quando n è un numero intero negativo, il che conduce alla formula (111), l'integrale generale dipende sempre dall'integrale particolare

$$\int \frac{a^x dx}{x} \ldots\ldots (114),$$

il cui valore, come quello dell'integrale del n.° 88

$$\int \frac{x^m dx}{\log x} \ldots\ldots (115),$$

non può ottenersi che con l'aiuto delle serie.

94. Per ottenere la generazione di questi due integrali particolari, poniamo nella funzione $a^x x^n dx$, invece di a^x il suo sviluppo (*Vedi* Logaritmi),

$$a^x = 1 + \frac{(\log a).x}{1} + \frac{(\log a)^2.x^2}{1.2} + \frac{(\log a)^3.x^3}{1.2.3} + \text{ec.}$$

troveremo, integrando inseguito ciascun termine in particolare,

$$\int a^x x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + \frac{x^{n+2}.\log a}{1.(n+2)} + \frac{x^{n+3}(\log a)^2}{1.2(n+3)} + \text{ec.} \ldots\ldots + C.$$

Questa serie che dà, per tutti i valori positivi di n l'integrale della funzione esponenziale generale, deve ricevere una modificazione nel caso di n negativa, e questa modificazione consiste nel sostituirvi il termine $\frac{x^{-n+n}}{-n+n}$ con $\log x$. Poichè

questo termine si ottiene allora dall' integrazione di

$$\frac{dx}{x^{-n+n+1}},$$

che dà

$$\int\frac{dx}{x}=\log x.$$

Avendo riguardo a questa particolarità, si ottiene, facendo $n=-1$,

$$\int\frac{a^x dx}{x}=\log x+\frac{x\log a}{1.1}+\frac{x^2(\log a)^2}{1.2.2}+\frac{x^3(\log a)^3}{1.2.3.3}+\text{ec.}\ldots+C.$$

95. Lo sviluppo dell' integrale (114), conduce a quello dell' integrale (115), riportando quest' ultimo alla forma più semplice $\int\frac{dz}{\log z}$, il che si fa ponendo $x^{m+1}=z$, poichè allora si ha

$$x^m dx=\frac{dz}{m+1},\qquad \log x=\frac{\log z}{m+1},$$

e per conseguenza

$$\int\frac{x^m dx}{\log x}=\int\frac{dz}{\log z}.$$

Supponiamo ora $z=a^{x'}$, ne resulta (*Vedi* Logaritmo)

$$\log z=\log(a^{x'})=x'\log a,$$

donde

$$x'=\frac{\log z}{\log a},$$

e

$$\log x'=\log\frac{\log z}{\log a}=\log.\log z-\log.\log a,$$

si ha dunque

$$\int\frac{a^{x'}dx'}{x'}=\int\frac{dz}{\log z},$$

e, sostituendo, tutti questi valori nello sviluppo precedente, si ottiene

$$\int\frac{dz}{\log z}=\log.\log z+\frac{\log z}{1}+\frac{1}{2}.\frac{(\log z)^2}{1.2}+\frac{1}{3}.\frac{(\log z)^3}{1.2.3}+\text{ec.}\ldots+C;$$

$\log.\log a$ si trova compreso nella costante C.

96. Se nell' equazione $\frac{du}{u}=d\log u$, o piuttosto $du=ud\log u$, si fa $u=x^y$,

si avrà

$$dx^y = x^y d \log x^y;$$

così tutte le volte che potremo decomporre una differenziale in due valori di cui l'uno sia rappresentato da x^y, e l'altro da $d \log x^y$, l'integrale sarà $x^y + C$.

97. L'integrazione per parti può ancora applicarsi a integrare l'espressione $X dx (\log x)^n$; poichè se si rappresenta con $X_{,}$ l'integrale di $X dx$, si avrà

$$\int X dx (\log x)^n = X_{,}(\log x)^n - n \int \frac{X_{,}}{x} dx (\log x)^{n-1}.$$

Si farà dipendere quindi quest' ultimo integrale da un altro, della forma $\int X_{,,} dx (\log x)^{n-2}$, e così di seguito.

98. L'integrazione delle quantità che contengono seni e coseni dipendendo dalla possibilità di sviluppare $\cos^2 x$, $\cos^3 x$, $\cos^4 x$, ec., in funzioni dall' espressione $\cos x$, $\cos 2x$, $\cos 3x$, ec., faremo conoscere come si può giungervi con la sola Trigonometria.

In questo punto però avanti di sviluppare ciò, daremo la dimostrazione di una formula immaginaria degna di osservazione, che ben tosto impiegheremo; e quindi una formola elegantissima, la quale dà il valore di una potenza di un coseno in funzione delle quantità $\cos x$, $\cos 2x$, $\cos 3x$, ec., avvertendo che, come vedremo, una formula analoga ha luogo ancora per il seno.

Sia dunque l'espressione $\cos^2 \varphi + \operatorname{sen}^2 \varphi$, la quale è il prodotto di due fattori $\cos \varphi + \operatorname{sen} \varphi \sqrt{-1}$, e $\cos \varphi - \operatorname{sen} \varphi \sqrt{-1}$; se facciamo $\cos \varphi + \operatorname{sen} \varphi \sqrt{-1} = F\varphi$, avremo differenziando

$$\frac{dF\varphi}{d\varphi} = -\operatorname{sen} \varphi + \cos \varphi \sqrt{-1};$$

quest' equazione essendo moltiplicata per $-\sqrt{-1}$, diventa

$$-\frac{dF\varphi}{d\varphi}\sqrt{-1} = \operatorname{sen} \varphi \sqrt{-1} + \cos \varphi;$$

e poichè per ipotesi il suo secondo membro è eguale a $F\varphi$, abbiamo

$$-\frac{dF\varphi}{d\varphi}\sqrt{-1} = F\varphi;$$

donde si deduce

$$\frac{dF\varphi}{F\varphi} = -\frac{d\varphi}{\sqrt{-1}} = -\frac{d\varphi}{\sqrt{-1}} \cdot \frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}} = d\varphi \sqrt{-1};$$

e integrando, si trova

$$\log F\varphi = \varphi \sqrt{-1} = \left(\varphi \sqrt{-1}\right) \log e = \log e^{\varphi \sqrt{-1}};$$

passando ai numeri, si ha

$$F\varphi = e^{\varphi\sqrt{-1}},$$

e mettendo per Fφ il suo valore, si ottiene

$$\cos\varphi + \text{sen}\,\varphi\sqrt{-1} = e^{\varphi\sqrt{-1}} \quad \ldots\ (116).$$

Quest' eqozzione avendo loogo, qualonqoe sia φ, si potrà cangiare φ in $m\varphi$, e si avrà ancora

$$\cos m\varphi + \text{sen}\,m\varphi\sqrt{-1} = e^{m\varphi\sqrt{-1}}.$$

Esiste un'altra espressione di qoesta potenza immaginaria di e; poichè l'equazione (116), essendo elevata alla potenza m, ci dà

$$\left(\cos\varphi + \text{sen}\,\varphi\sqrt{-1}\right)^m = e^{(\varphi\sqrt{-1})^m} = e^{m\varphi\sqrt{-1}}.$$

I secondi membri di quest' ultime equazioni essendo i medesimi, si ha, eguagliando i primi,

$$\left(\cos\varphi + \text{sen}\,\varphi\sqrt{-1}\right)^m = \cos m\varphi + \text{sen}\,m\varphi\sqrt{-1}\ \ldots\ldots\ (117);$$

se facciamo $\varphi = -\varphi$ nell' equazioni (116) e (117), quest' equazioni diventeranno

$$\cos -\varphi + \text{sen} -\varphi\sqrt{-1} = e^{-\varphi\sqrt{-1}}\ \ldots\ldots\ (118),$$

$$\left(\cos -\varphi + \text{sen} -\varphi\sqrt{-1}\right)^m = \cos -m\varphi + \text{sen} -m\varphi\sqrt{-1}\ \ldots\ (119).$$

Ora, se φ è rappresentato dall' arco AD (*Tav.* CL, n.° 5), $-\varphi$ lo sarà da AD'; e siccome questi archi hanno i medesimi coseni, e i seni di segni contrari, si avrà

$$\cos -\varphi = \cos\varphi, \qquad \text{sen} -\varphi = -\text{sen}\,\varphi;$$

si proverebbe egualmente, che

$$\cos -m\varphi = \cos m\varphi, \quad \text{e che} \quad \text{sen} -m\varphi = -\text{sen}\,m\varphi;$$

sostituendo questi valori nell' equazioni (118) e (119), si otterrà

$$\cos\varphi - \text{sen}\,\varphi\sqrt{-1} = e^{-\varphi\sqrt{-1}}\ \ldots\ (120),$$

$$\left(\cos\varphi - \text{sen}\,\varphi\sqrt{-1}\right)^m = \cos m\varphi - \text{sen}\,m\varphi\sqrt{-1}\ \ldots\ (121).$$

Cerchiamo ora lo sviluppo di $\cos^m x$ in funzione degli archi multipli di x, senza impiegare le potenze dei seni e dei coseni. A quest' effetto, siano

$$\cos x + \operatorname{sen} x \sqrt{-1} = u \ldots\ldots (122),$$

$$\cos x - \operatorname{sen} x \sqrt{-1} = t \ldots\ldots (123);$$

quest' equazioni, essendo aggiunte, danno

$$\cos x = \frac{1}{2}\left(u + t\right),$$

e per conseguenza

$$\cos^m x = \frac{1}{2^m}\left(u + t\right)^m, \quad \cos^m x = \frac{1}{2^m}\left(t + u\right)^m;$$

sviluppando questi binomi con la formula solita, si ottiene

$$\cos^m x = \frac{1}{2^m}\left[u^m + m u^{m-1} t + m\frac{(m-1)}{2} u^{m-2} t^2 + \ldots\ldots\right],$$

$$\cos^m x = \frac{1}{2^m}\left[t^m + m t^{m-1} u + m\frac{(m-1)}{2} t^{m-2} u^2 + \ldots\ldots\right];$$

aggiungendo quest' equazioni, si trova

$$2^{m+1}\cos^m x = u^m + t^m + mut\left(u^{m-2} + t^{m-2}\right)$$

$$+ m\frac{(m-1)}{2} u^2 t^2\left(u^{m-4} + t^{m-4}\right) + \text{ec.} \ldots\ldots (124).$$

Si ricava dalle formule (122) e (123)

$$u^m = \left(\cos x + \operatorname{sen} x \sqrt{-1}\right)^m,$$

$$t^m = \left(\cos x - \operatorname{sen} x \sqrt{-1}\right)^m;$$

mettendo nei secondi membri di quest' equazioni i loro valori dati dalle formule (117) e (121), si ha

$$\left.\begin{aligned} u^m &= \cos mx + \operatorname{sen} mx \sqrt{-1} \\ t^m &= \cos mx - \operatorname{sen} mx \sqrt{-1} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (125);$$

dunque

$$u^m + t^m = 2\cos mx\,, \quad \text{e} \quad u^m t^m = 1,$$

e per conseguenza

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ut = 1\,,$$

$$u^{m-2}+t^{m-2}=2\cos(m-2)x\,,\quad u^{m-2}t^{m-2}=1\,,$$

$$u^{m-4}+t^{m-4}=2\cos(m-4)x\,,\quad u^{m-4}t^{m-4}=1\,,$$

$$\text{ec.}\qquad\qquad \text{ec.}\qquad\qquad \text{ec.}$$

Sostituendo questi valori nell'equazione (124), si troverà

$$\cos^m x = \frac{1}{2^{m+1}}\Big[2\cos mx + 2m\cos(m-2)x$$

$$+ 2m\frac{(m-1)}{1\,.\,2}\cos(m-4)x + \text{ec.}\ldots\ldots\Big]\ldots\ldots(126).$$

Questo sviluppo provenendo da quello di $(u+t)^m$, contiene $m+1$ termini; se facciamo successivamente $m=2$, $m=3$, $m=4$, ec., e che si cangi i coseni degli archi negativi in positivi, in virtù dell'equazione $\cos-\varphi=\cos\varphi$, si formeranno i seguenti valori:

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{2}\,,$$

$$\cos^3 x = \frac{\cos 3x}{4} + \frac{3\cos x}{4}\,,$$

$$\cos^4 x = \frac{\cos 4x}{8} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{3}{8}\,,$$

$$\text{ec.}\qquad \text{ec.}$$

Possiamo abbreviare questi calcoli, poichè i termini egualmente distanti dall'estremità della serie, sono eguali. Per dimostrarlo osserveremo che i coseni che entrano nell'equazione (126), essendo

$$\cos mx,\quad \cos(m-2)x,\quad \cos(m-4)x,\quad \cos(m-6)x,\ \text{ec.},$$

o piuttosto

$$\cos mx,\quad \cos(m-2\times 1)x,\quad \cos(m-2\times 2)x$$

$$\cos(m-2\times 3)x,\quad \text{ec.},$$

considerando i numeri che seguono il segno $\times$ in ciascun termine della serie, si vede che uno di questi numeri indica quello dei termini precedenti. Così il termine che ne ha n avanti di lui, sarà affetto da $\cos(m-2n)x$. Riguardo al termine che ne ha n dopo di esso, siccome il numero totale dei termini delle serie è $m+1$, quello che ne ha n dopo terrà il posto $m+1-n$, e per conseguenza, avrà $m-n$ termini avanti di esso; dunque questo conterrà l'espressione

$$\cos[m-2(m-n)]\,x = \cos(-m+2n)x\,;$$

e siccome abbiamo veduto che si aveva il diritto di cangiare il segno dell'arco di cui si ha il coseno, si avrà

$$\cos(-m+2n)x = \cos(m-2n)\,x\,;$$

dunqoe i termini egoalmeote distaoti dall'estremità della serie haono i medesimi coseni, e siccome hanno aoaora i medesimi eoefficieoti, poichè qoesti coefficieoti sono quelli della formula del hioomio, ne resulta che questi termioi sooo eguali. Così, quando m è impari, il numero $m+1$ dei termini della serie sarà pari, e basterà di raddoppiare gli $\frac{m+1}{2}$ primi termioi, per avere la totalità dei termini della serie; se m è pari, $m+1$ sarà impari, allora si agginngerà al termioe di mezzo, il doppio di quelli ehe lo preeederaooo. Questo termine terrà il posto $\frac{m}{2}+1$ nella serie, e, per consegueoza, esso sarà affetto da

$$\cos(m-m)=\cos 0=1;$$

duoqoe esso oon conterrà coseno.

Coo nn processo analogo, possiamo trovare lo sviluppo di $\text{seo}^m x$. A quest'effetto, sottraeodo l'equazione (123) dall'equazione (122), si trova

$$2\,\text{seo}\,x\sqrt{-1}=u-t,$$

donque

$$\text{sen}\,x=\frac{u-t}{2\sqrt{-1}};$$

elevaodo i due membri di qoest'equazione alla potenza m, si avrà

$$\text{seo}^m x=\frac{1}{(2\sqrt{-1})^m}(u-t)^m;$$

se m è eguale a nn nomero pari $2p$, si ha

$$(u-t)^{2p}=[(u-t)^2]^p=[(t-u)^2]^p=(t-u)^{2p};$$

dunque

$$(u-t)^m=(t-u)^m.$$

Si svilopperanno l'eqoazioni

$$\text{sen}^m x=\frac{1}{(2\sqrt{-1})^m}(u-t)^m,$$

e

$$\text{sen}^m x=\frac{1}{(2\sqrt{-1})^m}(t-u)^m,$$

e operando come sopra, troveremo

$$\text{sen}^m x=\frac{1}{(2\sqrt{-1})^m}\left[\cos mx-m\cos(m-2)x+m\frac{(m-1)}{1.2}\cos(m-4)x+\text{ec.}\right];$$

la qnaotità immagioaria $\left(2\sqrt{-1}\right)^m$ sparirà dal risoltamento, poichè essa è elevata ad una potenza pari.

Se m è eguale ad un numero impari $2p+1$, si avrà

$$(u-t)^{2p+1} = (u-t)^{2p} \times (u-t) = (t-u)^{2p} \times -(t-u) = -(t-u)^{2p+1},$$

per conseguenza

$$(u-t)^m = -(t-u)^m,$$

e

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{sen}^m x = \dfrac{(u-t)^m}{(2\sqrt{-1})^m} \\ \operatorname{sen}^m x = -\dfrac{(t-u)^m}{(2\sqrt{-1})^m} \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots (127),$$

sviluppando $(u-t)^m$ e $t-u)^m$, con la formola del binomio, e sostituendo questi sviluppi nell'equazioni (127), che si aggiungeranno, si avrà

$$2\operatorname{sen}^m x = \frac{1}{(2\sqrt{-1})^m}\left[u^m - t^m - \frac{m}{1}ut(u^{m-2} - t^{m-2}) + \text{ec.}\ldots\right]\ldots (128),$$

sottraendo l'equazioni (125) l'una dall'altra, moltiplicando quindi insieme queste medesime equazioni, e osservando che la seconda operazione ci dà la somma dei quadrati di sen mx e di cos mx, che equivale all'unità, si troverà

$$u^m - t^m = 2\operatorname{sen} mx\sqrt{-1}, \quad u^m t^m = 1,$$

operando come sopra, si cangerà dunque l'equazione (128), in

$$\operatorname{sen}^m x = \frac{1}{2(2\sqrt{-1})^{m-1}}\left[\operatorname{sen} mx - \frac{m}{1}\operatorname{sen}(m-2)x\right.$$

$$\left. + \frac{m(m-1)}{1.2}\operatorname{sen}(m-4)x + ec.\right].$$

Siccome in quest'ipotesi m è impari, la potenza $m-1$, alla quale la quantità $2\sqrt{-1}$ è elevata, è pari, il che fa sparire l'immaginario $\sqrt{-1}$.

99. Premesso ciò facciamo conoscere come con la sola Trigonometria possiamo sviluppare, $\cos^2 x$, $\cos^3 x$, $\cos^4 x$, ec., in funzioni dell'espressioni $\cos x$, $\cos 2x$, $\cos 3x$, ec.

Prendiamo la formula conosciuta

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \ldots\ldots (129),$$

se in questa si fa $a=b$, si avrà

$$\cos 2a = \cos^2 a - \operatorname{sen}^2 a = \cos^2 a - (1-\cos^2 a) = 2\cos^2 a - 1,$$

si deduce da ciò

$$\cos^2 a = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2a;$$

moltiplicando quest'equazione per $\cos a$, essa diventa

$$\cos^3 a = \frac{1}{2} \cos a + \frac{1}{2} \cos a \cos 2a \ . \ . \ . \ (130).$$

Ora, se all' equazione (129) si aggiunge la seguente:

$$\cos(b-a) = \cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b,$$

si otterrà

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} \cos(a+b) + \frac{1}{2} \cos(b-a);$$

facendo $b = 2a$, si avrà

$$\cos a \cos 2a = \frac{1}{2} \cos 3a + \frac{1}{2} \cos a\ ;$$

eliminando $\cos a \cos 2a$, tra quest' equazione e l' equazione (130), si troverà

$$\cos^3 a = \frac{3}{4} \cos a + \frac{1}{4} \cos 3a.$$

Si calcolerebbero con lo stesso processo le potenze superiori di $\cos a$.

100. Stabiliti questi preliminari passiamo direttamente all' integrazione delle funzioni circolari.

Proponiamoci d' integrare la funzione

$$\varphi x \, . \, dx \, . \operatorname{arc}(\operatorname{sen} = x).$$

Ora osservando che, mediante l' espressione (62), si ha

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = d\left[\operatorname{arc}(\operatorname{sen} = x)\right],$$

si vede che l' integrale, il quale contiene un arco di circolo, può sempre ottenersi facilmente col processo dell'*integrazione per parti*, quando $\varphi x \, . \, dx$ è una differenziale elementare, poichè facendo $\int \varphi x \, . \, dx = \mathrm{U}$, e $\operatorname{arc}(\operatorname{sen} = x) = \mathrm{V}$, questo processo dà

$$\int \varphi x \, . \, dx \ . \operatorname{arc}\left(\operatorname{sen} = x\right) = \mathrm{U} \ . \operatorname{arc}\left(\operatorname{sen} = x\right) - \int \mathrm{U} d\mathrm{V}$$

$$= \mathrm{U} \ . \operatorname{arc}\left(\operatorname{sen} = x\right) - \int \frac{\mathrm{U} dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

L' ultimo integrale è compreso in quelli che abbiamo trattato di sopra.

Sia, per esempio, $\varphi x dx = x^m dx$, ne resulta

$$\mathrm{U} = \int x^m \, dx = \frac{x^{m+1}}{m+1},$$

e per conseguenza

$$\int x^m dx \, . \operatorname{arc}\left(\operatorname{sen} = x\right) = \frac{\operatorname{arc}(\operatorname{sen} = x) \, . \, x^{m+1}}{m+1}$$

$$- \frac{1}{m+1} \int \frac{x^{m+1} dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

101. Quanto alle differenziali che non contengono l'*arco* immediatamente, ma il suo seno, o il suo coseno, o la sua tangente, ec., partendo dalle differenziali primitive (*Vedi* DIFFERENZIALE n.i 46 e 49).

$$d \operatorname{sen} x = \cos x \,.\, dx,$$

$$d \cos x = -\operatorname{sen} x \,.\, dx,$$

dalle quali si deduce

$$d \operatorname{sen} mx = m \cos mx \,.\, dx,$$

$$d \cos mx = -m \operatorname{sen} mx \,.\, dx,$$

$$d \operatorname{tang} mx = \frac{mdx}{(\cos mx)^2},$$

$$d \cot mx = -\frac{mdx}{(\operatorname{sen} mx)^2},$$

$$d \sec mx = \frac{m \operatorname{sen} mx \,.\, dx}{(\cos mx)^2},$$

$$d \operatorname{cosec} mx = -\frac{m \cos mx \,.\, dx}{(\operatorname{sen} mx)^2},$$

si trova

$$\int dx \cos mx = \frac{1}{m} \operatorname{sen} mx + C,$$

$$\int dx \operatorname{sen} mx = -\frac{1}{m} \cos mx + C,$$

$$\int \frac{dx}{(\cos mx)^2} = \frac{1}{m} \operatorname{tang} mx + C,$$

$$\int \frac{dx}{(\operatorname{sen} mx)^2} = -\frac{1}{m} \cot mx + C,$$

$$\int \frac{dx \,.\, \operatorname{sen} mx}{(\cos mx)^2} = \frac{1}{m} \sec mx + C,$$

$$\int \frac{dx \,.\, \cos mx}{(\operatorname{sen} mx)^2} = -\frac{1}{m} \operatorname{cosec} mx + C,$$

$$= -\frac{1}{m \operatorname{sen} mx} + C.$$

Questi sei integrali danno i mezzi di ottenere quelli di tutte le fonzioni razionali e intere del seno e del coseno.

Supponiamo che si voglia integrare $\cos^2 x \,.\, dx$: mettendo invece di $\cos^2 x$ il suo valore $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x$, (n.° 99), avremo

$$\int dx \,.\, \cos^2 x = \int \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x \right) dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \operatorname{sen} 2x + C.$$

102. Proponiamoci, per esempio, d' integrare $(\cos x)^m dx$. Abbiamo (n.° 98),

$$\left(\cos x\right)^m = \frac{1}{2^m}\left\{ \cos mx + m\cos\left(m-2\right)x + \frac{m(m-1)}{1.2}\cos\left(m-4\right)x + \text{ec.} \right\}.$$

Così, ponendo invece di $(\cos x)^m$ il suo sviluppo, avremo una serie di termini della forma

$$Adx . \cos(m-\mu)x,$$

la cui integrazione si effettuerà con la prima delle formule precedenti.

Se $m=4$, si trova

$$\left(\cos x\right)^4 = \frac{1}{16}\left\{ \cos 4x + 4\cos 2x + 6\cos 0 + 4\cos\left(-2\right)x + \cos\left(-4\right)x \right\},$$

ovvero, a motivo di $\cos 0 = 1$, e di $\cos(-\mu x) = \cos(\mu x)$

$$\left(\cos x\right)^4 = \frac{1}{16}\left\{ 2\cos 4x + 2.4\cos 2x + 6 \right\},$$

e per conseguenza,

$$\int dx\left(\cos x\right)^4 = \int\left[\frac{1}{8}\cos 4x . dx + \frac{1}{2}\cos 2x . dx + \frac{3}{8}dx\right]$$

$$= \frac{1}{32}\operatorname{sen} 4x + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x + \frac{3}{8}x + C.$$

Se si trattasse d' integrare $(\operatorname{sen} x)^m dx$, si procederebbe analogamente, sviluppando $(\operatorname{sen} x)^m$ con la formula conosciuta n.° 98.

103. Si troverà col processo che abbiamo adoprato al n.° 87,

$$\int dx . x^n \cos ax = \frac{x^n}{a}\left\{ \operatorname{sen} ax\left[1 - \frac{n(n-1)}{a^2x^2} + \text{ec.}\right.\right.$$

$$\left.\left. + \cos ax\left[\frac{n}{ax} - \frac{n(n-1)(n-2)}{a^3x^3} + \text{ec.}\right]\right\} + C.$$

$$\int dx . x^n \operatorname{sen} ax = -\frac{x^n}{a}\left\{\cos ax\left[1 - \frac{n(n-1)}{a^2x^2} + \text{ec.}\right] - \right.$$

$$\left. - \operatorname{sen} ax\left[\frac{n}{ax} - \frac{n(n-1)(n-2)}{a^3x^3} + \text{ec.}\right]\right\} + C.$$

L' integrazione per parti dando

$$\int dx . e^{ax}\cos bx = \frac{e^{ax}\cos bx}{a} + \frac{b}{a}\int dx . e^{ax}\operatorname{sen} bx,$$

$$\int dx . e^{ax}\operatorname{sen} bx = \frac{e^{ax}\operatorname{sen} bx}{a} - \frac{b}{a}\int dx . e^{ax}\cos bx,$$

si deduce da queste due equazioni

$$\int dx \,.\, e^{ax} \cos bx = \frac{a \cos bx + b \operatorname{sen} bx}{a^2+b^2} e^{ax} + C,$$

$$\int dx \,.\, e^{ax} \operatorname{sen} bx = \frac{a \operatorname{sen} bx - b \cos bx}{a^2+b^2} e^{ax} + C.$$

La conoscenza di questi due integrali metterebbe in grado d'integrare le differenziali $dx \,.\, x^n e^{ax} \cos bx$, e $dx \,.\, x^n e^{ax} \operatorname{sen} bx$, col processo del quale abbiamo fatto uso nel numero 100.

104. Esamineremo il caso più generale, cioè:

$$(\operatorname{sen} x)^m \,.\, (\cos x)^n \,.\, dx;$$

m potendo esser pari o impari, indichiamola con $2m$ nel primo caso, e con $2m+1$ nel secondo, la funzione da integrare sarà allora

$$(\operatorname{sen} x)^{2m} \,.\, (\cos x)^n \, dx,$$

ovvero

$$(\operatorname{sen} x)^{2m+1} \,.\, (\cos x)^n \, dx.$$

Ora,

$$(\operatorname{sen} x)^{2m} = (\operatorname{sen}^2 x)^m = (1 - \cos^2 x)^m,$$

così

$$\begin{aligned}(\operatorname{sen} x)^{2m} (\cos x)^n dx &= (1-\cos^2 x)^m (\cos x)^n \,.\, dx \\ &= (\cos x)^n dx - m(\cos x)^{n+2} \,.\, dx \\ &\quad + \frac{m(m-1)}{1 \,.\, 2}\left(\cos x\right)^{n+4} \,.\, dx \\ &\quad - \text{ec.} \ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

espressione il secondo membro della quale s'integrerà termine per termine, col precedente processo.

Si ha ancora

$$\begin{aligned}(\operatorname{sen} x)^{2m+1} \,.\, (\cos x)^n dx &= \operatorname{sen} x (\operatorname{sen} x)^{2m} (\cos x)^n dx \\ &= (1-\cos^2 x)^m \,.\, (\cos x)^n \,.\, \operatorname{sen} x dx \\ &= -(1-\cos^2 x)^m \,.\, (\cos x)^n \,.\, d\cos x.\end{aligned}$$

Facendo dunque $\cos x = z$, si cangerà il secondo membro di quest'espressione in

$$-(1-z^2)^m \,.\, z^n \,.\, dz,$$

che s'integrerà termine per termine, dopo avere sviluppato la potenza.

Possiamo ancora osservare che questa differenziale si riporta facilmente alle differenziali binomie. Infatti sia

$$dy = dx \,.\, \operatorname{sen}^m x \left(1 - \operatorname{sen}^2 x\right)^{\frac{n}{2}};$$

ponendo $\operatorname{sen} x = t$, si deduce

$$dx = \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}},$$

e quindi

$$dy = dt \cdot t^m \left(1-t^2\right)^{\frac{n-1}{2}}:$$

funzione che diventerebbe razionale se n fosse impari. Applichiamo immediatamente l'integrazione per parti a queste sorti di espressioni e consideriamo i casi di m ed n positivi e negativi.

1.° Se l'esponente m è positivo, si diminuirà quest'esponente senza aumentare n, osservando che

$$y = \int \operatorname{sen}^{m-1} x \cdot \cos^n x \cdot \operatorname{sen} x dx.$$

Dunque

$$y = -\frac{\operatorname{sen}^{m-1} x \cdot \cos^{n+1} x}{n+1} + \frac{m-1}{n+1} \int dx \operatorname{sen}^{m-2} x \cos^{n+2} x,$$

ovvero

$$y = -\frac{\operatorname{sen}^{m-1} x \cdot \cos^{n+1} x}{n+1} + \frac{m-1}{n+1} \left[\int dx \operatorname{sen}^{m-2} x \cos^n x - y \right],$$

equazione dalla quale si deduce

$$\int dx \operatorname{sen}^m x \cos^n x =$$

$$= -\frac{\operatorname{sen}^{m-1} x \cos^{n+1} x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n} \int dx \operatorname{sen}^{m-2} x \cos^n x.$$

2.° Se l'esponente n è positivo, si diminuirà quest'esponente senza aumentare m, impiegando la formula seguente, che si ottiene in un modo simile,

$$\int dx \operatorname{sen}^m x \cos^n x =$$

$$= \frac{\operatorname{sen}^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n} \int dx \operatorname{sen}^m x \cos^{n-2} x.$$

3.° Se l'esponente m è negativo, si osserverebbe che si deduce dalla prima equazione che abbiamo ottenuto

$$\int dx \operatorname{sen}^{m-2} x \cos^n x =$$

$$= \frac{\operatorname{sen}^{m-1} x \cos^{n+1} x}{m-1} + \frac{m+n}{m-1} \int dx \operatorname{sen}^m x \cos^n x;$$

e cangiando m in $-m+2$

$$\int dx \frac{\cos^n x}{\operatorname{sen}^m x} = -\frac{\cos^{n+1} x}{(m-1) \operatorname{sen}^{m-1} x} + \frac{m-n-2}{m-1} \int dx \frac{\cos^n x}{\operatorname{sen}^{m-2} x}.$$

4.° Finalmente, se l'esponente n fosse negativo, si osserverebbe egualmente, che la seconda dell'equazioni che abbiamo ottenuto, dà

$$\int dx \operatorname{sen}^m x \cos^{n-2} x =$$

$$= -\frac{\operatorname{sen}^{m+1} x \cos^{n-1} x}{n-1} + \frac{m+n}{n-1}\int dx \operatorname{sen}^m x \cos^n x\,;$$

e cangiando n in $-n+2$,

$$\int dx \frac{\operatorname{sen}^m x}{\cos^n x} = \frac{\operatorname{sen}^{m+1} x}{(n-1)\cos^{n-1} x} + \frac{n-m-2}{n-1}\int dx \frac{\operatorname{sen}^m x}{\cos^{n-2} x}.$$

105. Fra i casi particolari compresi nelle formole precedenti possiamo distinguere i seguenti:

$$\int dx \operatorname{sen}^m x = -\frac{\operatorname{sen}^{m-1} x \cos x}{m} + \frac{m-1}{m}\int dx \operatorname{sen}^{m-2} x,$$

$$\int dx \cos^n x = \frac{\operatorname{sen} x \cos^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n}\int dx \cos^{n-2} x,$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^m x} = -\frac{\cos x}{(m-1)\operatorname{sen}^{m-1} x} + \frac{m-2}{m-1}\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^{m-2} x},$$

$$\int \frac{dx}{\cos^n x} = \frac{\operatorname{sen} x}{(n-1)\cos^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{dx}{\cos^{n-2} x},$$

$$\int dx \frac{\operatorname{sen}^n x}{\cos^n x} = \int dx \operatorname{tang}^n x = \frac{\operatorname{tang}^{n-1} x}{n-1} - \int dx \operatorname{tang}^{n-2} x,$$

$$\int dx \frac{\cos^n x}{\operatorname{sen}^n x} = \int dx \cot^n x = -\frac{\cot^{n-1} x}{n-1} - \int dx \cot^{n-2} x.$$

106. Dalle riduzioni indicate nel n.° 104, si farà sempre dipendere l'integrazione delle differenziali della forma $dx \operatorname{sen}^m x \cos^n x$ dall'integrazione di altre differenziali della medesima forma, ma nelle quali gli esponenti m ed n non passeranno 1 e -1. E quando gli esponenti m ed n saranno numeri interi qualunque positivi o negativi, l'integrazione della differenziale proposta si troverà dipendere definitivamente dall'integrazione di una delle nove differenziali delle quali qui sotto diamo gl'integrali, cioè:

1 . . . . $\int dx = x + C$,

2 . . . . . $\int dx \operatorname{sen} x \cos x = \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 x + C$,

3 . . . . . $\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x \cos x} = \log \operatorname{tang} x + C$,

$$4 \ldots\ldots \int dx \operatorname{sen} x = -\cos x + C,$$

$$5 \ldots\ldots \int dx \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = -\log\cos x + C,$$

$$6 \ldots\ldots \int \frac{dx}{\operatorname{sen} x} = \log\operatorname{tang}\frac{x}{2} + C,$$

$$7 \ldots\ldots \int dx \cos x = \operatorname{sen} x + C,$$

$$8 \ldots\ldots \int dx \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = \log\operatorname{sen} x + C,$$

$$9 \ldots\ldots \int \frac{dx}{\cos x} = \log\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right).$$

Così, nel caso in cui m ed n sono numeri interi, otterremo sempre sotto forma finita l'integrale della differenziale di cui si tratta.

107. La differenziale

$$dx \operatorname{sen}^m x \cos^n x,$$

potendo integrarsi sotto forma finita quando m ed n sono interi, è evidente che operando come abbiamo fatto nel n.° 100 e seguenti, s'integrerà egualmente la differenziale

$$dx \,.\, x^r \operatorname{sen}^m x \cos^n x,$$

r essendo ancora un numero intero, o più generalmente la differenziale

$$dx \,.\, \mathrm{P} \operatorname{sen}^m x \cos^n x,$$

P indicando una funzione razionale e intera di x.

108. Finalmente, le formule trigonometriche possono ancora impiegarsi con vantaggio in certi casi. Per integrare, per esempio, $\operatorname{sen} mx \cos nx \,.\, dx$; siccome la Trigonometria ci dà

$$\operatorname{sen} a \cos b = \frac{1}{2}\operatorname{sen}\left(a+b\right) + \frac{1}{2}\operatorname{sen}\left(a-b\right);$$

paragonando l'espressione $\operatorname{sen} mx \cos nx$ a questa formula, si troverà

$$\operatorname{sen} mx \cos nx \,.\, dx = \frac{1}{2}\operatorname{sen}\left[\left(m+n\right)x\right].dx + \frac{1}{2}\operatorname{sen}\left[\left(m-n\right)x\right].dx,$$

e l'integrale sarà, n.° 101,

$$C - \frac{1}{2}\frac{\cos\left[(m+n)x\right]}{m+n} - \frac{1}{2}\frac{\cos\left[(m-n)x\right]}{m-n}.$$

109. Tutti gl' integrali presi lasciando la quantità variabile x interamente in-

determinata, si chiamano *integroli indefiniti*, essi debbono, come l'abbiamo detto, contenere una *costante arbitrario* per essere *completi*, ma quando si determina la variabile o che almeno si assegnano ad essa dei limiti, l'integrale prende allora il nome d'*integrole definito*. Per esempio, se l'integrale completo della funzione $\varphi x dx$, è

$$\int \varphi x . dx = fx + C,$$

fx indicando la funzione variabile risultante dall'integrazione, e che quest' integrale debba annullarsi pel valore $x=o$; la costante arbitraria si trova determinata dall'equazione

$$o = fo + C,$$

donde

$$C = -fa,$$

e l'integrale diventa

$$\int \varphi x . dx = fx - fa.$$

È evidente che sotto questa forma, l'integrale non è che la differenza tra il valore della funzione fx quando $x=o$, e quello che resulta, per questa funzione, da qualunque altro valore di x: per $x=b$, si ha allora

$$\int \varphi x . dx = fb - fa.$$

Ora, se ci si ferma a questo valore b di x, si dice che l' integrale $\int \varphi x . dx$ dev' esser preso da $x=o$, fino a $x=b$, ovvero che l'integrale comincia quando $x=o$, e finisce quando $x=b$. Questi due valori di x, a e b si chiamano, in questo caso, i *limiti* dell' integrale.

Il valore dall' *integrale definito* si trova dunque calcolando successivamente ciò che diviene la funzione variabile fx, dell' integrale indefinito $fx+C$, per i valori limiti $x=a$, $x=b$, e sottraendone quindi il primo risultamento dal secondo. Non vi è più bisogno di aggiungere costante arbitraria poichè essa è eliminata per mezzo della sottrazione.

Gl' integrali definiti costituiscono d' altra parte, come in seguito vedremo, un nuovo genere di funzioni il cui uso è molto esteso nell' analisi.

Per indicare un' integrale definito preso tra i limiti a e b, presentemente ci serviamo generalmente della notazione del Fourier, che e

$$\int_o^b \varphi x . dx.$$

L' Eulero ha impiegato la seguente, nelle sue opere,

$$\int \varphi x . dx \begin{bmatrix} x=a \\ x=b \end{bmatrix},$$

che è meno semplice.

Resulta da questa notazione che se o, b, c, sono tre valori differenti di x tali

che si abbia $c>b$, $b>a$, si avrà ancora

$$\int_a^c \varphi x \,.\, dx = \int_a^b \varphi x \,.\, dx + \int_b^c \varphi x \,.\, dx,$$

poichè quest' eguaglianza è la stessa cosa di

$$fc - fa = fb - fa + fc - fb = fc - fa.$$

110. se rappresentiamo con x_0 il *limite inferiore*, e x_ω il *limite superiore* dell' integrale, si vede da quello che precede che l' equazione

$$d \,.\, \mathrm{F}x = f(x) \,.\, dx,$$

conduce generalmente alla seguente

$$\int_{x^0}^{x_\omega} dx \,.\, f(x) = \mathrm{F}(x_\omega) - \mathrm{F}(x_0);$$

vale a dire che si ha il valore di un integrale definito sottraendo uno dall' altro i due valori che prende l' integrale indefinito quando diamo alla variabile i valori corrispondenti ai limiti inferiore e superiore tra i quali l' integrale definito deve prendersi.

111. Resulta da ciò che precede che si ottiene sempre facilmente il valore numerico di un' integrale definito $\int_{x_0}^{x_\omega} dx \,.\, f(x)$, quando possiamo ottenere sotto forma finita, o in serie convergente, la funzione $\mathrm{F}(x)$, la cui differenziale è $dx \,.\, f(x)$. Ciò non è sempre possibile, e quando non si può giungervi, siamo obbligati di calcolare il valore numerico di cui si tratta con metodi di approssimazione che in seguito esporremo. Nel caso in cui la funzione $\mathrm{F}(x)$ possa ancora ottenersi sotto forma finita, l' uso dei metodi di approssimazione è spesso preferibile alla ricerca diretta di questa funzione.

112. Le nozioni precedenti diventeranno assai sensibili se consideriamo, come nel corso dell' opera l' abbiamo fatto, la variabile x come l' ascissa, e la funzione $\mathrm{F}(x)$, o più generalmente $\mathrm{C}+\mathrm{F}(x)$, come l' ordinata di una curva. Una differenziale qualunque

$$d[\mathrm{C}+\mathrm{F}(x)] = f(x) \,.\, dx$$

di questa funzione, rappresenta l' accrescimento infinitamente piccolo dell' ordinata, quando si passa dall' ascissa x all' ascissa $x+dx$. La somma di questi accrescimenti dell' ordinata, che hanno luogo da un dato valore x_0 di x fino ad un altro valore x_ω, è evidentemente eguale all' eccesso dell' ordinata che corrisponde all' ultimo limite sopra l' ordinata che corrisponde al primo limite, cioè a $y_\omega - y_0$, ovvero,

$$\mathrm{F}(x_\omega) - \mathrm{F}(x_0).$$

113. Osserviamo, d' altra parte, che l' equazione precedente

$$\int_{x_0}^{x_\omega} dx \,.\, f(x) = \mathrm{F}(x_\omega) - \mathrm{F}(x_0),$$

nella quale $\mathrm{F}(x)$ è tale che si ha $d\mathrm{F}(x) = dx \,.\, f(x)$, non si applica ai casi in cui le funzioni $f(x)$ o $\mathrm{F}(x)$ diventerebbero infinite per un valore di x compreso

tra i limiti x_0 e x_ω dell' integrale definito. Infatti, quando si considera che un integrale qualunque rappresenta sempre la somma di un numero infinito di valori della differenziale, bisogna escludere i casi in cui le funzioni di cui si tratta prendessero valori infiniti.

Quando si domanda il valore di un integrale definito $\int_{x_0}^{x_\omega} dx . f(x)$, e che succede che la funzione $f(x)$ diventa infinita per un dato valore a di x compreso tra i limiti x_0 e x_ω dell' integrale, non possiamo in generale ottenere il valore cercato che dividendo l' integrale in due parti, la prima delle quali finisce, e di cui la seconda comincia al valore $x = a$, cioè considerando separatamente i due integrali definiti.

$$\int_{x_0}^{a} dx . f(x) \quad \text{e} \quad \int_{a}^{x_\omega} dx . f(x),$$

la cui somma darà il valore domandato. Questa somma avrà un valore infinito se le due parti hanno esse stesse valori infiniti e del medesimo segno, o se una solamente delle due parti è infinita. Essa avrà un valore indeterminato se le due parti hanno valori infiniti di segni contrari. Finalmente essa avrebbe un valore finito determinato, se le due parti avessero valori finiti.

Egualmente, se si trovasse tra i limiti x_0 e x_ω due valori a e a_1, per i quali $f(x)$ diventasse infinita, si dovrebbe dividere nella seguente maniera l' integrale definito proposto

$$\int_{x^0}^{a} dx\ f(x) + \int_{a}^{a_1} dx . f(x) + \int_{a_1}^{x_\omega} dx . f(x),$$

e determinare a parte il valore di ciascun termine. E così di seguito se il numero dei valori intermediari che rendono $f(x)$ infinita fosse più considerabile.

114. Resulta da ciò che precede, che equivale al medesimo cangiare il segno da cui un integrale definito è affetto, o rovesciare l' ordine dei limiti. Così

$$\int_{x_0}^{x_\omega} dx . f(x) = - \int_{x_\omega}^{x_0} dx . f(x).$$

Possiamo d'altra parte cangiare la variabile x che è sotto il segno d'integrazione definita, purchè si cangi nel medesimo tempo i limiti in modo da conservarle i medesimi valori assoluti. Se, per esempio, nell' espressione precedente, vogliamo sostituire invece di x una nuova variabile t, fissando tra queste due quantità la relazione qualunque $x = \varphi(t)$, dovremo invece di dx sostituire $d\varphi(t)$; e x_0, x_ω per i valori di t che si deducessero respettivamente dall' equazioni $x_0 = \varphi(t)$, $x_\omega = \varphi(t)$.

115. Osserviamo finalmente che la considerazione degli integrali definiti può servire a trovare lo sviluppo conosciuto sotto il nome di teorema del Taylor, e conduce a un' espressione osservabile della parte che si trascura arrestandoci a un numero determinato di termini. Per quello che abbiamo detto si avrà, qualunque sia la funzione f, purchè questa funzione sia continua tra i valori x e $x+h$ della variabile,

$$f(x+h) - fx = \int_{x}^{x+h} dx . f'(x),$$

$f'(x)$ indicando il coefficiente differenziale o la funzione derivata del prim'ordine della funzione $f(x)$. Ora possiamo sostituire nell'integrale definito del secondo membro x con $x+h-t$, indicando con t una nuova variabile, il che cangerà quest' integrale, avendo riguardo a ciò che abbiamo detto nel numero precedente, in

$$-\int_h^0 dt \,.\, f'(x+h-t),$$

ovvero

$$\int_0^h dt \,.\, f'(x+h-t);$$

dimodochè possiamo scrivere

$$f(x+h)-fx=\int_0^h dt \,.\, f'(x+h-t).$$

Premesso ciò, consideriamo l' integrale indefinito

$$\int dt \,.\, f'(x+h-t):$$

applicandogli il processo dell' integrazione per parti, troveremo successivamente

$$\int dt \,.\, f'(x+h-t)=t \,.\, f'(x+h-t)+\int dt \,.\, t \,.\, f''(x+h-t),$$

$$\int dt \,.\, t \,.\, f''(x+h-t)=\frac{t^2}{2} \,.\, f''(x+h-t)+\int dt \,.\, \frac{t^2}{2} \,.\, f'''(x+h-t),$$

$$\int dt \,.\, \frac{t^2}{2} f'''(x+h-t)=\frac{t^3}{2 \,.\, 3} \,.\, f'''(x+h-t)+\int dt \,.\, \frac{t^3}{2 \,.\, 3} \,.\, f^{\text{IV}}(x+h-t),$$

ec. ec. ec.

e per conseguenza

$$\int dt \,.\, f'(x+h-t)=t \,.\, f'(x+h-t)+\frac{t^2}{2} f''(x+h-t)+$$
$$+\frac{t^3}{2 \,.\, 3} f'''(x+h-t)+\ldots\ldots+$$
$$+\frac{t^{\mu-1}}{2 \,.\, 3 \,.\, 4 \ldots (\mu-1)} f^{\mu-1}(x+h-t)+$$
$$+\int dt \frac{t^{\mu-1}}{2 \,.\, 3 \,.\, 4 \ldots (\mu-1)} f^{\mu}(x+h-t).$$

Dunque prendendo l' integrale tra i limiti zero e h,

$$\int_0^h dt \,.\, f'(x+h-t) = hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) + \frac{h^3}{2\,.\,3} f'''(x)$$

$$+ \frac{h^4}{2\,.\,3\,.\,4} f^{\text{IV}}(x) + \dots\dots +$$

$$+ \frac{h^{\mu-1}}{2\,.\,3\,.\,4 \dots (\mu-1)} f^{\mu-1}(x) +$$

$$+ \int_0^h dt \frac{t^{\mu-1}}{2\,.\,3\,.\,4 \dots (\mu-1)} f^{\mu}(x+h-t)\,;$$

e sostituendo questo valore nell' equazione precedente, verrà

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) + \frac{h^3}{2\,.\,3} f'''(x) + \frac{h^4}{2\,.\,3\,.\,4} f^{\text{IV}}(x) + \dots$$

$$\dots + \frac{h^{\mu-1}}{2\,.\,3\,.\,4 \dots (\mu-1)} f^{\mu-1}(x) +$$

$$+ \int_0^h dt \frac{t^{\mu-1}}{2\,.\,3\,.\,4 \dots (\mu-1)} f^{\mu}(x+x-t).$$

Se si fa in quest' equazione $x = 0$ e quindi si scrive x invece di h, essa prenderà la forma

$$f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2} f''(0)$$

$$+ \frac{x^3}{2\,.\,3} f'''(0) + \frac{x^4}{2\,.\,3\,.\,4} f^{\text{IV}}(0) + \dots$$

$$+ \frac{x^{\mu-1}}{2\,.\,3\,.\,4 \dots (\mu-1)} f^{\mu-1}(0)$$

$$+ \int_0^x dt \frac{t^{\mu-1}}{2\,.\,3\,.\,4 \dots (\mu-1)} f^{\mu}(x-t).$$

Espressione la quale sotto la forma d' integrale definito determina completamente il valore della formula del Taylor.

116. Viceversa l' espressione generale dell' integrale definito

$$\int_a^b \varphi x \,.\, dx\,,$$

si deduce facilmente dal teorema del Taylor (*Vedi* DIFFERENZIALE n°. 60) poichè, indicando sempre con $f(x)$ la funzione variabile dell' integrale indefinito

$$\int \varphi x \,.\, dx = f(x) + \text{C},$$

si ha, in virtù di questo teorema, quando si aumenta x di una quantità m

$$f(x+m)=f(x)+\frac{df(x)}{dx}\cdot\frac{m}{1}+$$

$$+\frac{d^2f(x)}{dx^2}\cdot\frac{m^2}{1\cdot2}+\text{ec.}$$

donde

$$f(x+m)-f(x)=\frac{df(x)}{dx}\cdot\frac{m}{1}+$$

$$+\frac{d^2f(x)}{dx^2}\cdot\frac{m^2}{1\cdot2}+\text{ec.}\ \ldots\ (131).$$

Ma

$$\varphi x\cdot dx=df(x),$$

e per conseguenza

$$\varphi x=\frac{df(x)}{dx},\quad \frac{d\varphi x}{dx}=\frac{d^2f(x)}{dx^2},$$

$$\frac{d^2\varphi x}{dx^2}=\frac{d^3f(x)}{dx^3},\quad \frac{d^3\varphi x}{dx^3}=\frac{d^4f(x)}{dx^4},\ \text{ec.}$$

Così, sostituendo questi valori nell' equazione (131) e facendo $x=a$, e $m=b-a$, si otterrà

$$\int_a^b \varphi x dx=\varphi\dot{x}\cdot\frac{(b-a)}{dx}+\frac{d\varphi\dot{x}}{dx}\cdot\frac{(b-a)^2}{1\cdot2}+$$

$$+\frac{d^2\varphi\dot{x}}{dx^2}\,\frac{(b-a)^3}{1\cdot2\cdot3}\ \text{ec.}\ \ldots\ (132),$$

il punto posto sopra x indicando il valore a che bisogoa dare a questa variabile dopo le differenziazioni.

Si troverebbe un' altra espressiooe del medesimo integrale partendo da

$$f(x)-f(x-m),$$

e facendo quindi

$$x=b,\quad\text{e}\quad m=b-a.$$

Essa è

$$\int_a^b \varphi x.dx=\varphi\dot{x}\,\frac{(b-a)}{1}-\frac{d\varphi\dot{x}}{dx}\,\frac{(b-a)^2}{1\cdot2}+$$

$$+\frac{d^2\varphi\dot{x}}{dx^2}\cdot\frac{(b-a)^3}{1\cdot2\cdot3}-\text{ec.}\ \ldots\ (133),$$

il punto posto sopra l' x indica che in questo caso bisogna fare $x=b$, dopo le differenziazioni.

117. Le serie (132) e (133) in generale sono tanto più convergenti quanto la differenza $b-a$ è più piccola; quando questa differenza è troppo grande possiamo dividerla in un numero qualunque di parti capaci a formare delle differenze

sufficientemente piccole, e quindi si calcola a parte il valore dell' integrale relativo a ciascuna di queste differenze.

118. Abbiamo veduto che molte espressioni differenziali non erano integrabili che dopo essere stata ridotta in serie, e che a quest' effetto; indicando con $\varphi x dx$ una differenziale nella quale φx è una funzione qualunque di x, bisognava preliminarmente ridurre in serie la funzione che è rappresentata da φx, e integrare quindi, dopo aver sostituito questo sviluppo nella formula $\varphi x dx$.

La serie del Bernoulli ha il vantaggio di ridurre in serie $\int \varphi x dx$, avanti ancora che sia data la forma di φx; questa serie è nel calcolo integrale ciò che quella del Taylor è nel calcolo differenziale. Ecco in qual maniera si dimostra.

La funzione differenziale $\varphi x dx$ essendo decomposta nei suoi due fattori φx e dx, se s' integra il secondo, si ha, col processo dell' integrazione per parti,

$$\int \varphi x . dx = \varphi x . x - \int x d\varphi x,$$

e, per conseguenza, in virtù dello stesso processo,

$$\int x . d\varphi x = \int \frac{d\varphi x}{dx} . x dx$$

$$= \frac{1}{2} x^2 \frac{d\varphi x}{dx} - \frac{1}{2} \int x^2 . \frac{d^2 \varphi x}{dx},$$

$$\int x^2 . \frac{d^2 \varphi x}{dx} = \int \frac{d^2 \varphi x}{dx^2} . x^2 dx$$

$$= \frac{1}{3} x^3 \frac{d^2 \varphi x}{dx^2} - \frac{1}{3} \int x^3 . \frac{d^3 \varphi x}{dx^2},$$

$$\int x^3 . \frac{d^3 \varphi x}{dx^2} = \int \frac{d^3 \varphi x}{dx^3} . x^3 dx$$

$$= \frac{1}{4} x^4 \frac{d^3 \varphi x}{dx^3} - \frac{1}{4} \int x^4 . \frac{d^4 \varphi x}{dx^3},$$

$$\int x^4 . \frac{d^4 \varphi x}{dx^3} = \int \frac{d^4 \varphi x}{dx^4} . x^4 dx$$

$$= \frac{1}{5} x^5 \frac{d^4 \varphi x}{dx^4} - \frac{1}{5} \int x^5 . \frac{d^5 \varphi x}{dx^4},$$

ec. = ec. . . . .

Sostituendo successivamente ciascuno di questi valori nel precedente, si otterrà

$$\int \varphi x . dx = \varphi x . \frac{x}{1} - \frac{d\varphi x}{dx} . \frac{x^2}{1.2} + \frac{d^2 \varphi x}{dx^2} . \frac{x^3}{1.2.3} - \text{ec.} \ldots (134).$$

Perchè l' integrale sia completo, bisogna aggiungere una costante a questo sviluppo.

119. Una funzione qualunque differenziale dell'ordine m, è rappresentata da

$$\varphi x \,.\, dx^m.$$

Così indicando con fx, l'integrale di questa funzione, si ha l'equazione

$$d^m fx = \varphi x \,.\, dx^m,$$

e, per ottenere il valore di fx, bisogna effettuare m integrazioni successive sopra la funzione $\varphi x \,.\, dx^m$, poichè si ha evidentemente

$$d^{m-1} fx = \int \varphi x \,.\, dx^m,$$

$$d^{m-2} fx = \int\int \varphi x \,.\, dx^m,$$

$$d^{m-3} fx = \int\int\int \varphi x \,.\, dx^m,$$

$$\text{ec.} = \text{ec.};$$

donde si vede che a ciascuna integrazione si diminuisce di un'unità l'ordine della differenziale di fx, e che dopo m operazioni, si ottiene

$$fx = \int^m \varphi x \,.\, dx^m.$$

Se, per esempio, la funzione proposta fosse $x^m dx^3$, una prima integrazione darebbe

$$\int x^m dx^3 = dx^2 \int x^m dx = dx^2 \frac{x^{m+1}}{m+1} + dx^2\, \mathrm{C},$$

perchè si considera dx, come una quantità costante; C d'altra parte essendo la costante arbitraria. Integrando una seconda volta si troverebbe

$$dx \int \left[\frac{x^{m+1}\, dx}{m+1} + \mathrm{C}\, dx\right] = dx \frac{x^{m+2}}{(m+1)(m+2)} +$$
$$+ dx \,.\, \mathrm{C}x + dx\, \mathrm{C}',$$

e, finalmente, integrando una terza volta, si otterrebbe

$$\int \left\{ \frac{x^{m+2} dx}{(m+1)(m+2)} + \mathrm{C}x dx + \mathrm{C}' dx \right\} =$$
$$= \frac{x^{m+3}}{(m+1)(m+2)(m+3)} + \frac{1}{2}\, \mathrm{C}x^2 + \mathrm{C}'x + \mathrm{C}'',$$

C', C'' essendo le costanti arbitrarie introdotte dalle due ultime integrazioni. Si ha dunque, in ultimo luogo

$$\int^3 x^m dx^3 = \frac{x^{m+3}}{(m+1)(m+2)(m+3)} + \frac{1}{2}\, \mathrm{C}x^2 + \mathrm{C}'x + \mathrm{C}''.$$

120. Si riportano gl'integrali degli ordini superiori a quelli del prim'ordine,

col processo tanto fecondo dell' integrazione per parti, operando come segue. Sia

$$\int \varphi x \, dx = fx\,;$$

si avrà

$$\int\int \varphi x \, dx^2 = \int fx \, dx,$$

ma

$$\int fx \, dx = fx \cdot x - \int x \, dfx$$

$$= x \int \varphi x \, dx - \int x \, \varphi x dx\,,$$

così

$$\int^2 \varphi x dx^2 = x \int \varphi x dx - \int x \, \varphi \, x dx.$$

Con l' aiuto di questo valore, possiamo in seguito trovare quelli di tutti gli altri ordini d' integrali, poichè sostituendolo in

$$\int^3 \varphi x dx^3 = \int dx \int^2 \varphi \, x dx^2\,,$$

viene

$$\int^3 \varphi \, x dx^3 = \int x dx \int \varphi \, x dx - \int dx \int x \, \varphi \, x dx\,;$$

ma

$$\int x dx \int \varphi x dx = \frac{1}{2} x^2 \int \varphi x dx - \frac{1}{2} \int x^2 \varphi x dx\,,$$

$$\int dx \int x \varphi x dx = x \int x \varphi x dx - \int x^2 \varphi \, x dx\,,$$

e, per conseguenza,

$$\int^3 \varphi x dx^3 = \frac{1}{2} \Big[x^2 \int \varphi x dx - 2x \int x \varphi x dx + $$

$$+ \int x^2 \varphi x dx \Big].$$

Continuando in questo modo si formerebbero i seguenti valori:

$$\int \varphi x dx = \int \varphi x dx\,,$$

$$\int^2 \varphi x dx^2 = \frac{1}{1} \Big[x \int \varphi \, x dx - \int x \varphi x dx \Big]\,,$$

$$\int^3 \varphi \, x dx^3 = \frac{1}{1 \, . \, 2} \Big[x^2 \int \varphi \, x dx - 2x \int x \varphi x dx + $$

$$+ \int x^2 \varphi x dx \Big]\,;$$

$$\int^4 \varphi x dx^4 = \frac{1}{1.2.3}\Big[x^3\int\varphi x dx - 3x^2\int x\varphi x dx$$

$$+ 3x\int x^2 \varphi x dx - \int x^3 \varphi x dx\Big],$$

ec. = ec.

E in generale

$$\int^m \varphi x dx^m = \frac{1}{1^{m-1|1}}\Big[x^{m-1}\int \varphi x dx$$

$$-\left(m-1\right)x^{m-2}\int x\varphi x dx$$

$$+\frac{(m-1)^{2|-1}}{1^{2|1}}x^{m-3}\int x^2\varphi x dx$$

$$-\frac{(m-1)^{3|-1}}{1^{3|1}}x^{m-4}\int x^3\varphi x dx$$

$$+ \text{ec.} \ldots\ldots \Big] \ldots\ldots\ldots\ldots (135).$$

Non bisogna dimenticarsi di aggiungere a ciascun integrale una costante arbitraria, perchè queste costanti sono affette da diverse potenze di x, e rimangono irriducibili tra loro. Per esempio per integrare con queste formole la funzione $x^m dx^3$, si farà, nella terza, $\varphi x = x^m$, e si troverà effettuando l'integrazione

$$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C,$$

$$\int x \,.\, x^m dx = \int x^{m+1}dx = \frac{x^{m+2}}{m+2} + C',$$

$$\int x^2 \,.\, x^m dx = \int x^{m+2}dx = \frac{x^{m+3}}{m+3} + C'',$$

sostituendo questi valori nella formola, verrà

$$\int^3 x^m dx^3 = \frac{1}{2}\Big[\frac{x^{m+3}}{m+1} + Cx^2 - \frac{2x^{m+3}}{m+2} - 2C'x$$

$$+ \frac{x^{m+3}}{m+3} + C''\Big],$$

ovvero

$$\int^3 x^m dx^3 = \frac{x^{m+3}}{(m+1)(m+2)(m+3)} + \frac{1}{2}Cx^2 - C'x + \frac{1}{2}C'',$$

perchè

$$\frac{x^{m+3}}{m+1} - \frac{2x^{m+3}}{m+2} + \frac{x^{m+3}}{m+3} = \frac{2x^{m+3}}{(m+1)(m+2)(m+3)}.$$

Questo valore dell' integrale in questione è identico con quello che abbiamo trovato nel precedente numero, poichè il segno della costante C' è arbitrario, e C'' o $-\frac{1}{2}$C'' indicano egualmente una costante arbitraria.

Ci contenteremo di quest' esempio che ci sembra sufficiente per indicare l' uso della formula (135) e di quelle che la precedono, e passeremo invece a parlare nuovamente degli integrali definiti, prima di parlare dell' integrazione delle funzioni di più variabili.

121. Sia un integrale definito, come

$$\int_a^b f(\alpha).d\alpha,$$

α essendo la variabile, $f(\alpha)$ una funzione qualunque di α, a e b due costanti. Questa formula si considera conformemente a quello che abbiamo veduto, come presentante un valore costante determinato: ce ne formiamo un' idea esattissima, concependo che essa esprima l' arco della curva di cui α fosse l' ascissa, e $f(\alpha)$ l' ordinata, quest' arco essendo compreso tra l' asse delle ascisse, la curva, e le ordinate corrispondenti alle ascisse $\alpha=a$ e $\alpha=b$. Potremo sempre ottenere in un modo esatto ovvero approssimato il valore della formula di cui si tratta, all' eccezione dei casi in cui l' ordinata $f(\alpha)$ diventerebbe infinita per uno o più valori di α compresi tra i limiti a e b: questi casi esigono spesso un esame speciale.

122. Osserveremo ora che un integrale definito può considerarsi sotto un punto di vista più esteso, ammettendo che la funzione indicata da $f(\alpha)$ contenga una quantità variabile x. L' espressione precedente diviene allora una funzione variabile di x, il cui valore dipende dalla forma delle funzione $f(\alpha)$, e dai limiti a e b. Infatti, quando l' integrazione definita indicata rapporto ad α è eseguita, questa quantità α è scomparsa, e non resta che una funzione contenente la sola variabile x.

La variabile x potrebbe ancora essere contenuta nell' espressione dei limiti indicati da a e b. Così l' espressione generale di un integrale definito rappresentante una funzione di x, è

$$X=\int_{\varphi x}^{\psi x} d\alpha.f(\alpha).$$

123. Proponiamoci di differenziare questa nuova specie di funzione, vale a dire di conoscere l' accrescimento dX corrispondente all' accrescimento infinitamente piccolo dx della variabile. Cominciando dal supporre che i limiti dell' integrale definito siano le costanti a e b, si avrà

$$X+dX=\int_a^b d\alpha\left[f(x,\alpha)+\frac{d.f(x,\alpha)}{dx}dx\right];$$

e

$$\frac{dX}{dx}=\int_a^b d\alpha.\frac{d.f(x,\alpha)}{dx}.$$

Se ora si ammette che i limiti siano φx e ψx, avremo

$$X+dX=\int_{\varphi x+\frac{d\varphi x}{dx}dx}^{\psi x+\frac{d.\psi x}{dx}dx} d\alpha\left(f\left(x,\alpha\right)+\frac{d.f(x,\alpha)}{dx}dx\right),$$

vale a dire

$$X+dX=\int_{\varphi x}^{\psi x} d\alpha\left[f\left(x,\alpha\right)+\frac{d.f(x,\alpha)}{dx}dx\right]$$

$$-\left[f\left(x,\varphi x\right)+\frac{d.f(x,\varphi x)}{dx}dx\right].\frac{d.\varphi x}{dx}dx$$

$$+\left[f\left(x,\psi x\right)+\frac{d.f(x,\psi x)}{dx}dx\right].\frac{d.\psi x}{dx}dx,$$

donde trascurando le quantità infinitamente piccole del second'ordine,

$$dX=\int_{\varphi x}^{\psi x} d\alpha.\frac{d.f(x,\alpha)}{dx}dx-f\left(x,\varphi x\right).\frac{d.\varphi x}{dx}dx$$

$$+f\left(x,\psi x\right)\frac{d.\psi x}{dx}dx;$$

e per consegnenza

$$\frac{dX}{dx}=\int_{\varphi x}^{\psi x} d\alpha.\frac{d.f(x,\alpha)}{dx}-f\left(x,\varphi x\right).\frac{d.\varphi x}{dx}$$

$$+f\left(x,\psi x\right).\frac{d.\psi x}{dx}.$$

124. Il risultamento precedente diventa sensibilissimo quando si rappresenta l' integrale definito

$$X=\int_{\varphi x}^{\psi x} d\alpha.f(x,\alpha),$$

come esprimente l' arco PMNQ (*Tav.* CL, *fig.* 6) della curva MN la cui ordinata è $f(x,\alpha)$, quest' area essendo presa tra le ascisse $OP=\varphi(x)$ e $OQ=\psi(x)$. 1.° Con la sola variazione di x in $f(x,\alpha)$, la curva si trasporta in *mn*, e l'area aumenta dello spazio M*mn*N rappresentato da

$$\int_{\varphi x}^{\psi x} d\alpha.\frac{d.f(x,\alpha)}{dx}dx.$$

2.° Mediante la sola variazione di x nel limite inferiore $\varphi(x)$, l'area diminuisce dello spazio PMP′ rappresentato da

$$f(x,\varphi x).\frac{d.\varphi x}{dx}dx.$$

3.° Finalmente mediante la sola variazione di x nel limite superiore $\psi(x)$, l' area aumenta dello spazio QNQ' rappresentato da

$$f(x, \psi x) \cdot \frac{d \cdot \psi x}{dx} dx.$$

La variazione simultanea di x nelle tre funzioni $f(x,\alpha)$, $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ cangia d' altra parte l' area PMNQ in P'M'N'Q'. La variazione totale di quest' area è dunque espressa dai tre termini della formula precedente, quando si trascurano gli spazj MmM' e NnN', i quali sono infinitamente piccoli del second' ordine.

125. Da ciò che precede si vede, che avendo l' eguaglianza

$$X = \int_a^b dx \cdot f(x,\alpha),$$

i limiti a, b supponendosi costanti, si ottiene il coefficieote differenziale del prim' ordioe della funzione X sostituendo sotto il segno $\int$ la funzione $f(x,\alpha)$, col coefficiente differenziale del prim' ordine di questa funzione preso rapporto ad x. È facile concluderne che se si moltiplicano i due membri di questa medesima eguaglianza per dx, e se s' integra da una parte e dall' altra, si avrà

$$\int X\, dx = \int_a^b dx \cdot \int dx \cdot f(x,\alpha).$$

Queste differenziazioni e iutegrazioni sotto il segno d' integrale definito danno il mezzo di determiuare i valori di certi integrali, partendo dai valori di altri integrali già conosciuti.

126. La determinazione dei valori degli integrali definiti, e lo studio delle relazioni che esistono tra questi valori, hanno molto occupato i geometri; ma sopra questo soggetto non possiamo presentare che alcuni cenni.

Quando l' iotegrazione indefinita della funzione che si trova sotto il segno $\int$ può effettuarsi, il valore dell' integrale definito proposto se ne deduce immediatamente. Basterà citare alcuni esempi semplicissimi d' integrali ottenuti in questo modo.

127. Poichè si ha

$$\int dx \cdot x^m = \frac{x^{m+1}}{m+1},$$

se ne conclude, supponendo l' esponente m positivo e maggiore dell' unità,

$$\int_0^1 dx \cdot x^m = \frac{1}{m+1},$$

e

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^m} = \infty.$$

128. L' equazioni

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\ \text{arco}\left(\text{tang} = \frac{x}{a}\right),$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \text{arco}\left(\text{sen} = \frac{x}{a}\right),$$

$$\int dx e^{ax} = \frac{e^{ax}}{a},$$

danno

$$\int_0^\infty \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{\pi}{2a},$$

$$\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{\pi}{2},$$

$$\int_0^\infty dx\,.\,e^{ax} = \infty\ ,\quad \int_0^\infty dx\,.\,e^{-ax} = \frac{1}{a}.$$

Siccome si ha, integrando per parti

$$\int dx\,.\,x^{a-1}\,.\,e^{-x} = -x^{a-1}\,.\,e^{-x} + (a-1)\int dx\,.\,x^{a-2}\,.\,e^{-x},$$

si trova, quando a è un numero intero positivo

$$\int_0^\infty dx\,.\,x^{a-1}\,.\,e^{-x} = 1\,.\,2\,.\,3\,.\,\ldots\ldots\,(a-1).$$

129. L' equazioni

$$\int dx\,.\,\text{sen}\,ax = -\frac{\cos ax}{a},$$

$$\int dx\,.\cos ax = \frac{\text{sen}\,ax}{a},$$

danno

$$\int_0^\pi dx\,.\,\text{sen}\,ax = \frac{1-\cos a\pi}{a},$$

$$\int_0^\pi dx\,.\cos ax = \frac{\text{sen}\,a\pi}{a}.$$

Così il valore del primo integrale è $\frac{2}{a}$ quando a è un numero intero impari, e zero quando a è un numero intero pari. Il secondo integrale è sempre eguale a zero quando a è un numero intero.

130. L' equazioni

$$\int dx \cdot x \operatorname{sen} ax = -\frac{x \cos ax}{a} + \frac{\operatorname{sen} ax}{a^2},$$

$$\int dx \cdot x \cos ax = \frac{x \operatorname{sen} ax}{a} + \frac{\cos ax}{a^2},$$

danno

$$\int_0^\pi dx \cdot x \operatorname{sen} ax = -\frac{\pi \cos a\pi}{a},$$

$$\int_0^\pi dx \cdot x \cos ax = \frac{\cos a\pi - 1}{a^2}.$$

Per conseguenza, secondo che a è intero impari o intero pari, il primo integrale è $+\frac{\pi}{a}$ ovvero $-\frac{\pi}{a}$; e il secondo integrale è $-\frac{2}{a^2}$ ovvero o.

131. Dall' equazioni

$$\int dx \cdot \operatorname{sen}^2 x = -\frac{\operatorname{sen} x \cos x}{2} + \frac{1}{2} x,$$

$$\int dx \cdot \cos^2 x = \frac{\operatorname{sen} x \cos x}{2} + \frac{1}{2} x,$$

si deduce

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \operatorname{sen}^2 x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \cos^2 x = \frac{\pi}{4};$$

e in generale, le formule di riduzione date n.° 105,

$$\int dx \cdot \operatorname{sen}^m x = -\frac{\operatorname{sen}^{m-1} x \cdot \cos x}{m} + \frac{m-1}{m} \int dx \cdot \operatorname{sen}^{m-2} x,$$

$$\int dx \cdot \cos^m x = \frac{\operatorname{sen} x \cdot \cos^{m-1} x}{m} + \frac{m-1}{m} \int dx \cdot \cos^{m-2} x,$$

conducono ai resultamenti seguenti: 1.° quando m è un numero intero pari,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \operatorname{sen}^m x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \cos^m x = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (m-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots m} \frac{\pi}{2};$$

2.° Quando m è un numero intero impari

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \operatorname{sen}^m x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \cos^m x = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots (m-1)}{3 \cdot 5 \cdot 7 \ldots m}.$$

Possiamo osservare che i valori degli integrali definiti

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \operatorname{sen}^m x, \quad \text{e} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \cos^m x,$$

tendono l'uno e l'altro verso zero a misura che il numero m aumenta, fintanto che questo numero è pari o impari. Dunque il rapporto di questi valori ha per limite l'unità: donde si conclude

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 8 \ldots}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 9 \ldots}.$$

Quest' espressione osservabilissima del numero π è stata data dal Wallis.

132. Le equazioni

$$\int dx \cdot e^{-ax} \cdot \operatorname{sen} bx = e^{-ax} \cdot \frac{-a \operatorname{sen} bx - b \cos bx}{a^2+b^2},$$

$$\int dx \cdot e^{-ax} \cdot \cos bx = e^{-ax} \cdot \frac{b \operatorname{sen} bx - a \cos bx}{a^2+b^2},$$

che si deducono dal n.° 103, danno

$$\int_0^\infty dx \cdot e^{-ax} \cdot \operatorname{sen} bx = \frac{a}{a^2+b^2},$$

$$\int_0^\infty dx \cdot e^{-ax} \cdot \cos bx = \frac{a^2+b^2}{a};$$

e possiamo osservare che a misura che la quantità indicata da x si avvicina a diventare zero, quest'espressioni si avvicinano continuamente ai limiti $\frac{1}{b}$ e zero. Tuttavia i valori degl'integrali

$$\int_0^\infty dx \operatorname{sen} bx, \quad \text{e} \quad \int_0^\infty dx \cdot \cos ax$$

sono necessariamente indeterminati.

133. Sarebbe inutile moltiplicare questi esempi poichè in casi simili la ricerca di cui si tratta non offre difficoltà. Ma i geometri hanno determinato, per il caso ancora in cui la funzione sotto il segno $\int$ non può essere integrata, i valori di un gran numero d'integrali definiti. I metodi adoprati per questa determinazione consistono principalmente: 1.° a dedurre i valori degl'integrali cercati da altri integrali digià conosciuti, per mezzo della differenziazione o dell'integrazione sotto il segno $\int$; 2.° a trovare tra la funzione che rappresenta l'integrale proposto e le sue differenziali delle relazioni che ne fanno conoscere la natura; 3.° a passare dall'espressioni reali alle espressioni immaginarie. La considerazione de-

gli integrali doppi ha egualmente fatto conoscere più risultamenti importanti. In questo punto presenteremo alcuni esempi propri a dare un' idea dei metodi di cui si tratta.

134. Se nell' equazione data n.° 127

$$\int_0^1 dx\, x^{m-1} = \frac{1}{m},$$

ove supporremo m maggiore dell' unità, si moltiplicano i due membri per dm, e che s' integri a cominciare da $m=n$, conformemente a quello che abbiamo veduto n.° 125, si troverà

$$\int_0^1 dx \frac{x^{m-1} - x^{n-1}}{dx} = \log \frac{m}{n}.$$

135. Riprendimo le equazioni del n.° 132

$$\int_0^\infty dx \,.\, e^{-ax} \,.\, \text{sen}\, bx = \frac{b}{a^2+b^2},$$

$$\int_0^\infty dx \,.\, e^{-ax} \,.\, \cos bx = \frac{a}{a^2+b^2}.$$

Moltiplicando per da, e integrando rapporto ad a cominciando da $a=c$, verrà

$$\int_0^\infty dx \,.\, \frac{e^{-cx} - e^{-ax}}{x}\, \text{sen}\, bx =$$

$$= \text{arc}\left(\text{tang} = \frac{a}{b}\right) - \text{arc}\left(\text{tang} = \frac{c}{b}\right).$$

$$= \text{arc}\left(\text{tang} = \frac{b(a-c)}{b^2+ac}\right),$$

$$\int_0^\infty dx \,.\, \frac{e^{-cx} - e^{-ax}}{x} \cos bx = \frac{1}{2} \log \frac{a^2+b^2}{c^2+b^2}.$$

136. Se si fa $c=0$ e $a=\infty$, quest' ultime equazioni danno

$$\int_0^\infty dx \frac{\text{sen}\, bx}{x} = \frac{\pi}{2},$$

e

$$\int_0^\infty dx \frac{\cos bx}{x} = \infty.$$

È osservabile che l' integrale

$$\int_0^\infty dx \frac{\text{sen}\, bx}{x},$$

è indipendente dal numero b. Infatti, supponendo $x = \frac{z}{b}$, quest' integrale si

cangia in

$$\int_0^\infty dz \frac{\operatorname{sen} z}{z},$$

ove b è scomparso

137. Sia l' integrale

$$\int_0^\infty dx \,.\, e^{-x^2}.$$

Moltiplicandolo per un altro integrale simile nel quale scriveremo y in luogo di x, avremo

$$\int_0^\infty dy \,.\, e^{-y^2} \,.\, \int_0^\infty dx \,.\, e^{-x^2} =$$

$$= \int_0^\infty dy \int_0^\infty dx \,.\, e^{-(x^2+y^2)}.$$

Poniamo ora $y = xt$, t essendo una nuova variabile. Qualunque sia x tra i limiti o e ∞, ai valori o e ∞ di y corrisponderanno egualmente dei valori o e ∞ di t, e d'altra parte si avrà $dy = x dt$.

L' espressione precedente si cangerà dunque in

$$\int_0^\infty dt \int_0^\infty dx \,.\, x \,.\, e^{-(1+t^2)x^2}.$$

Cominciando da effettuare l' integrazione rapporto ad x, essa diventerà

$$\frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{dt}{1+t^2};$$

e siccome $\int \frac{dt}{1+t^2} = \operatorname{arc}(\operatorname{tang} = t)$, e per conseguenza $\int_0^\infty \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}$, avremo definitivamente $\frac{1}{2} \,.\, \frac{\pi}{2}$ pel valore del quadrato dell' integrale

$$\int_0^\infty dx \,.\, e^{-x^2}.$$

Dunque

$$\int_0^\infty dx \,.\, e^{-x^2} = \frac{1}{2} \sqrt{\pi},$$

espressione che merita particolare osservazione, e la quale frequentemente s' impiega in molte applicazioni dell' analisi.

138. Consideriamo ora l' integrale

$$\mathrm{U} = \int_0^\infty dx \,.\, \cos rx \,.\, e^{-a^2x^2}.$$

Differenziando rapporto ad r, si trova

$$\frac{dU}{dr} = -\int_0^\infty dx.x \operatorname{sen} rx.e^{-a^2x^2}.$$

Ma integrando per parti, abbiamo

$$\int dx.x \operatorname{sen} rx.e^{-a^2x^2} = -\frac{1}{2a^2} \operatorname{sen} rx.e^{-a^2x^2}$$

$$+\frac{r}{2a^2}\int dx.\cos rx.e^{-a^2x^2},$$

donde si deduce, poichè il termine fuori del segno è nullo ai due limiti o e ∞,

$$\frac{dU}{dr} = -\frac{r}{2a^2}U.$$

Quest' equazione fa conoscere la natura della funzione U, la quale necessariamente è

$$U = A.e^{-\frac{r^2}{4a^2}},$$

A indicando una costante. Così abbiamo

$$\int_0^\infty dx.\cos rx.e^{-a^2x^2} = A.e^{-\frac{r}{4a^2}}.$$

Per determinare la costante A, si supporrà $r=0$, il che darà

$$\int_0^\infty dx.e^{-a^2x^2} = A.$$

Ora dall' equazione $\int_0^\infty dt.e^{-t^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$, ottenuta n.° 137, si deduce facendo $t=ax$,

$$\int_0^\infty dx.e^{-a^2x^2} = \frac{1}{2a}\sqrt{\pi} = A.$$

L' espressione dell' integrale proposto è dunque definitivamente

$$\int_0^\infty dx.\cos rx.e^{-a^2x^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2a}.e^{-\frac{r^2}{4a^2}}.$$

139. Sia ancora l' integrale

$$\int_0^\infty dx\frac{\cos ax}{1+x^2},$$

e cominciamo dal prendere per limite superiore $\frac{2k\pi}{a}$, k indicando un numero

intero. Scrivendo dunque

$$U = \int_0^{\frac{2k\pi}{a}} dx \frac{\cos ax}{1+x^2},$$

e differenziando due volte di seguito rapporto ad a, conformemente alla regola data n.° 123, verrà

$$\frac{dU}{da} = -\int_0^{\frac{2k\pi}{a}} dx \cdot \frac{x \operatorname{sen} ax}{1+x^2} + \frac{2k\pi}{a^2+4k^2\pi^2},$$

$$\frac{d^2U}{da^2} = -\int_0^{\frac{2k\pi}{a}} dx \cdot \frac{x^2 \cos ax}{1+x^2} + \frac{4k\pi a}{(a^2+4k^2\pi^2)^2},$$

donde si conclude

$$U - \frac{d^2U}{da^2} = \int_0^{\frac{2k\pi}{a}} dx \cos ax - \frac{4k\pi a}{(a^2+4k^2\pi^2)^2},$$

ovvero semplicemente (poichè l' integrale del secondo membro ha un valor nullo),

$$U - \frac{d^2U}{da^2} = -\frac{4k\pi a}{(a^2+4k^2\pi^2)^2}.$$

Ammettiamo ora che k sia un numero infinitamente grande, il secondo membro di quest' equazione diventerà infinitamente piccolo. Per conseguenza se U rappresenta l' integrale proposto, avremo

$$U = \frac{d^2U}{da^2}.$$

Quest' equazione determina la natura della funzione U, di cui l' espressione più generale è

$$Ae^{-a} + Be^{a},$$

A e B indicando due costanti arbitrarie. Ma è evidente che dobbiamo fare $B=0$, poichè il valore dell' integrale proposto non può crescere indefinitamente col numero a. Si ha dunque semplicemente

$$\int_0^{\infty} dx \frac{\cos ax}{1+x^2} = A \cdot e^{-a}.$$

Per determinare la costante A, si supporrà $a=0$, e siccome

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} = A,$$

viene definitivamente

$$\int_0^{\infty} dx \frac{\cos ax}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} e^{-a}.$$

140. Se invece di x si pone $\frac{x}{m}$ in quest' equazione, ed a invece di ma, essa si cangia in

$$\int_0^\infty dx \, \frac{\cos ax}{m^2 + x^2} = \frac{\pi}{2m} e^{-ma};$$

e differenziando rapporto ad a, si ha il resultamento non meno degno di osservazione

$$\int_0^\infty dx \frac{x \operatorname{sen} ax}{m^2 + x^2} = \frac{\pi}{2} e^{-ma}.$$

141. Per dare un esempio dell' uso degl' immaginari, prenderemo l' integrale

$$\int_{-\infty}^\infty dx \, . \cos 2rx \, . e^{-x^2}.$$

Ponendo $\cos 2rx$ col suo valore in esponenziali immaginari, esso diventerà

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty dx \, . e^{-x^2+2rx\sqrt{-1}} + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty dx \, . e^{-x^2-2rx\sqrt{-1}}$$

ovvero moltiplicando e dividendo per e^{-r^2}, per rendere gli esponenti di e sotto il segno $\int$ quadrati perfetti,

$$\frac{1}{2} e^{-r^2} \int_{-\infty}^\infty dx \, . e^{-(x-r\sqrt{-1})^2} + \frac{1}{2} e^{-r^2} \int_{-\infty}^\infty dx \, . e^{-(x+r\sqrt{-1})^2}.$$

Ma come abbiamo veduto al n.° 137,

$$\int_0^\infty dx \, . e^{-x^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\pi},$$

e per conseguenza

$$\int_{-\infty}^\infty dx \, . e^{-x^2} = \sqrt{\pi};$$

donde si conclude

$$\int_{-\infty}^\infty dx \, . e^{-(x+b)^2} = \sqrt{\pi};$$

qualunque sia la costante b. Dunque se si fa

$$b = \pm r\sqrt{-1};$$

l' espressione precedente dell' integrale proposto diventerà

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \,.\, \cos 2rx \,.\, e^{-x^2} = \sqrt{\pi} \,.\, e^{-r^2},$$

e si avrà per conseguenza

$$\int_{0}^{\infty} dx \,.\, \cos 2rx \,.\, e^{-x^2} = \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \,.\, e^{-r^2}.$$

Questo risultamento si accorda con quello che abbiamo ottenuto n.° 138.

Passiamo ora all' integrazione delle funzioni di due variabili.

142. I due metodi principali che s' impiegano per giungere a integrare le equazioni differenziali, che contengono due o un maggior numero di variabili, consistono 1.° Nella separazione delle variabili, per poter quindi applicarci i processi usati per una sola variabile; 2.° Nella ricerca dei fattori propri a rendere una differenziale esatta. Ed è in veduta di ciò che successivamente ci occuperemo di questi due metodi.

143. Abbiamo veduto che qualunque differenziale, per essere integrabile doveva essere della forma $\varphi x dx$; così, saremmo arrestati nell' integrazione di un' equazione, se essa contenesse termini tali come $y^2 dx$, $xydx$, $\frac{dx}{y}$, ec. Ciò non ostante non bisognerebbe concludere che l' integrazione è impossibile; poichè, se, con operazioni algebriche, si potesse fare in modo che ciascun termine non contenesse che una sola variabile, l' integrazione potrebbe effettuarsi in seguito.

L' equazione $xdy + ydx = 0$ è in questo caso. Infatti, se si divide quest' equazione per xy, essa diventa

$$\frac{dy}{y} + \frac{dx}{x} = 0;$$

e integrando, essa dà

$$\log y + \log x = C;$$

e rappresentando con A il numero di cui C è il logaritmo, possiamo scrivere

$$\log y + \log x = \log A,$$

e per conseguenza

$$\log xy = \log A;$$

passando ai numeri, si ha

$$xy = A.$$

144. Sia l' equazione più generale

$$\varphi x \,.\, dy + Fy \,.\, dx = 0;$$

per separare le variabili, si dividerà quest' equazione par $\varphi x \,.\, Fy$, e si troverà

$$\frac{dy}{Fy} + \frac{dx}{\varphi x} = 0,$$

equazione nella quale le variabili sono separate.

145. Per darne un esempio, proponiamoci d' integrare

$$(1 + x^2) dy = dx \sqrt{y};$$

dividendo per $(1+x^2)\sqrt{y}$, avremo

$$\frac{dy}{\sqrt{y}} = \frac{dx}{1+x^2};$$

e integrandò quest' equazione, si otterrà.

$$2\sqrt{y} = \text{arco}\,(\text{tang} = x) + C.$$

Si abbia per secondo esempio l' equazione

$$dx\sqrt{1-y^2} - dy\sqrt{1-x^2} = 0,$$

essa si trasforma in

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = 0,$$

e si ha

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} - \int\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = C,$$

ovvero (*Vedi* n.° 45)

$$arco\,(\text{sen} = x) - arco\,(\text{sen} = y) = arco\,(\text{sen} = c);$$

il che dà l' equaziooe primitiva

$$c' - x' + y' = 0,$$

indicando con x', y', c' gli archi i cui seni sono x, y e c.

146. In qualunque equazione della forma

$$XYdx + X'Y'dy = 0,$$

possiamo dunque facilmente separare le variabili, poichè dividendo successivamente per Y e per X' essa si trasforma in

$$\frac{X}{X'}\,dx + \frac{Y'}{Y}\,dy = 0.$$

Sia, per esempio, l' equazione

$$(x^3y+x^2y)\,dx + (xy^2-xy)\,dy = 0,$$

si trova

$$\frac{x^3+x^2}{x}\,dx + \frac{y^2-y}{y}\,dy = 0,$$

ovvero

$$(x^2+x)\,dx + (y-1)\,dy = 0,$$

il che dà

$$\int(x^2+x)\,dx + \int(y-1)\,dy = C,$$

e, per conseguenze effettoando l'integrazioni

$$\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 - y = C.$$

Questo processo è applicabile all' eqoazione

$$x^2 y dx + (3y+1) dy \sqrt{x^3} = 0;$$

poichè, se si divide per $y\sqrt{x^3}$, si ottieoe

$$\frac{x^2}{\sqrt{x^3}} dx + \frac{(3y+1)}{y} dy = 0.$$

147. L'integrazione potrebbe ancora effettuarsi se la proposta conteoesse più di due variabili, e che si potesse riportare a non contenere in ciascun membro che differenziali di cui si cooosceste l'integrale, come sarebbero, per esempio, le funzioni

$$\frac{ydx - xdy}{y^2}, \quad xdy + ydx, \text{ ec.},$$

che baono respettivamente per integrali $\frac{x}{y}$ e xy.

148. L'equazioni differenziali del prim' ordioe e del primo grado che possono riportarsi alla forma

$$\frac{dy}{dx} + Py = Q,$$

nella quale P e Q sono funzioni qualunque di x sola, presentano uoa soluziooe generale degna di essere osservata. Infatti, se si pone

$$y = uz, \quad \text{donde} \quad dy = udz + zdu,$$

u e z essendo funzioni arbitrarie di x, si ottieoe, sostitueodo,

$$udz + zdu + Puzdx = Qdx.$$

Ma si può fare

$$udz + Puzdx = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (a),$$

il che dà

$$zdu = Qdx \; . \; . \; . \; . \; (b).$$

Dall' equazione (a) si ricava, dividendo per u, e separando le variabili

$$\frac{dz}{z} + Pdx = 0,$$

donde, integrando,

$$\log z = -\int Pdx;$$

ora

$$e^{\log z} = z,$$

così

$$z = e^{-\int Pdx}.$$

Sostituendo questo valore di z nell' equazione (b), si trova

$$e^{-\int Pdx} du = Qdx,$$

donde

$$du = e^{\int \mathrm{P}dx} . \mathrm{Q}dx,$$

e

$$u = \int e^{\int \mathrm{P}dx} . \mathrm{Q}dx + \mathrm{C}.$$

Si ha dunque finalmente

$$y = uz = e^{-\int \mathrm{P}dx} \left(\int e^{\int \mathrm{P}dx} . \mathrm{Q}dx + \mathrm{C} \right) \ldots\ldots\ldots (136).$$

Per mostrare l'applicazione di questa formula, proponiamoci l'equazione

$$dy + \frac{y}{x} dx = x^m dx,$$

la quale si riporta alla forma prescritta

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = x^m.$$

Abbiamo in questo caso

$$\mathrm{P} = \frac{1}{x}, \quad \mathrm{Q} = x^m,$$

e

$$\int \mathrm{P}dx = \int \frac{dx}{x} = \log x,$$

per conseguenza

$$e^{\int \mathrm{P}dx} = e^{\log x} = x,$$

$$e^{-\int \mathrm{P}dx} = e^{-\log x} = -\frac{1}{x};$$

$$\int e^{\int \mathrm{P}dx} . \mathrm{Q}dx = \int x^{m+1} dx = \frac{x^{m+2}}{m+2} + \mathrm{C},$$

e, da ciò

$$y = -\frac{1}{x} \left(\frac{x^{m+2}}{m+2} + \mathrm{C} \right).$$

149. La separazione delle variabili può sempre effettuarsi nell'equazioni differenziali del prim'ordine a due variabili, quando esse sono omogenee. Un'equazione omogenea è quella nella quale tutti i termini, considerati rapporto alle

variabili, sono delle medesime dimensioni: così l'equazione

$$ax^2y^3+bxy^4+cy^3x^2=0,$$

è un' equazione omogenea, poichè la somma degli esponenti di x e di y essendo eguale a 5 in ciascun termine, tutti i prodotti x^2y^3, xy^4, ec., sono ciascuno di cinque dimensioni

L' equazione

$$ax^6y^2-bx^5y^3+cy^8=0,$$

è ancora omogenea, poichè la somma degli esponenti delle variabili in ciascun termine è 8. La variabile x non entra nell'ultimo termine dell' equazione, ma questa variabile può considerarsi come elevata alla potenza zero.

150. Sia, in generale, z una funzione di x e di y composta di termini omogenei, tali come Ax^py^q, $Bx^{p'}y^{q'}$, $Cx^{p''}y^{q''}$, ec. Se rappresentiamo con n la somma degli esponenti di x e di y, in uno di questi termini, avremo, in virtù dell' omogeneità,

$$p+q=n,\quad p'+q'=n,\quad p''+q''=n,\ \text{ec.}$$

Premesso ciò, se dividiamo tutti i termini per x^n, l'eguaglianza sussisterà ancora, e il termine Ax^py^q diventerà

$$\frac{Ax^py^q}{x^n}=\frac{Ay^q}{x^{n-p}}=\frac{Ay^q}{x^q}=A\left(\frac{y}{x}\right)^q.$$

Quello che si dice di questo termine potendo applicarsi a tutti gli altri, avremo dunque

$$\frac{z}{x^n}=F\left(\frac{y}{x}\right);$$

e facendo $\frac{y}{x}=q$, quest' equazione diventerà

$$x^nFq=z,$$

equazione che possiamo scrivere come segue

$$Qx^n=z\ .\ .\ .\ .\ .\ (137),$$

chiamando Q la funzione rappresentata da Fq.

151. Consideriamo ora l' equazione differenziale

$$Mdx+Ndy=0,$$

nella quale i coefficienti M e N sono funzioni omogenee di due variabili x e y di una dimensione n.

Dividendo quest' equazione per x^n, essa potrà perciò mettersi sotto la forma

$$\varphi\left(\frac{y}{x}\right)dx+F\left(\frac{y}{x}\right)dy=0;$$

e se facciamo $\frac{y}{x}=z$, quest' equazione diventerà.

$$dx\,\varphi z+dyFz=0,$$

o piuttosto

$$\varphi z + Fz \frac{dy}{dx} = 0 \ldots\ldots (138).$$

Per compire di eliminare y per mezzo dell' equazione $\frac{y}{x} = z$, o piuttosto di $y = zx$, differenzieremo quest' ultima equazione , ed otterremo

$$\frac{dy}{dx} = z + \frac{xdz}{dx};$$

questo valore riduce l' equazione (138) a

$$\varphi z + Fz\left(z + \frac{xdz}{dx}\right) = 0,$$

donde si ricava

$$\frac{xdz}{dx} = -\frac{\varphi z}{Fz} - z = -\frac{(\varphi z + zFz)}{Fz},$$

e, separando le variabili,

$$\frac{dx}{x} = -\frac{dzFz}{\varphi z + zFz},$$

e per conseguenza

$$\log x = -\int \frac{dzFz}{\varphi z + zFz} + C.$$

Quando avremo integrato, non si tratterà che di mettere uel resultamento il valore di z.

152. Prendiamo per esempio l' equazione

$$x^2dy = y^2dx + xydx:$$

facendo

$$y = zx,$$

troveremo

$$dy = zdx + xdz,$$

e, sostituendo questi valori, l' equazione diventerà

$$x^2zdx + x^3dz = z^2x^2dx + zx^2dx;$$

riducendo e dividendo per x^2, fattor comune, si otterrà

$$xdz = z^2dx;$$

quest' equazione, essendo divisa per z^2 e per x, dà

$$\frac{dx}{x} = \frac{dz}{z^2},$$

e integrando, si avrà

$$\log x = -\frac{1}{z} + C = -\frac{1}{\frac{y}{x}} + C = -\frac{x}{y} + C.$$

153. Prendiamo per secondo esempio l'equazione

$$\frac{x^2+xy}{x-y}dy = ydx;$$

facendo sparire il denominatore, si vede che tutti i termini di quest' equazione sono di due dimensioni; così, supporremo

$$y = zx;$$

e riducendo, quest' equazione ci darà

$$\frac{dy}{dx} = z\frac{(1-z)}{(1+z)};$$

mettendo per $\frac{dy}{dx}$ il suo valore ricavato dall' equazione

$$y = zx,$$

si avrà

$$z + \frac{xdz}{dx} = \frac{z(1-z)}{1+z};$$

trasportando z nel secondo membro, e riducendo al medesimo denominatore, si troverà

$$\frac{dx}{x} = -\frac{(1+z)}{2z^2}dz,$$

e finalmente

$$\log x = -\int\frac{dz}{2z^2} - \int\frac{dz}{2z} = \frac{1}{2z} - \frac{1}{2}\log z + C$$

$$= \frac{x}{2y} - \frac{1}{2}\log\frac{y}{x} + C.$$

154. Quando l'equazione proposta, oltre i termini Ax^py^q, $Bx^{p'}y^{q'}$, + ec., contiene dei polinomi tali come

$$\left(Mx^ry^s + Nx^{r'}y^{s'} + \text{ec.}\right)^k dx, \quad \left(Px^ty^u + Qx^{t'}y^{u'} + \text{ec.}\right)^l dy,$$

le variabili saranno ancora separabili, se si ha

$$p+q = p'+q' = (r+s)k = (r'+s')k = (t+u)l = (t'+u')l \ldots (139).$$

Per dimostrarlo, facciamo

$$(r+s)k = n, \quad (r'+s')k = n \ldots\ldots (140),$$

e dividiamo per x^n tutti i termini del polimonio

$$\left(Mx^ry^s + Nx^{r'}y^{s'} + \text{ec.}\right)^k,$$

questo polinomio diventerà

$$\left(\frac{Mx^r y^s + Nx^{r'} y^{s'} + \text{ec.}}{x^{\frac{n}{k}}}\right)^k = \left(\frac{My^s}{x^{\frac{n}{k}-r}} + \frac{Ny^{s'}}{x^{\frac{n}{k}-r'}} + \text{ec.}\right)^k;$$

ora, l' equazioni (140) ci danno

$$\frac{n}{k} - r = s, \quad \frac{n}{k} - r' = s';$$

sostituendo questi valori nell' espressione precedente, troveremo

$$\left(M\frac{y^s}{x^s} + N\frac{y^{s'}}{x^{s'}} + \text{ec.}\right)^k = \left[M\left(\frac{y}{x}\right)^s + N\left(\frac{y}{x}\right)^{s'} + \text{ec.}\right]^k,$$

il che prova che quando l' equazioni (139) hanno luogo, i polinomi elevati a potenza, si riducono come gli altri termini, a funzioni di $\frac{y}{x}$.

Per conseguenza, facendo $\frac{y}{x} = z$, o piuttosto, $y = zx$, l' equazione può ridursi a una funzione di z. Per darne un esempio, sia

$$xdy - ydx = dx\sqrt{x^2 - y^2} \;.\;.\;.\;.\; (141),$$

scritta quest' equazione come segue,

$$x^1 y^0 dy - y^1 x^0 dx = dx\left(x^2 y^0 - x^0 y^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

si vede che l' equazioni (139) sono soddisfatte; così, faremo $y = zx$, e per conseguenza

$$\frac{dy}{dx} = z + x\frac{dz}{dx};$$

sostituendo questi valori nell' equazione (141), riducendo e dividendo per il fattor comune, si otterrà

$$x\frac{dz}{dx} = \sqrt{1 - z^2},$$

e per conseguenza

$$\frac{dx}{x} = \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}};$$

integrando, si troverà

$$\log x = \text{arco}\,(\text{sen} = z) + C,$$

ovvero rimettendo il valore di z,

$$\log x = \text{arco}\left(\text{sen} = \frac{y}{x}\right) + C.$$

155. In generale, quando si ha una funzione omogenea delle variabili x, y, z, ec., possiamo sempre separare una delle variabili, per esempio x, facendo $y=tx$, $z=ux$, ec.

Ecco questo calcolo: sia

$$Mdx+Ndy+Pdz=0,$$

un' equazione omogenea, nella quale M, N, P sono funzioni delle tre variabili x, y, z; queste funzioni M, N, P conterranno termini tali come

$$Ax^p y^q z^r, \quad Bx^{p'} y^{q'} z^{r'}, \quad Cx^{p''} y^{q''} z^{r''},$$

e si avrà

$$p+q+r=p'+q'+r'=p''+q''+r''=n.$$

Se in uno di questi termini, per esempio in $Ax^p y^q z^r$, si sostituiscono i valori $y=tx$, $z=ux$, questo termine diventerà

$$Ax^p t^q x^q u^r x^r = x^{p+q+r} \times At^q u^r = x^n At^q u^r;$$

la stessa cosa avendo luogo per gli altri termini, se si sostituiscono i valori di y e di z, l' equazione

$$Mdx+Ndy+Pdz=0$$

avrà x^n per fattor comune; sopprimendo questo fattore e osservando che dy e dz si cangeranno in $d.tx$ e in $d.ux$, essa prenderà la forma

$$\varphi(t,u)\,dx+F(t,u)\,d.tx+f(t,u)\,d.ux=0;$$

ed eseguendo le differenziazioni indicate, si avrà

$$\varphi(t,u)dx+F(t,u)(tdx+xdt)+f(t,u)(udx+xdu)=0;$$

donde si ricaverà

$$[\varphi(t,u)+tF(t,u)+uf(t,u)]\,dx=-x\,[F(t,u)dt+f(t,u)du];$$

e per conseguenza

$$\frac{dx}{x}=-\frac{F(t,u)\,dt+f(t.u)\,du)}{\varphi(t,u)+tF(t,u)+uf(t,u)}.$$

156. Alcune volte s' impiegano degli esponenti indeterminati per rendere un' equazione omogenea: sia, per esempio, l' equazione

$$ay^m x^n dx+bx^p dx+cx^q dy=0;$$

supporremo $y=z^k$; e siccome l'esponente k non è una variabile, ma una costante incognita, si differenzierà, e si avrà

$$dy=kz^{k-1}dz \quad \text{e} \quad y^m=z^{mk};$$

sostituendo, otterremo

$$az^{km}x^n dx+bx^p dx+ckx^q z^{k-1}dz=0;$$

quest' equazione sarà omogenea, se si ha

$$km+n=p, \quad q+k-1=p;$$

eliminando l' indeterminata k, si troverà

$$\frac{p-n}{m}=p+1-q,$$

equazione di condizione che deve aver luogo perchè la proposta possa essere omogenea mediante la sostituzione di

$$y=z^{k}=z^{p+1-q}.$$

157. Esiste, sopra le funzioni omogenee, un teorema importante che dimostreremo nelle seguente maniera:

Sia $Mdx+Ndy$ la differenziale di una funzione omogenea z tra due variabili x ed y, avremo dunque l'equazione

$$Mdx+Ndy=dz \;.\;.\;.\;.\; (142).$$

Facendo $\frac{y}{x}=q$, e indicando con n la somma degli esponenti delle variabili, di uno dei termini della funzione z, si troverà (n.° 150)

$$Qx^n=z;$$

e ci rammenteremo che Q non contiene che la sola variabile q, atteso che la funzione donde proviene Q non conteneva che termini in $\frac{y}{x}$, i quali si sono cangiati in q mediante la sostituzione di q invece di $\frac{y}{x}$. Premesso ciò, mettiamo invece di y nell' equazione (142) il suo valore qx, sostituiamo Qx^n per z e si chiamino M', N' ciò che diventano allora M ed N; l'equazione (142) si trasformerà in

$$M'dx+N'd.qx=d(Qx^n)\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (143);$$

la differenziale di qx essendo $qdx+xdq$, se mettiamo questo valore di $d.qx$, otterremo

$$(M'+N'q)dx+N'xdq=d(Qx^n);$$

il che ci fa conoscere che la differenziale totale di Qx^n è

$$(M'+N'q)dx+N'xdq;$$

ma effettuando la differenziazione indicata nel secondo membro dell' equazione precedente, la differenziale totale di Qx^n è ancora

$$Q.nx^{n-1}dx+x^ndQ;$$

o piuttosto, perchè la differenziale di una funzione Q di q è della forma $Fq.dq$,

$$Q.nx^{n-1}dx+Fq.dq.$$

Paragonando queste due espressioni della differenziale totale di Qx^n, vediamo che i loro primi termini rappresentano egualmente la differenziale di Qx^n presa rapporto ad x. Avremo dunque

$$M'+N'q=nQx^{n-1};$$

se in quest'equazione si rimette y invece di qx, M' ed N' diventeranno nuovamente M ed N, e si avrà

$$M+N\frac{y}{x}=nQx^{n-1},$$

ovvero

$$Mx+Ny=nz.$$

158. Questo teorema può applicarsi a delle funzioni omogenee di un numero qualunque di variabili; poichè se si avesse, per esempio, l'equazione

$$Mdx+Ndy+Pdt=dz,$$

nella quale la dimensione fosse sempre n, basterebbe fare $\frac{y}{x}=q$, $\frac{t}{x}=r$, per provare con un ragionamento analogo a quello che abbiamo impiegato, che si deve avere

$$z=xF(q,r),$$

e per conseguenza

$$Mx+Ny+Pt=nz.$$

Passiamo ora alle condizioni d'integrabilità delle funzioni di due variabili.

159. Abbiamo veduto (*Vedi* Differenziale) che la differenziale totale, di una funzione di più variabili indipendenti, è eguale alla somma delle differenziali prese per ciascuna variabile in particolare come se tutte le altre fossero costanti. Per esempio, u essendo una funzione qualunque di due variabili x ed y, la sua differenziale è

$$du=\frac{du}{dx}dx+\frac{du}{dy}dy,$$

$\frac{du}{dx}$ indicando la derivata differenziale rapporto ad x, e $\frac{du}{dy}$ la derivata differenziale rapporto ad y.

Paragonando questa forma con una differenziale a due variabili

$$Pdx+Qdy\ \ldots\ldots(144),$$

nella quale P e Q sono funzioni primitive qualunque di x e di y, si riconosce che questa funzione differenziale non potrebbe essere la differenziale totale di una funzione primitiva u, quando non si abbia

$$P=\frac{du}{dx},\qquad Q=\frac{du}{dy},$$

e per conseguenza,

$$\frac{dP}{dy}=\frac{d^2u}{dxdy},\quad \frac{dQ}{dx}=\frac{d^2u}{dydx}.$$

Ma

$$\frac{d^2u}{dxdy}=\frac{d^2u}{dydx},$$

poichè le derivata del second'ordine presa rapporto alle due variabili x ed y, cioè, presa differenziando prima rapporto ad una delle variabili, e quindi dif-

ferenziando rapporto all' altra, è la medesima qualunque sia l' ordine che si sia seguito nelle differenziazioni; si ha dunque ancora

$$\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx} \ldots\ldots\ldots (145),$$

equazione di condizione che farà conoscere se una differenziale a due variabili è la differenziale totale di una funzione primitiva di queste variabili, poichè questa circostanza non può aver luogo se l' equazione (145) non è possibile, o *se la derivata differenziale di* P *presa rapporto ad* y, *non è eguale alla derivata differenziale di* Q *presa rapporto ad* x.

160. Se si ha, per esempio,

$$z = x^2 + xy,$$

si trova

$$\frac{dz}{dx} = 2x + y, \quad \frac{dz}{dy} = x,$$

e per conseguenza

$$\frac{d^2z}{dxdy} = 1 = \frac{d^2z}{dydx}.$$

161. Si riconosce, per esempio, che l' espressione $(2x-y)\,dx - xdy$ è una differenziale esatta, perchè

$$\frac{dP}{dy} = -1 = \frac{dQ}{dx}.$$

L' espressione

$$(y^2+3x^2)\,dx + (3y^2+2xy)\,dy$$

è ancora una differenziale esatta, perchè

$$\frac{dP}{dy} = 2y = \frac{dQ}{dx}.$$

162. La variabile indipendente essendo x, siano

$$\frac{dy}{dx} = p, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = q, \quad \frac{d^3y}{dx^3} = r \ldots (146),$$

e così di seguito. Se si prenda un' espressione Vdx nella quale V sia funzione di x, di y, di p, di q, ec., bisognerà perchè Vdx sia una differenziale esatta, che essa provenga dalla differenziazione di una data funzione che indicheremo con z; avremo dunque

$$Vdx = dz,$$

ovvero piuttosto

$$V = \frac{1}{dx}\,dz \ldots (147).$$

Supponiamo che V non contenga che x ed y, e che i coefficienti differenziali p e q; vale a dire che si abbia

$$V = F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right).$$

l' espressione Vdx, a motivo dei coefficienti differenziali $\frac{dy}{dx}$ e $\frac{d^2y}{dx^2}$ che essa contiene, apparterrà al second' ordine; seguirà dunque lo stesso di dz; per conseguenza z dovrà essere una funzione del prim' ordine, e non conterrà punto q. Così si avrà, differenziandola,

$$dz = \frac{dz}{dx}dx + \frac{dz}{dy}dy + \frac{dz}{dp}dp \; . \; . \; . \; . \; (148);$$

mettendo questo valore di dz nell' equazione (147), si otterrà

$$V = \frac{1}{dx}\left(\frac{dz}{dx}dx + \frac{dz}{dy}dy + \frac{dz}{dp}dp\right);$$

facendo passare il divisore dx sotto la parentesi, si avrà

$$V = \frac{dz}{dx} + \frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} + \frac{dz}{dp}\cdot\frac{dp}{dx};$$

mettendo invece dei coefficienti differenziali, i loro valori dati dall' equazioni (146), si troverà

$$V = \frac{dz}{dx} + \frac{dz}{dy}p + \frac{dz}{dp}q \; . \; . \; . \; (149).$$

Sia ora

$$dV = Mdx + Ndy + Pdp + Qdq \; . \; . \; . \; . \; . \; (150),$$

le equazioni (147) e (149) ci somministrano i mezzi di determinare i coefficienti M, N, P, Q in funzione dei coefficienti differenziali $\frac{dz}{dx}$, $\frac{d^2z}{dx^2}$, ec. A quest' effetto il valore $M = \frac{dV}{dx}$, ricavato dall' equazione (150), essendo messo nell'equazione (147) differenziata rapporto ad x, si ha

$$M = \frac{1}{dx}\cdot\frac{d^2z}{dx};$$

si troverà egualmente

$$\frac{dV}{dy} \text{ o } N = \frac{1}{dx}\cdot\frac{d^2z}{dy} \; . \; . \; . \; . \; (151).$$

Riguardo a P, il coefficiente differenziale $\frac{dV}{dp}$, che ne è il valore, si troverà differenziando l' equazione (149) rapporto a p e dividendo per dp; e se si osserva che $d.uv = udv + vdu$, si avrà

$$\frac{dV}{dp} \text{ ovvero } P = \frac{d^2z}{dxdp} + \frac{dz}{dy} + \frac{d^2z}{dydp}$$

$$+ \frac{d^2z}{dp^2}q + \frac{dz}{dp}\,\frac{dq}{dp} \; . \; . \; . \; (152).$$

Ora, il termine affetto da $\frac{dq}{dp}$ è nullo, poichè

$$\frac{dq}{dp} = \frac{d^2p}{dxdp} = \frac{d\frac{dp}{dp}}{dx} = \frac{d1}{dx} = \frac{d.costante}{dx};$$

e siccome una costante non ha veruna differenziale, sopprimeremo il termine affetto da $\frac{dq}{dp}$, il che ridorrà il valore dell'equazione (152) a

$$P = \frac{dz}{dy} + \frac{d^2z}{dxdp} + \frac{d^2z}{dydp}p + \frac{d^2z}{dp^2}q \ldots (153)$$

Se, invece dei soli coefficienti differenziali p e q si avessero ancora r, s, t, ec., seguendo il medesimo metodo, si caderebbe sopra l'espressioni

$$\frac{dr}{dp},\ \frac{ds}{dp},\ \frac{dt}{dp},\ \text{ec.}$$

e con una simile dimostrazione, si proverebbe facilmeota che qoeste espressioni sono nulle.

Questo valore P può reodersi più semplice; poichè l'equazione (148), essendo differenziata rapporto a p, ci dà

$$d\frac{dz}{dp} = \frac{d^2z}{dxdp}dx + \frac{d^2z}{dydp}dy + \frac{d^2z}{dp^2}dp,$$

e divideodo per dx, si ha

$$\frac{1}{dx}d\frac{dz}{dp} = \frac{d^2z}{dxdp} + \frac{d^2z}{dydp}p + \frac{d^2z}{dp^2}p.$$

Qoesto valore messo in luogo dei tre ultimi termini dell'eqoazione (153) la ridorrà a

$$P = \frac{dz}{dy} + \frac{1}{dx}d\frac{dz}{dp}.$$

Operaudo egualmeote rapporto a Q, si troverà

$$Q = \frac{dz}{dp} + \frac{1}{dx}\frac{1}{dx}d\frac{dz}{dq};$$

e siccome, nella nostra ipotesi, la funziooe z del prim'ordioe non può contenere d^2y, e per cooseguenza q, bisognerà sopprimere il termine ove entra $\frac{dz}{dq}$, il che ridurrà il valore di Q a

$$Q = \frac{dz}{dp}:$$

riepilogando quanto sopra, abbiamo

$$\left.\begin{aligned} M&=\frac{1}{dx}\cdot\frac{d^2z}{dx},\\ N&=\frac{1}{dx}d\cdot\frac{dz}{dy},\\ P&=\frac{dz}{dy}+\frac{1}{dx}d\cdot\frac{dz}{dp},\\ Q&=\frac{dz}{dp} \end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots(153).$$

Non si tratta più che di eliminare tra queste equazioni la funzione z, che ci è incognita; ora considerando i coefficienti differenziali che vi s' incontrano, vediamo che ne esistono di due sorti che sono comuni a diversa di queste equazioni: questi sono $\frac{dz}{dy}$ e $\frac{dz}{dp}$ i quali entrano nei valori di P, di N e di Q. Cerchiamo di eliminare questi due coefficienti differenziali tra le nostre tre equazioni: per eseguir ciò, osserveremo che la differenziale di $\frac{dz}{dy}$ che entra nel valore di N è quella del termine $\frac{dz}{dy}$ che si trova nel valore di P; differenzieremo dunque l' equazione che ha P per primo membro, e dividendo per dx troveremo

$$\frac{dP}{dx}=\frac{1}{dx}d\cdot\frac{dz}{dy}+\frac{1}{dx^2}d^2\frac{dz}{dp};$$

per conseguenza sottraendo da quest' equazione la seconda dell' equazioni (153), otterremo

$$\frac{dP}{dx}-N=\frac{1}{dx^2}d^2\frac{dz}{dp}.$$

ei rimane ancora qui un termine che contiene z; ma l' elimineremo con l' aiuto della quarta equazione (153), differenziata due volte, il che ci darà

$$N-\frac{dP}{dx}+\frac{d^2Q}{dx^2}=0\ldots.(154).$$

Tale sarà l' equazione di condizione che dovrà aver luogo, perchè V essendo una funzione di x, di y, di p e di q, l' espressione Vdx sia una differenziale esatta.

In generale, se V è una funzione di x, di y e dei coefficienti differenziali p, q, r, s, t, ec., si troverà

$$N-\frac{dP}{dx}+\frac{d^2Q}{dx^2}-\frac{d^3R}{dx^3}+\frac{d^4S}{dx^4}-\frac{d^5T}{dx^5}+\text{ec.}=0\ldots(155).$$

163. Per esempio, se si avesse $mdx + ndy$, mettendo quest' espressione sotto la forma $(m+np)\,dx$, la funzione V sarebbe in questo caso eguale a $m+np$, e si dedurrebbe

$$N = \frac{dm}{dy} + \frac{dn}{dy}p,$$

$$P = n,$$

$$\frac{1}{dx}\,dP = \frac{1}{dx}\left(\frac{dn}{dx}dx + \frac{dn}{dy}dy\right) = \frac{dn}{dx} + \frac{dn}{dy}p;$$

questi valori di N e di $\frac{1}{dx}\,dP$ messi nell' equazione $N - \frac{1}{dx}\,dP = 0$, la convertirebbero in

$$\frac{dm}{dy} \quad \frac{dn}{dy}p - \frac{dn}{dx} - \frac{dn}{dy}p = 0;$$

e riducendo si troverebbe

$$\frac{dm}{dy} = \frac{dn}{dx},$$

che è l' equazione di condizione del n.° 159.

164. Quando una differenziale a due variabili è totale la sua integrazione non presenta alcuna difficoltà, mentre, poichè si può allora stabilire

$$\frac{du}{dx} = P, \quad e \quad \frac{du}{dx}dx = Pdx,$$

si ha, integrando quest' ultima eguaglianza, rapporto ad x

$$u = \int Pdx + Y \; . \; . \; . \; . \; (156),$$

Y essendo una funzione di y, e tenendo il posto della costante arbitraria che bisogna aggiungere a ciascuno integrale.

Per determinare questa funzione, prendiamo le derivate differenziali dai due membri dell' eguaglianza (156) rapporto ad y e come se x fosse costante, avremo

$$\frac{du}{dy} = \frac{d\int Pdx}{dy} + \frac{dY}{dy}.$$

Ora, poichè si ha $\frac{du}{dy} = Q$,

$$Q = \frac{d\int Pdx}{dy} + \frac{dY}{dy},$$

il che dà

$$\frac{dY}{dy} = Q - \frac{d\int Pdx}{dy};$$

e, integrando quest'ultima espressione rapporto al y, si ottiene

$$Y = \int dy\left(Q - \frac{d\int P dx}{dy}\right).$$

donde si conclude definitivamente

$$u = \int P dx + \int dy\left(Q - \frac{d\int P dx}{dy}\right) \quad \ldots \ldots (157),$$

tale è dunque l'integrale completo della funzione $P dx + Q dx$.

165. Si abbia, per esempio, da integrare la funzione

$$y dx + x dy - 2x dx,$$

per assicurarci, prima di tutto, se questa funzione è una differenziale totale, mettiamola sotto la forma

$$(y - 2x)\,dx + x dy,$$

e, paragonandola con la (144), avremo

$$P = y - 2x, \quad Q = x;$$

ora

$$\frac{dP}{dy} = \frac{d(y-2x)}{dy} = \frac{dy}{dy} = 1,$$

$$\frac{dQ}{dx} = \frac{dx}{dx} = 1.$$

Così $\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx}$; e conseguentemente, $(y+2x)dx + x dy$ è una differenziale totale.

Ora per ottenere l'integrale, abbiamo

$$\int P dx = \int \left(y - 2x\right) dx = \int y dx - 2\int x dx$$

$$= xy - x^2.$$

$$\frac{d\int P dx}{dy} = \frac{d(xy - x^2)}{dy} = \frac{x dy}{dy} = x.$$

$$Q - \frac{d\int P dx}{dy} = x - x = 0$$

$$\int dy.[0] = 0, \quad \text{ovvero} = \textit{costante}.$$

dunque

$$u = xy - x^2 + \textit{costante}.$$

166. L'integrale (157) può mettersi sotto la forma

$$u = \int P dx + \int dy\left[Q - \int \frac{dP}{dy} dx\right] \quad \ldots \ldots (158),$$

partendo dal teorema

$$\frac{d\int Mdx}{dy}=\int\frac{dM}{dy}dx,$$

con l' aiuto del quale possiamo differenziare sotto il segno $\int$ rapporto ad un'altra variabile differente da quella alla quale esso si rapporta.

Questo teorema, che si deve al Leibnizio, può dimostrarsi, con le proprietà della derivate differenziali nella seguente maniera; poniamo

$$\int Mdx=N,$$

avremo

$$Mdx=dN,\quad e\quad M=\frac{dN}{dx},$$

prendendo le derivate rapporto ad y, otterremo

$$\frac{dM}{dy}=\frac{d^2N}{dx.dy},$$

ma poichè

$$\frac{d^2N}{dx.dy}=\frac{d^2N}{dy.dx},$$

si ha ancora, il che non è che un' altra forma delle stesse derivate

$$\frac{d\left[\frac{dN}{dx}\right]}{dy}=\frac{d\left[\frac{dN}{dy}\right]}{dx},$$

dunque

$$\frac{dM}{dy}=\frac{d\left[\frac{dN}{dy}\right]}{dx}$$

e, conseguentemente

$$\frac{dM}{dy}dx=\frac{d\left[\frac{dN}{dy}\right]}{dx}dx.$$

Integrando rapporto ad x, e rimettendo per N il suo valore, si ottiene

$$\int\frac{dM}{dy}dx=\frac{d\int Mdx}{dy}.$$

167. Un secondo esemplo ci sembra adattato a rendere sempre più chiaro l' uso della formula (157).

Si abbia la funzione differenziale

$$\frac{(2x^2+y^2)dx+xydy}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

porremo

$$P=\frac{2x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad Q=\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

e, per cominciare da assicurarci se la funzione proposta è una differenziale totale, calcoleremo le derivate $\frac{dP}{dy}$, $\frac{dQ}{dx}$; troveremo

$$\frac{dP}{dy}=\frac{2(x^2+y^2)y-(2x^2+y^2)y}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}},$$

$$\frac{dQ}{dx}=\frac{(x^2+y^2)y-x^2y}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}},$$

e, dopo le riduzioni,

$$\frac{dP}{dy}=\frac{dQ}{dx}=\frac{y^3}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}.$$

Eseguendo perciò i calcoli indicati nella formula (157), avremo

$$\int Pdx=\int\frac{2x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}dx$$

$$=\int\frac{2x^2dx}{\sqrt{x^2+y^2}}+\int\frac{y^2dx}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Ora, integrando il primo termine del secondo membro con la formula (103), si trova

$$\int\frac{2x^2dx}{\sqrt{x^2+y^2}}=x\sqrt{x^2+y^2}-y^2\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Così, sottraendo gl' integrali che si distruggono, si ha solamente

$$\int Pdx=x\sqrt{x^2+y^2}.$$

Prendendo la derivata differenziale di $\int Pdx$, rapporto ad y, che è

$$\frac{d\int Pdx}{dy}=\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

si vede che il termine

$$\int dx\left[Q-\int\frac{dP}{dy}dx\right],$$

si riduce a zero, e per conseguenza che l' integrale domandato è

$$x\sqrt{x^2+y^2},$$

ovvero piuttosto

$$x\sqrt{x^2+y^2}+C,$$

poichè la riduzione a zero della funzione $\int dYdy$, prova che la funzione Y non contiene variabile, vale a dire che essa è costante.

168. Si abbia per terzo esempio

$$(6xy-y^2)dx+(3x^2-2xy)dy \quad \ldots \quad (159).$$

Paragonando quest' espressione a $Pdx+Qdy$, abbiamo

$$6xy-y^2=P, \quad 3x^2-2xy=Q.$$

Per consegnenza, la condizione d' integrabilità è adempita, poichè si trova

$$\frac{dP}{dy}=6x-2y=\frac{dQ}{dx};$$

integrando l' espressione $(6xy-y^2)dx$, nell' ipotesi di y costante avremo

$$\int Pdx=\int(6xy-y^2)dx=3x^2y-y^2x;$$

sostituendo questo valore e quello di Q nell' equazione (157), otterremo

$$u=3x^2y-y^2x+\int\left[3x^2-2xy-\frac{d(3x^2y-y^2x)}{dy}\right]dy.$$

La parte affetta dal segno d' integrazione, eseguendo la differenziazione indicata, si riduce a

$$\int(3x^2-2xy-3x^2+2xy)\,dy;$$

e, togliendo il segno d' integrazione, si ha una differenziale i cui termini si distruggono: segue da ciò che l' espressione

$$\int\left[3x^2-2xy-\frac{d(3x^2y-y^2x)}{dy}\right]dy,$$

è costante, poichè qualunque quantità la cui differenziale è nulla, è costante; donde resulta che l' integrale cercato è $3x^2y-y^2x+$ *costante*.

169. Se non si fosse voluto impiegare la formula trovata nel (n.° 164), si sarebbe potuto fare direttamente il calcolo nella seguente maniera:

S' integrerà l' espressione (159), considerando y come costante, e si avrà

$$\int Pdx=\int(6xy-y^2)\,dx+Y,$$

ovvero

$$u = 3x^2y - y^2x + Y \ldots (160);$$

differenziando quest' equazione rapporto ad y, si otterrà

$$\frac{du}{dy} = 3x^2 - 2xy + \frac{dY}{dy};$$

$\frac{du}{dy}$ non essendo altra cosa che il coefficiente di dy nell' espressione (159), abbiamo ancora

$$\frac{du}{dy} = 3x^2 - 2xy;$$

paragonando questi valori, troveremo $\frac{dY}{dy} = 0$, e per conseguenza $Y = costante$; mettendo questo valore nell' equazione (160), troveremo

$$u = 3x^2y - y^2x + costante.$$

170. Sia finalmente la funzione

$$(2y^2x + 3y^3)\,dx + (2x^2y + 9xy^2 + 8y^3)\,dy;$$

se si paragona all' espressione $Pdx + Qdy$, si troverà

$$P = 2y^2x + 3y^3, \quad Q = 2x^2y + 9xy^2 + 8y^3;$$

e siccome si ha

$$\frac{dP}{dy} = 4yx + 9y^2 = \frac{dQ}{dx},$$

la funzione proposta è una differenziale esatta. Integrando rapporto ad x, avremo

$$\int Pdx = y^2x^2 + 3y^3x + Y,$$

ovvero

$$u = y^2x^2 + 3y^3x + Y;$$

differenziando quest' espressione rapporto ad y, otterremo

$$\frac{du}{dy} = \frac{d(y^2x^2 + 3y^3x)}{dy} + \frac{dY}{dy};$$

da un' altra parte $\frac{du}{dy}$ rappresentando il coefficiente di dy nell' equazione proposta, avremo ancora

$$\frac{du}{dy} = 2x^2y + 9xy^2 + 8y^3;$$

da questi due valori di $\frac{du}{dy}$, si deduce quest' equazione

$$\frac{d(y^2x^2 + 3y^3x)}{dy} + \frac{dY}{dy} = 2x^2y + 9xy^2 + 8y^3,$$

ed effettuando la differenziazione indicata rapporto ad y, si ha

$$2x^2y+9y^2x+\frac{dY}{dy}=2x^2y+9xy^2+8y^3,$$

equazione che si riduce a

$$\frac{dY}{dy}=8y^3;$$

dunque

$$Y=\int 8y^3dy=2y^4+C,$$

e per conseguenza l' integrale cercato è

$$u=y^2x^2+3y^3x+2y^4+C.$$

Una semplice estensione del metodo precedente basta per ottenere l' integrale di qualunque differenziale totale, qualunque sia il numero delle variabili indipendenti della funzione primitiva.

171. Se un'equazione differenziale fosse sempre il risultamento immediato della differenziazione di un'equazione primitiva, la sua integrazione non dipenderebbe che da considerazioni analoghe a quelle del n.° 164, ma il più delle volte succede che la differenziale non è completa, ed allora siamo obbligati a ricorrere alla separazione delle variabili, la quale generalmente non può effettuarsi che nel caso in cui la forma dell' equazione differenziale è una di quelle che abbiamo esaminate (n.i 145, 146, 148). Sarebbe dunque importantissimo di poter riportare qualunque equazione differenziale ad essere una differenziale totale; disgraziatamente questo problema non è solubile che in alcuni casi particolari, e siamo costretti a far conoscere solamente le sue condizioni generali.

Differenziando l' equazione primitiva

$$\frac{x}{y}=c,$$

si ottiene l'equazione differenziale immediata, (*Vedi* Differenziale),

$$\frac{ydx-xdy}{y^2}=0,$$

e, mediante la soppressione del fattore y^2 l' equazione mediata

$$ydx-xdy=0.$$

Quest' ultima non presenta più la condizione d'integrabilità (145), poichè facendo $P=y$ e $Q=-x$, si ha

$$\frac{dP}{dy}=\frac{dy}{dy}=1 \quad \text{e} \quad \frac{dQ}{dx}=-\frac{dx}{dx}=-1,$$

nel mentre che questa condizione si trova necessariamente nell' equazione immediata, e che facendo $P=\frac{y}{y^2}=\frac{1}{y}$, $Q=-\frac{x}{y^2}$, si ha

$$\frac{dP}{dy}=-\frac{1}{y^2},\quad \frac{dQ}{dx}=-\frac{1}{y^2}.$$

Si vede dunque che l' iotegrabilità dell' equazione

$$ydx - xdy = o$$

dipende dalla restituzione del fattore $\frac{1}{y^2}$, e segue il medesimo di qoalunque equaziooe differenziale del primo grado; ooa tale equazione può sempre diventare noa differenziale totale, col mezzo di un fattore, quando essa risponde ad uo'equazioоe primitiva. La determioazione di questo fattore è l'oggetto del seguente metodo dovuto all' Eulero.

172. Sia in geoerale l' equazione $Pdx + Qdy = o$, che è una differenziale esatta e z il fattor comuoe, che per maggior generalità, supporremo una funzione di x e di y; avremo

$$P = Mz, \quad Q = Nz.$$

Se si sostitoisce questi valori nell' equazione precedeote, il fattor comone z sparirà, e si avrà

$$Mdx + Ndy = o \ldots (161).$$

L' equazione $Pdx + Qdy = o$, esseodo per ipotesi una differenziale esatta, avremo

$$\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx};$$

metteodo per P e per Q i loro valori, quest' equaziooe diveoterà

$$\frac{dMz}{dy} = \frac{dNz}{dx};$$

e sviloppando, si troverà

$$\frac{Mdz}{dy} + \frac{zdM}{dy} = \frac{Ndz}{dx} + \frac{zdN}{dx} \ldots (162).$$

173. Quaodo il fattor comune z è costante, $\frac{dz}{dy}$ e $\frac{dz}{dx}$ essendo nulli, l'equazione (162) diventa

$$\frac{dM}{dy} = \frac{dN}{dx},$$

e per conseguenza la condizione necessaria perchè l' eqoazione (161) sia una differenziale esatta, è adempita. Ma, quando z è uoa funzioоe di x e di y, la determinazione di z dipende dall' equazione (162); ora quest' equaziooe è più difficile a iotegrarsi della proposta, la quale non contiene che il solo coefficieote differeoziale $\frac{dy}{dx}$, nel mentre che l' eqoaziooe (162) contiene i due coefficienti differeoziali $\frac{dz}{dx}$ e $\frac{dz}{dy}$, e contieoe tre variabili x, y, z.

174. Se l' equaziooe è omogenea, è facilissimo determinare questo fattore; poichè sia $Mdx + Ndy = o$, un' equazione omogenea, la qoale diveota iotegrabile mediaote la moltiplicazione di una fuozione omogenea z di x e di y; chiaman-

do u l'integrale dell' equazione $zMdx + zNdy = 0$, si ha

$$zMdx + zNdy = du \quad \ldots . (163);$$

queat' equazione essendo omogenea, se ne deduce, (n.° 157),

$$zMx + zNy = nu \quad \ldots . (164);$$

ora, se la dimensione di M è rappresentata da m, e quella di z da k, la dimensione di uno dei termini zMx, zNy sarà dunque $m+k+1$; questo valore essendo messo invece di n, nella precedente equazione, avremo

$$zMx + zNy = (m+k+1)u;$$

dividendo l'equazione (163) per questa, troveremo

$$\frac{Mdx + Ndy}{Mx + Ny} = \frac{du}{u} \times \frac{1}{m+k+1}.$$

Il secondo membro di quest' equazione essendo una differenziale esatta, deve essere il medesimo del primo; donde segue che

$$\frac{1}{Mx + Ny},$$

dev' essere un fattore proprio a rendere integrabile l' equazione omogenea

$$Mdx + Ndy = 0.$$

175. Se il fattor comune z, che deve rendere integrabile la proposta, non è funzione che di x, si ha $\frac{dz}{dy} = 0$, il che riduce l' equazione (162) a

$$\frac{zdM}{dy} = \frac{Ndz}{dx} + z\frac{dN}{dx},$$

donde si deduce

$$\frac{Ndz}{dx} = z\left(\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx}\right),$$

e per conseguenza

$$\frac{dz}{z} = \left(\frac{\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx}}{N}\right)dx \ldots (165);$$

integrando, si ha

$$\log z = \int\left(\frac{\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx}}{N}\right)dx = \int\frac{1}{N}\left(\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx}\right)dx;$$

moltiplicando per $\log e$, cangiando il coefficiente di $\log e$ in esponente, e passando ai numeri si trova

$$z = e^{\int\frac{1}{N}\left(\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx}\right)dx} \quad \ldots . (166).$$

Non si tratterà dunque più che, di moltiplicare l'equazione proposta per questo fattore z, perchè essa diventi una differenziale esatta.

176. Sia, per esempio, $ydx - xdy = o$, si ha

$$M = y,\ N = -x,\ \frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx} = 2;$$

per mezzo di questi valori, la formola (165) ci dà

$$\int \frac{dz}{z} = \int \frac{2dx}{-x},$$

donde si deduce, integrando

$$\log z = -2 \log x + \log C = -\log x^2 + \log C = \log \frac{C}{x^2};$$

e passando ai numeri si trova

$$z = \frac{C}{x^2}:$$

per conseguenza l'espressione

$$\frac{C(ydx - xdy)}{x^2},$$

sarà una differenziale esatta.

177. Possiamo trovare un' infinità di fattori i quali godino della medesima proprietà. Infatti, sia z un fattore che rende esatta l'equazione

$$Mzdx + Nzdy = o;$$

rappresentando con u l'integrale di quest' equazione, avremo

$$Mzdx + Nzdy = du;$$

moltiplicando i due membri per φu, otterremo

$$\varphi u (Mzdx + Nzdy) = \varphi udu.$$

La forma di φu essendo arbitraria, possiamo fare, per esempio, $\varphi u = 2u^2$, e allora $2u^2du$ essendo una differenziale esatta,

$$2u^2(Mzdx + Nzdy) = 2u^2du$$

ne sarà ancora una; dunque il fattore $2zu^2$ avrà la proprietà di rendere integrabile l'espressione

$$Mdx + Ndy = o.$$

Da ciò si vede chiaro che possiamo fare un' infinità di altre ipotesi sopra φu.

178. Proponiamoci di determinare le condizioni d'integrabilità della differenziale di una funzione di tre variabili x, y, z, questa funzione essendo rappresentata da u, avremo

$$du = Mdx + Ndy + Pdz \ldots (167);$$

per conseguenza,

$$M = \frac{du}{dx},\quad N = \frac{du}{dy},\quad P = \frac{du}{dz}.$$

Possiamo combioare due a due quest' equazioni, in tre differenti modi:

$$1^{\circ}.\ \frac{du}{dx}=M \quad e \quad \frac{du}{dy}=N,$$

$$2.^{\circ}\ \frac{du}{dx}=M \quad e \quad \frac{du}{dz}=P,$$

$$3.^{\circ}\ \frac{du}{dy}=N \quad e \quad \frac{du}{dz}=P.$$

Con una dimostrazione analoga a quella che abbiamo dato precedentemente, dedurremo da quest'equazioni le seguenti:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{dM}{dy}=\frac{dN}{dx} \\ \frac{dM}{dz}=\frac{dP}{dx} \\ \frac{dN}{dz}=\frac{dP}{dy} \end{array}\right\} \ldots . (168).$$

In generale, z se vi sono n variabili, si avranno tante eqoazioni di condizione quanti prodotti distinti due a due possono dare queste variabili, e per conseguenza $\frac{n(n-1)}{2}$ equazioni di condizione.

179. Quando la differenziale du è nulla, l' eqoazione (167) si riduce a

$$Mdx+Ndy+Pdz=0,$$

mettiamola sotto la forma

$$dz=mdx+ndy \ldots (169),$$

facendo

$$\frac{M}{P}=-m,\ \frac{N}{P}=-n \ldots (170).$$

Ora, se consideriamo z come una funzione di x e di y, potremo trattare l'equazione (169) come se essa non contenesse che queste due variabili; per conseguenza, la condizione d'integrabilità equivarrà a ciò, che la differenziale di m, presa rapporto ad y, e divisa per questa variabile, sia eguale alla differenziale di n presa rapporto ad x, e divisa per x. Per ottenere quest' espressioni, osserveremo che la prima non sarà solamente $\frac{dm}{dy}$, ma dovrà avere un secondo termine proveniente dalla differenziazione della variabile z, considerata come funzione di y; questo termine sarà perciò rappresentato, da $\frac{dm}{dz}\cdot\frac{dz}{dy}$. Quello che si dice della differenziale totale, presa rapporto ad y, dovendo applicarsi alla differenziale totale, presa rapporto ad x, l' equazione di condizione sarà nel caso presente,

$$\frac{dm}{dy}+\frac{dm}{dz}\frac{dz}{dy}=\frac{dn}{dx}+\frac{dn}{dz}\frac{dz}{dx};$$

trasportando, e osservando che dall' equazione (169), $\frac{dz}{dx} = m$, e $\frac{dz}{dy} = n$, si ha

$$\frac{dm}{dy} - \frac{dn}{dx} + n\frac{dm}{dz} - m\frac{dn}{dz} = 0 \ldots (171).$$

Ora differenziando l' equazioni (170), si ha

$$\frac{dm}{dy} = -\frac{P\frac{dM}{dy} - M\frac{dP}{dy}}{P^2},$$

$$\frac{dn}{dx} = -\frac{P\frac{dN}{dx} - N\frac{dP}{dx}}{P^2},$$

$$n\frac{dm}{dz} = \frac{N}{P} \cdot \frac{P\frac{dM}{dz} - M\frac{dP}{dz}}{P^2},$$

$$m\frac{dn}{dz} = \frac{M}{P} \cdot \frac{P\frac{dN}{dz} - N\frac{dP}{dz}}{P^2}.$$

Sostituendo questi valori nell' equazione (171), riducendo i due ultimi termini e sopprimendo il denominatore comune P^2, troveremo, cangiando tutti i segni,

$$P\frac{dM}{dy} - M\frac{dP}{dy} - P\frac{dN}{dx} + N\frac{dP}{dx}$$
$$-N\frac{dM}{dz} + M\frac{dN}{dz} = 0 \ldots (172).$$

Tale è l' equazione di condizione che deve aver luogo perchè z possa considerarsi come una funzione di due variabili indipendenti x e y, vale a dire perchè possa esistere un' equazione finita tra queste tre variabili; per conseguenza, se prendiamo a caso un' equazione

$$Mdx + Ndy + Pdz = 0,$$

tra tre variabili, avanti di sapere se l' equazione (172) è adempita, non potremo assicurare che una delle variabili sia funzione delle due altre; vale a dire che, l' equazione differenziale proposta chiama seco l' esistenza di una data equazione tra x, y e z, ovvero, in altri termini, che quest' equazione differenziale abbia un' equazione unica per integrale.

180. Un' equazione differenziale a tre variabili, per la quale l' equazione (172) non sussiste, era altre volte considerata come assurda, o almeno come insignificante: il Monge, come quanto prima faremo vedere, provò che si era in errore. Quando l' equazioni (168) non sono soddisfatte, se rappresentiamo con λ il fat-

tore proprio a rendere $Mdx+Ndy+Pdz$ una differenziale esatta, l'equazioni di condizione (168) diventeranno

$$\frac{d\lambda M}{dy}=\frac{d\lambda N}{dx},$$

$$\frac{d\lambda M}{dz}=\frac{d\lambda P}{dx},$$

$$\frac{d\lambda N}{dz}=\frac{d\lambda P}{dy};$$

effettuando le differenziazioni indicate, si ottiene

$$\left.\begin{aligned}
&M\frac{d\lambda}{dy}-N\frac{d\lambda}{dx}+\lambda\left(\frac{dM}{dy}-\frac{dN}{dx}\right)=0\\
&M\frac{d\lambda}{dz}-P\frac{d\lambda}{dx}+\lambda\left(\frac{dM}{dz}-\frac{dP}{dx}\right)=0\\
&N\frac{d\lambda}{dz}-P\frac{d\lambda}{dy}+\lambda\left(\frac{dN}{dz}-\frac{dP}{dy}\right)=0
\end{aligned}\right\}\ \ldots\ldots(173).$$

Se si moltiplica la prima di quest' eqoazioni per P, la seconda per $-N$, e la terza per M, e che si sommino insieme, i termini che non sono tra le parentesi si distruggeranno; l'equazione essendo divisibile per λ, questo fattore sparirà, e rimarrà

$$P\frac{dM}{dy}-P\frac{dN}{dx}-N\frac{dM}{dz}+N\frac{dP}{dx}+M\frac{dN}{dz}-M\frac{dP}{dy}=0;$$

resultamento il quale non è altra cosa che l'equazione (172), e che si accorda con ciò che abbiamo detto sulla fine del n.° 179; mentre, perchè la proposta sia integrabile con l'aiuto di un fattore λ, bisogna che, come tutti gli altri generi d'integrazione; essa ci conduca a un'equazione unica tra x, y e z, condizione espressa dall'equazione (172). Quando quest'equazione sarà soddisfatta, la determinazione del fattore λ non dipenderà più che da due delle tre equazioni di condizione (173), poichè la loro combinazione con l'equazione (172) riprodurrà la terza.

Ciò facilmente si verifica; infatti, se si avessero per esempio, le due equazioni.

$$M\frac{d\lambda}{dy}-N\frac{d\lambda}{dx}+\lambda\left(\frac{dM}{dy}-\frac{dN}{dx}\right)=0,$$

$$N\frac{d\lambda}{dz}-P\frac{d\lambda}{dy}+\lambda\left(\frac{dN}{dz}-\frac{dP}{dy}\right)=0,$$

aggiungendo la prima moltiplicata per P alla terza moltiplicata per M, e sottraendo da questa somma il prodotto dell'equazione (172) per λ, si troverebbe riducendo, e sopprimendo quindi il fattor comune N,

$$M\frac{d\lambda}{dz}-P\frac{d\lambda}{dx}+\lambda\left(\frac{dM}{dz}-\frac{dP}{dx}\right)=0,$$

che è la seconda dell'equazioni (173).

181. Esaminiamo in qual modo si può determinare l'integrale, quando l'equazione (172) è soddisfatta. A quest' effetto, consideriamo una delle variabili, z per esempio, come costante, la proposta rappresentata da

$$Mdx+Ndy+Pdz=0 \ldots\ldots (174),$$

si ridurrà necessariamente, in quest' ipotesi, a

$$Mdx+Ndy=0 \ldots\ldots (175).$$

Se quest' ultima equazione non è immediatamente integrabile, questo significa che è possibile, che ciò provenga da un fattore comune che sarà scomparso dall' equazione (174). Indichiamolo con λ, avremo, restituendolo nella proposta

$$\lambda Mdx+\lambda Ndy+\lambda Pdz=0 \ldots\ldots (176),$$

e facendo z costante, quest' equazione diventerà

$$\lambda Mdx+\lambda Ndy=0 \ldots\ldots (177).$$

Ora se, con un processo qualunque, si trova un fattore che renda integrabile l' equazione (175), lo considereremo come se fosse quello che abbiamo chiamato λ; allora l' equazione (177) diventando una differenziale esatta, potremo ottenere l' integrale, che rappresenteremo con V. Quest'integrale sarà in generale una funzione delle variabili x, y, e di z, trattata come costante; per conseguenza essa dovrà essere completata mediante una costante arbitraria (n.° 164), funzione di z, che indicheremo con φz; dimodochè avremo

$$V+\varphi z=0 \ldots\ldots (178);$$

differenziando quest' equazione rapporto alla sola variabile z, si otterrà

$$\left(\frac{dV}{dz}+\frac{d\varphi z}{dz}\right)dz;$$

la quantità racchiusa tra le parentesi dovendo essere identica a quella che moltiplica dz, nell' equazione (176), si avrà perciò

$$\lambda P=\frac{dV}{dz}+\frac{d\varphi z}{dz} \ldots\ldots (179),$$

donde si dedurrà

$$\frac{d\varphi z}{dz}=\lambda P-\frac{dV}{dz} \ldots\ldots (180);$$

e siccome la funzione φz, che è stata data dall'integrazione, non può contenere altre variabile che z, seguirà il medesimo di $\frac{d\varphi z}{dz}$. Dunque, in virtù dell' equazione (180), bisognerà ancora che $\lambda P-\frac{dV}{dz}$, si riduca a una funzione della sola variabile z.

Segue da ciò che precede, che dopo aver riconosciuto che l' equazione (172) è soddisfatta; si considererà una delle variabili come costante, z per esempio, il

che ridurrà l'equazione (174) all'equazione (175). Si esaminerà quindi se i due termini $Mdx+Ndy$ possono diventare integrabili, moltiplicandoli per una quantità, che abbiamo indicata con λ. Quando saremo giunti a trovare questo fattore si determinerà V; i valori di λ, di $\frac{dV}{dz}$ e di P, essendo allora sostituiti nell'equazione (180), faranno conoscere $\frac{d\varphi z}{dz}$. Per conseguenza, integrando $\frac{d\varphi z}{dz}dz$, otterremo il valore di φz, che si metterà, come quello di V, nell'equazione (178), il che darà l'integrale cercato.

182. Si abbia per esempio

$$yzdx-xzdy+yxdz=0 \ldots\ldots (181),$$

la quale soddisfà all'equazione (172). In principio si tratta d'integrare

$$yzdx-xzdy=0,$$

considerando z come costante. Per eseguir ciò, scriveremo come segue quest'equazione:

$$z(ydx-xdy)=0;$$

e osservando che la parte che è tra le parentesi diventa la differenziale esatta di $\frac{x}{y}$ quando si moltiplichi per $\frac{1}{y^2}$, si riconosce, che nel caso presente, si ha

$$\lambda=\frac{1}{y^2}, \quad \text{e} \quad V=\frac{zx}{y}.$$

Differenziando dunque quest'ultima quantità rapporto a z sola, l'espressione $\frac{dV}{dz}$ diventa $\frac{x}{y}$. Questo valore e quello di λ essendo sostituiti nell'equazione (180), quest'equazione diventerà

$$\frac{d\varphi z}{dz}=\frac{P}{y^2}-\frac{x}{y};$$

e siccome P non è che il moltiplicatore di dz dell'equazione (181), ne restituiremo il valore, ed avremo

$$\frac{d\varphi z}{dz}=\frac{x}{y}-\frac{x}{y},$$

o piuttosto

$$\frac{d\varphi z}{dz}=0;$$

dunque $\varphi z=costante$.

Questo valore e quello di V convertono finalmente l'equazione (178) in

$$\frac{zx}{y}+C=0,$$

che è l'integrale della proposta.

183. Prendiamo per secondo esempio l' equazione

$$zydx+xzdy+xydz+az^2dz=o,$$

la quale soddisfà egualmente all' equazione di condizione (172). Integreremo dunque $zydx+xzdy$, considerando z come costante, ed avremo

$$zxy+\varphi z=o \quad . \; . \; . \; . \; . \; (182).$$

Quest' integrazione essendosi effettuata, senza che si sia avuto bisogno di restituire un fattore, si vede che nel caso presente λ può considerarsi come eguale all' unità. Così l' espressione $\frac{dV}{dz}$ si otterrà differenziando solamente il prodotto zxy rapporto a z, ciò che darà $\frac{dV}{dz}=xy$. Per mezzo di questa quantità e di quella di P, che è $xy+az^2$, l' equazione (180) diventerà

$$\frac{d\varphi z}{dz}=xy+az^2-xy,$$

o piuttosto

$$\frac{d\varphi z}{dz}=az^2,$$

moltiplicando per dz, e integrando rapporto a z, otterremo

$$\varphi z=\frac{az^3}{3}+C=o;$$

donde concluderemo che l' integrale cercato è

$$xyz+\frac{az^3}{3}+C.$$

184. Quando l' equazione (172) non è soddisfatta, non si potrebbe ammettere che esista un' equazione la quale, essendo differenziata, produca la proposta; per conseguenza l' equazione (180), la quale riposa sopra quest' ipotesi, non potrebbe sussistere; questo è ciò che và a diventare sensibile nel seguente esempio:
Sia dunque

$$xydx-zxdy+(z^2-y^2)dz=o;$$

un' equazione la quale non soddisfà all' equazione di condizione (172). Esaminiamo di che cosa si compone, nel caso presente, la parte $\lambda P-\frac{dV}{dz}$ che formerebbe il secondo membro dell' equazione (180) se quest' equazione avesse luogo. Per ciò, considerando z come costante, avremo

$$xydx-zxdy=o,$$

equazione che diventa integrabile se si divide per xy; dunque

$$\lambda=\frac{1}{xy}, \quad \text{e} \quad V=x-z\log y;$$

per conseguenza $\lambda P - \frac{dV}{dz}$, ha per valore

$$\frac{z^2-y^2}{xy}+\log y.$$

Ora, questa quantità essendo una funzione di tre variabili x, y, z, non può ridursi a una funzione di z sola, come l'esigerebbe l'equazione (180), se essa avesse luogo; dunque, nel caso attuale, quest'equazione (180) non potrebbe sussistere.

185. Sia ora $Mdx+Ndy+Pdz=0$ un'equazione differenziale, per la quale l'equazione di condizione (172) non si verifica, indichiamo con λ il fattore proprio solamente a rendere integrabile la parte $Mdx+Ndy$, presa considerando z come costante, e moltiplichiamo la proposta per questo fattore, avremo

$$\lambda Mdx+\lambda Ndy+\lambda Pdz=0 \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (183);$$

integrando la parte $\lambda Mdx+\lambda Ndy$, nell'ipotesi di z costante, l'integrale che otterremo potrà rappresentarsi, come nel n.° 181, con

$$V+\varphi z=0.$$

La differenziale di quest'equazione essendo presa rapporto alle tre variabili, non potremo concluderne la sua identità con l'equazione (183); poichè l'equazione di condizione (172) non sussistendo, ne resulta che l'equazione (183) non può considerarsi come proveniente dalla differenziazione di un'altra equazione; e siccome l'equazione (180) riposa sopra quest'ipotesi, si vede che allora essa non può più esistere: ma se non è permesso ammettere che la proposta provenga da una sola equazione differenziata, quando l'equazione (172) non sussiste, cangiamo dunque d'ipotesi, e consideriamo questa proposta come il risultamento di due equazioni. Prendendo $V+\varphi z=0$ per la prima, potremo adottare per la seconda una relazione arbitraria tra x, y e z, purchè però, congiuntamente con la prima, essa conduca alla distruzione di tutti i termini dell'equazione (183). Sopponiamo dunque che questa relazione sia quella che è data dall'equazione (180), equazione che non sussisteva più quando si esigeva che essa soddisfacesse alla proposta; ma, che nell'ipotesi attuale, è ammissibile, poichè è facile riconoscere che col concorso dell'equazione (178) essa soddisfà all'equazione (183).

Infatti differenziando l'equazione (178) rapporto alle tre variabili, l'equazione (177) comincerà dal dare i termini i quali provengono dalla differenziazione presa rapporto a x e ad y; poichè abbiamo veduto che l'equazione (178) era l'integrale dell'equazione (177) presa rapporto a queste due variabili. Si aggiungerà inseguito ai termini così ottenuti $\lambda Mdx+\lambda Ndy$, quelli che provengono dalla differenziazione dell'equazione (178), presa rapporto a z, e si avrà mediante di ciò

$$\lambda Mdx+\lambda Ndy+\frac{dV}{dz}dz+\frac{d\varphi z}{dz}dz=0.$$

Se in quest'equazione si pone in vece degli ultimi due termini i loro valori dedotti dall'equazione (180), otterremo

$$\lambda Mdx+\lambda Ndy+\lambda Pdz=0;$$

eqnazione nella quale si riconosce la proposta, e la quale è per conseguenza soddisfatta interamente dalle due equazioni

$$\left.\begin{array}{l} V+\varphi z=0 \ldots\ldots \\ \frac{dV}{dz}+\frac{d\varphi z}{dz}=\lambda P \ldots \end{array}\right\} \ldots\ldots (184),$$

impiegate simultaneamente.

186. Prendiamo per esempio l'equazione

$$ydy+zdx=dz;$$

se si considera z come costante, il fattore proprio a rendere integrabile la parte $ydy+zdx$, è 2; per conseguenza avremo

$$2ydy+2zdx-2dz=0 \ldots\ldots (185);$$

quest'equazione sarà soddisfatta dal sistema delle due seguenti:

$$\left.\begin{array}{l} y^2+2zx+\varphi z=0 \ldots \\ 2x+\frac{d\varphi z}{dz}+2=0 \ldots \end{array}\right\} \ldots\ldots (186).$$

Infatti, la prima essendo differenziata rapporto a tutte le variabili, darà

$$2ydy+2zdx+2xdz+\frac{d\varphi z}{dz}dz=0;$$

ricavando da quest'equazione il valore di $2ydy+2zdx$, e sostituendolo nella equazione (185), questa si ridurrà a

$$-2xdz-\frac{d\varphi z}{dz}dz-2dz=0,$$

equazione soddisfatta da se stessa, in virtù della seconda dell'equazioni (186).

187. L'equazioni (186) provano che la forma della funzione φz è assolutamente arbitraria, e che, per conseguenza, se facciamo, per esempio, $\varphi z=z^3$, vi soddisfaremo ancora col sistema dell'equazioni

$$\left.\begin{array}{l} y^2+2zx+z^3=0 \\ 2x+3z^2+2=0 \end{array}\right\} \ldots\ldots (187).$$

188. Per mezzo di queste due equazioni tra tre variabili potremo costruire una curva a doppia curvatura la quale, in tutti i suoi punti, soddisfarà alla proposta; ma, se invece di prendere $\varphi z=z^3$, si prendesse per φz un'altra funzione di z, si determinerebbe un'altra curva a doppia curvatura, la quale soddisfarebbe egualmente alla proposta; donde segue che l'equazioni (186) rappresentano un seguito di curve a doppia curvatura le quali soddisfanno alla proposta, e le quali son legate tra esse dalla comune proprietà che le loro equazioni non differiscono tra loro che per i termini rappresentati da φz e da $\frac{d\varphi z}{dz}$.

Per provare che l'equazioni (187), appartengono a una curva a doppia curvatura; cangiamo le y in z, e le z in y, col fine di situare gli assi coordinati

in un modo più comodo per la nostra dimostrazione; avremo le equazioni

$$z^2+2xy+y^2=0 \ldots\ldots (188),$$

$$2x+3y^2+z=0 \ldots\ldots (189).$$

Se la prima esistesse sola, si potrebbe, col suo mezzo, costruire una superficie curva. Infatti, se per tutti i punti del piano delle x, y, che supporremo, secondo il solito, orizzontale, eleviamo delle perpendicolari, i valori saranno determinati per mezzo dell' equazione (188); e si sente che l' estremità di quest' ordinate z costituiranno una superficie curva. Quando alcune di queste ordinate sono immaginarie, ciò è un indizio che la superficie non si estende nei posti ove sussistono queste ordinate immaginarie.

Se ora consideriamo l' equazione (189), si stabilisce, con ciò solo, tra x e y una relazione che obbliga i piedi dell' ordinate z ad essere sopra la curva che appartiene all' equazione (189), e si vede che, in questo caso, le estremità dell' ordinate z non formano più una superficie, ma una curva. Il sistema di queste ordinate z costituisce allora una superficie cilindrica, la cui intersezione col piano delle x, y, è data dall' equazione (189). Ed è l' intersezione di questa superficie con quella che determina l' equazione (189), che forma la curva di cui parliamo; ed è evidente che questa curva è a doppia curvatura, poichè si sa che l' intersezione di due superficie curve forma una curva a doppia curvatura.

Esaminiamo ora la teoria delle costanti arbitrarie.

189. Un' equazione $V=0$ tra x, y e delle costanti, può considerarsi come l' integrale completo di una certa equazione differenziale il cui ordine dipenderà dal numero delle costanti che $V=0$ conterrà. Queste costanti si chiamano *costanti arbitrarie*, perchè se una è rappresentata da a, e che V ovvero una delle sue differenziali sia messa sotto la forma $f(x,y)=a$, si vede che a non sarà altra cosa che la costante arbitraria che darà l' integrazione di $df(x,y)$. Premesso ciò, se l' equazione differenziale in questione è dell' ordine n, ciascuna integrazione introducendo una costante arbitraria, bisognerà che $V=0$, che si considera data dall' ultima di queste integrazioni, contenga almeno n costanti arbitrarie di più della nostra equazione differenziale.

Se un' equazione in x e in y non contenesse n costanti arbitrarie di più dell' equazione differenziale dell' ordine n, essa non potrebbe considerarsi come l' equazione primitiva. Per esempio, l' equazione $y=ax^3$, che ci conduce a $\frac{d^2y}{dx^2}=6ax$, mediante due successive differenziazioni, non è che un integrale particolare. Infatti, quest' integrale si ottiene facendo $b=0$ e $c=0$ nell' integrale completo, che è $y=ax^3+bx+c$.

Osserviamo ancora che non dobbiamo considerare che come una sola costante quelle che insieme affettano una medesima potenza di x. Ed è perciò che nell' equazione $y=(a+b)x+c$, si conta $a+b$ per una sola costante.

Siano dunque

$$\left.\begin{array}{l} F(x,y)=0 \ldots\ldots\ldots\ldots \\ F\left(x,y,\ \frac{dy}{dx}\right)=0 \ldots\ldots \\ F\left(x,y,\ \frac{dy}{dx},\ \frac{d^2y}{dx^2}\right)=0 \ldots \end{array}\right\} \ldots (190),$$

l'equazione primitiva di un'equazione differenziale del second' ordine, e le sue differenziali immediate; potremo, tra le due prime di queste tre equazioni, eliminare successivamente le costanti a e b, e ottenere

$$\left.\begin{array}{l}\gamma\left(x,y,\frac{dy}{dx},b\right)=o\\ \gamma\left(x,y,\frac{dy}{dx},a\right)=o\end{array}\right\}\ldots\ldots\ldots(191).$$

Se, senza conoscere $F(x,y)=o$, si giungesse a trovare quest' equazioni, basterebbe eleminare tra esse $\frac{dy}{dx}$ per ottenere

$$F(x,y)=o,$$

la quale sarebbe l'integrale completo, poichè essa conterrebbe le costanti arbitrarie a e b.

190. Se si elimina la costante b tra la prima dell'equazione (191) e la sua differenziale immediata, e che si elimini egualmente la costante a tra la seconda dell'equazioni (191) e la sua differenziale immediata, otterremo separatamente due equazioni del second' ordine, le quali non differiranno punto tra esse, altrimenti i valori di x e di y non sarebbero i medesimi nell'una e nell'altra. Segue da ciò che un'equazione differenziale del second' ordine può provenire da due equazioni differenziali del prim' ordine, le quali sono necessariamente differenti, poichè la costante arbitraria di una non è la medesima che la costante arbitraria dell'altra. L'equazioni (191) sono ciò che chiamiamo gli integrali primi di un'equazione differenziale del second' ordine che è unica, e la cui equazione primitiva $F(x,y)=o$ è il secondo integrale.

191. Prendiamo per esempio l'equazione $y=ax+b$, la quale, a motivo delle sue due costanti, può considerarsi come l'equazione primitiva di un'equazione del second' ordine. Se ne deduce con la differenziazione, e quindi mediante l'equazione di a,

$$\frac{dy}{dx}=a,\quad y=x\frac{dy}{dx}+b\ \ldots\ldots(192).$$

Questi due primi integrali dell'equazione del second' ordine che si cerca, essendo differenziati ciascuno in particolare, conducono egualmente, mediante l'eliminazione di a e di b, all'equazione unica $\frac{d^2y}{dx^2}=o$.

Nel caso in cui il numero delle costanti superi quello delle costanti arbitraria richieste, le costanti eccedenti, per la ragione che esse sono legate alle medesime equazioni, non conducono ad alcuna nuova relazione. Cerchiamo, per esempio, l'equazione del second' ordine, di cui la primativa è

$$y=\frac{1}{2}ax^2+bx+c\ \ldots\ldots(193);$$

differenziandola, si ottiene

$$\frac{dy}{dx}=ax+b\ \ldots\ldots(194).$$

L'eliminazione di b, e quindi quella di a tra queste equazioni danno sepa-

ratamente questi due primi integrali:

$$\left.\begin{aligned} y&=x\frac{dy}{dx}-\frac{1}{2}ax^2+c \\ y&=\frac{1}{2}x\frac{dy}{dx}+\frac{1}{2}bx+c \end{aligned}\right\}\ldots\ldots(195).$$

Eliminando $\frac{dy}{dx}$ tra l' equazioni (195), si cade sopra l' equazione primitiva (193). Da un' altra parte, se si differenzia la prima dell' equazioni (195), si troverà riducendo

$$\frac{d^2y}{dx^2}=a\ldots\ldots(196).$$

Se al contrario si fosse differenziata la seconda dell' equazioni (195), si sarebbe trovato riducendo

$$x\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dy}{dx}-b.$$

192. Applichiamo simili considerazioni all' equazione differenziale del terz' ordine; differenziando tre volte di seguito l' equazione $F(x,y)=0$, avremo

$$F\left(x,y,\frac{dy}{dx}\right)=0,$$

$$F\left(x,y,\frac{dy}{dx},\frac{d^2y}{dx^2}\right)=0,$$

$$F\left(x,y,\frac{dy}{dx},\frac{d^2y}{dx^2},\frac{d^3y}{dx^3}\right)=0;$$

quest' equazioni ammettendo i medesimi valori per ciascuna delle costanti arbitrarie che contiene $F(x,y)=0$, possiamo in generale eliminare queste costanti tra quest' ultima e le tre equazioni precedenti, e ottenere un resultamento che rappresenteremo con

$$f\left(x,y,\frac{dy}{dx},\frac{d^2y}{dx^2},\frac{d^3y}{dx^3}\right)=0\ldots\ldots(197),$$

questa sarà l' equazione differenziale del terz' ordine di $F(x,y)=0$, e dalla quale le tre costanti arbitrarie saranno eliminate; reciprocamente $F(x,y)=0$, sarà l' integrale terzo dell' equazione (197).

193. Se eliminiamo successivamente ciascuna delle costanti arbitraria tra l' equazione $F(x,y)=0$ e quelle che si ricaverebbe mediante la differenziazione, otterremo tre equazioni del prim' ordine, le quali saranno gl' integrali secondi dell' equazione (196).

Finalmente, se si elimina due delle tre costanti arbitrarie, con l' aiuto dell' equazione $F(x,y)=0$ e dell' equazioni che ne dedurremo, mediante due dif-

fereuziazioni successive, vale a dire se si eliminano queste costanti tra le equazioni

$$\left.\begin{array}{r} F(x,y)=0 \\ F\left(x,y,\frac{dy}{dx}\right)=0 \\ F\left(x,y,\frac{dy}{dx},\frac{d^2y}{dx^2}\right)=0 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots (198),$$

potremo conservare successivamente nell'equazione che si dedurrà dall'eliminazione, una delle tre costanti arbitrarie; per consegnenza si avranno tante equazioni quante costanti arbitrarie. Siano dunque a, b, c queste costanti arbitrarie; l'equazioni delle quali parliamo, considerate solamente sotto il rapporto delle costauti arbitrarie che esse contengono, potranno rappresentarsi come segue:

$$\varphi c=0, \quad \varphi b=0, \quad \varphi a=0 \quad \ldots\ldots (199).$$

Siccome l'equazioni (198) concorrono tutte all'elimioazione che ci dà una di quest'ultime, segne da ciò, che l'equazioni (199) saranno ciascuna di second'ordine; si chiamano gli integrali primi dell'equazione (197).

194. In generale, un'equazione differenziale dell'ordine n avrà un numero n d'integrali primi, i quali conteranno per conseguenza i coefficienti differenziali da $\frac{dy}{dx}$ fino a $\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$ inelusivamente, cioè un numero $n-1$ di coefficienti differenziali; e si vede che quando quest'equazioni sono tutte conosciute, basta eliminare tra esse questi coefficienti differenziali per ottenere l'equazione primitiva.

195. Si sa che un integrale particolare può sempre dedursi dall'integrale completo, dando un valore conveniente alla costante arbitraria che contiene quest'ultimo.

Per esempio, se si ha l'equazione

$$xdx+ydy=dy\sqrt{x^2+y^2-a^2},$$

il cui integrale completo è

$$y+c=\sqrt{x^2+y^2-a^2},$$

e che per maggior comodità nei calcoli, si faccia sparire i radicali con l'elevazione al quadrato, la proposta diventerà

$$\left(a^2-x^2\right)\frac{dy^2}{dx^2}+2xy\frac{dy}{dx}+x^2=0 \quad \ldots\ldots (200),$$

e si avrà per l'integrale completo

$$2cy+c^2-x^2+a^2=0 \quad \ldots\ldots (201).$$

È certo che prendendo per c un valore costante arbitrario $c=2a$, si otterrà quest'integrale particolare

$$2cy+5a^2-x^2=0,$$

che avrà la proprietà di soddisfare all' equazione proposta (200) egualmente che l' integrale completo. Infatti, si ricava da quest' integrale particolare

$$y=\frac{x^2-5a^2}{2c}, \quad \frac{dy}{dx}=\frac{x}{c};$$

questi valori riducono la proposta a

$$(x^2-a^2)\frac{x^2}{c^2}=\frac{x^2}{c^2}(x^2+c^2-5a^2);$$

equazione che diventa identica, sostituendo nel secondo membro il valore di c^2 che ci somministra la relazione $c=2a$, stabilita tra le costanti.

Per lungo tempo si credette che questa proprietà dell' integrale completo fosse generale, e che quando un' equazione differenziale in x e in y fosse data, non si potava incontrare un' equazione finita tra le medesime variabili, la quale non fosse un caso particolare dell' integrale completo, dando, come l' abbiamo fatto, un valore arbitrario ad una costante; ma si riconobbe finalmente che ciò non seguiva sempre, e l' Eulero stesso, in una memoria pubblicata nel 1756, considerava come un paradosso del calcolo integrale il fatto singolare dell' equazione

$$x^2+y^2=a^2 \quad \ldots \quad (202),$$

la quale ha la proprietà di soddisfare all' equazione differenziale (200), e la quale non è punto compresa nel suo integrale completo. Infatti, quest' equazione essendo differenziata, dà $xdx=-ydy$; questo valore e quello di x^2+y^2 essendo sostituiti nell' equazione (200), ne fanno distruggere tutti i termini, e ciò non ostante l' equazione (202) non è compresa nell' integrale completo; poichè, qualunque valore costante che si dia a c nell' equazione (201), mai quest' equazione potrà portare l' equazione (202), poichè la prima, essendo quella di una parabola, non può, in verun caso, diventare l' equazione (202) che è quella di un circolo.

Quest' equazione (202), che soddisfà alla proposta senz' essere contenuta nell' integrale completo, si chiama una soluzione particolare o singolare della proposta. Il Clairaut, fino dal 1734, aveva osservato questo fatto, e si credette per molto tempo che queste sorti di equazioni non fossero legate all' integrale completo; il Lagrange fece vedere che ne dipendevano, e per questo motivo espose la teoria che svilupperemo.

196. Sia $Mdx+Ndy=0$, un' equazione differenziale del prim' ordine di una funzione di due variabili x e y; possiamo concepire quest' equazione come proveniente dall' eliminazione di una costante c fra una certa equazione del medesimo ordine, che rappresenteremo con $mdx+ndy=0$, e l' integrale completo $F(x, y, c)=0$, che indicheremo con u. Ora, siccome tutto si riduce a prendere la costante c in modo che l' equazione $Mdx+Ndy=0$ sia il risultamento dell' eliminazione, si sente che è ancora permesso di far variare questa costante c, purchè l' equazione $Mdx+Ndy=0$ abbia luogo: in questo caso, l' integrale completo $F(x, y, c)=0$ prenderà una maggior generalità, e rappresenterà un' infinità di curve del medesimo genere, che differiranno l' une dall' altre per un parametro, vale a dire per una costante. Quest' ipotesi è ammissibile, poichè quando l' equazione $Mdx+Ndy=0$ è data, è nello spirito dell' analisi di non rigettare veruno dei mezzi che hanno potuto dare quest' equazione.

197. Supponiamo dunque che l' integrale completo essendo differenziato, consi-

derando c come variabile, si sia ottenuto

$$dy = \frac{dy}{dx}dx + \frac{dy}{dc}dc \quad \ldots \quad (203),$$

equazione, che per renderla più semplice, scriveremo come segue:

$$dy = pdx + qdc. \quad \ldots \quad (204).$$

È certo che se p restando finito, qdc è nullo, il risultamento dell'eliminazione di c variabile tra $F(x, y, c) = o$ e l'equazione (204), sarà il medesimo di quello di c costante tra $F(x, y, c) = o$ e l'equazione $dy = pdx$ (questo risultamento è, per ipotesi, $Mdx + Mdy = o$), poichè l'equazione (204), per la ragione che qdc è nullo, non differisce da $dy = pdx$; ma perchè si possa avere $qdc = o$, bisogna che uno dei fattori di quest'equazione sia nullo, vale a dire che si abbia

$$dc = o, \quad \text{ovvero} \quad q = o.$$

Nel primo caso, $dc = o$ dà $c = costante$, come ciò ha luogo negli integrali particolari; non sarà dunque che il secondo caso che potrà convenire ad una soluzione particolare: ora q essendo il coefficiente di dc dell'equazione (203), si vede che $q = o$ equivale

$$\frac{dy}{dc} = o. \quad \ldots \quad (205).$$

Quest'equazione conterrà c o ne sarà indipendente; se essa contiene c, possono succedere due casi: o l'equazione $q = o$ non conterrà che c e delle costanti, ovvero quest'equazione conterrà c con delle variabili. Nel primo caso l'equazione $q = o$ darà ancora $c = costante$, e nel secondo caso essa darà $c = f(x, y)$. Ben inteso che quest'equazione contiene come casi particolari quelli in cui si avesse $c = fx$, ovvero $c = fy$. Questo valore, essendo sostituito nell'equazione $F(x, y, c) = o$, la cangerà in un'altra funzione di x e di y, la quale soddisfarà alla proposta, senza essere compresa nel suo integrale completo e per conseguenza ne sarà una soluzione singolare; ma si avrà un integrale particolare se l'equazione $c = f(x, y)$, per mezzo dell'integrale completo si riducesse ad una costante.

198. Quando il fattore $q = o$ dell'equazione $qdc = o$ non contiene la costante arbitraria c, si conoscerà se l'equazione $q = o$ dà luogo ad una soluzione particolare, combinando quest'equazione con l'integrale completo. In quest'ultimo caso, ove q non contiene c, possiamo domandare come si ha il diritto di eguagliare $q = o$. Si risponderà che il valore che si è dato a c nell'integrale completo determina l'eguaglianza di q a zero. Infatti, quando si ricava il valore $x = fy$ dall'equazione $q = o$, per sostituirlo in $F(x, y, c)$, e ottenere $F(y, fy, c)$, è lo stesso che dedurre x da $F(x, y, c) = o$, e di sostituirne il valore in q. Per conseguenza, il risultamento di quest'ultima operazione sarà ancora $-F(y, fy, c)$. Non si tratta che di provare che questo risultamento è eguale a zero per constatare che segue il medesimo di q; ora questo è ciò che ha luogo, considerando $F(y, fy, c)$ come proveniente dalla prima operazione, vale a dire da $F(x, y, c) = o$, nella quale si sarebbe messo per x il suo valore. Per esempio, se da $q = o$ si deduce $x = M$, e che si metta questo valore nell'integrale completo $F(x, y, c) = o$, si otterrà

$$c = costante = B, \quad \text{ovvero} \quad c = fy.$$

Nel primo caso, $q = o$ dà un integrale particolare; poichè cangiando c in B nell'integrale completo, non si farà che dare un valore particolare alla costante

come egualmente si fa quando si passa dall' integrale completo a un integrale particolare. Nel secondo caso, al contrario, il valore fy introdotto in luogo di c, nell' integrale completo, stabilirà tra x e y una relazione differente da quella che aveva luogo quando non si faceva che sostituire a c un valore costante arbitrario. Si avrà dunque, in questo caso, una soluzione particolare. Quello che si dice di y può applicarsi ad x.

199. Succede alcune volte che il valore di c si presenta sotto la forma di $\frac{0}{0}$: ciò indica un fattor comune che bisogna fare sparire. Questo è quello che succede quando c non entra che al primo grado nell' integrale completo $u=0$.

Infatti, quest' integrale è allora di questa forma:

$$P+cQ=0 \ldots\ldots (206);$$

e con P e Q indichiamo delle funzioni di x e di y. Se differenziamo quest' equazione rapporto a x, a y e a c, avremo

$$dP+cdQ+Qdc=0 \ldots (207);$$

e poichè le variabili contenute in P e in Q sono x e y, potremo rappresentare

$$dP \quad \text{con} \quad Mdx+Ndy,$$

e

$$dQ \quad \text{con} \quad mdx+ndy.$$

Sostituendo questi valori nell' equazione (207), essa ci darà

$$dy=-\frac{M+cm}{N+cn}dx-\frac{Q}{N+cn}dc=0.$$

Nell' ipotesi di una soluzione particolare, il termine affetto da dc sparisce e ci dà

$$\frac{Q}{N+cn}=0.$$

Quest' equazione, la quale non può ridursi, perchè Q non contiene c, non è soddisfatta che facendo $N+cn=\infty$, il che dà $c=\infty$, ovvero facendo $Q=0$.

Il primo caso ci fa ricadere sopra un integrale particolare, poichè tutti gl' integrali di questa natura sono compresi nei valori che si danno a c da zero fino all' infinito. Non abbiamo dunque, per determinare la nostra soluzione particolare, se essa esiste, che l' equazione $Q=0$; ma quando $Q=0$, l' equazione (207) si riduce a

$$dP+cdQ=0;$$

se si deduce il valore di c, e che si sostituisca nell' equazione (206), otterremo

$$P-\frac{dP}{dQ}Q=0,$$

ovvero mandando via i denominatori

$$PdQ+QdP=0 \ldots (208);$$

così, nel caso presente, l' integrale completo $u=0$ e la proposta $U=0$ non sa-

ranno dunque altra cosa che l'equazioni (206) e (208). Si deduce dalla prima

$$c = -\frac{P}{Q};$$

questo valore di c si riduce a $\frac{0}{0}$ quando P e Q hanno un fattor comune che fa sparire un valore dato alle variabili, e che metteremo in evidenza facendo $P = \lambda P'$ e $Q = \lambda Q'$. Allora l'equazioni (206) e (208) diventeranno,

$$\lambda(P' + cQ') = 0, \quad \lambda(P'dQ - Q'dP) = 0 \ldots . (209).$$

La seconda, che rappresenta la proposta contiene per ipotesi dei termini in dx e in dy, i quali non possono trovarsi che tra le parentesi, poichè λ, sotto il rapporto di fattore della prima dell'equazioni (209); non potrebbe contenere che delle x e delle y; e siccome l'operazione della differenziazione tende a diminuire gli esponenti delle variabili, bisogna che le variabili siano più elevate nella prima equazione che nella seconda, che ne deriva, e che, per conseguenza, $P' + cQ'$, che non è comune con loro, sia una funzione di x e di y; e siccome d'altra parte $P' + cQ'$ contiene una costante arbitraria c la quale non si trova in λ, si vede che $P' + cQ'$ ha tutti i caratteri dell'integrale completo, e che λ, al contrario, non può essere che un fattore estraneo all'equazione differenziale.

200. Applichiamo ora questa teoria alla ricerca delle soluzioni particolari, quando l'integrale completo è dato.

Sia l'equazione

$$ydx - xdy = a\sqrt{dx^2 + dy^2} \ldots \ldots . (210),$$

il cui integrale completo si determina col seguente metodo:

Se si divide quest'equazione per dx, e che si faccia $\frac{dy}{dx} = p$, si comincia da ottenere

$$y - px = a\sqrt{1 + p^2} \ldots \ldots (211);$$

differenziando rapporto ad x e a p, si ha

$$dy - pdx - xdp = \frac{apdp}{\sqrt{1 + p^2}};$$

osservando che $dy = pdx$, quest'equazione si riduce a

$$xdp + \frac{apdp}{\sqrt{1 + p^2}} = 0,$$

e ci si soddisfà facendo $dp = 0$. Quest'ipotesi dà $p = costante = c$, valore che essendo messo nell'equazione (211), ci fa ottenere

$$y - cx = a\sqrt{1 + c^2} \ldots \ldots . (212).$$

Quest'equazione contenendo una costante arbitraria c, la quale non era nella proposta (210), ne è perciò l'integrale completo.

201. Premesso ciò, la parte qdc dell'equazione (204) si otterrà differenziando l'equazione (212) rapporto a c, considerata come sola variabile; operando così, si avrà

$$xdc+\frac{acdc}{\sqrt{1+c^2}}=0;$$

per conseguenza, il coefficiente di dc, eguagliato a zero, ci darà

$$x=-\frac{ac}{\sqrt{1+c^2}} \; \ldots\ldots \; (213).$$

Per avere il valore di c, eleviamo quest'equazione al quadrato, troveremo

$$(1+c^2)x^2=a^2c^2;$$

donde avremo

$$c^2=\frac{x^2}{a^2-x^2},$$

$$1+c^2=\frac{a^2}{a^2-x^2}$$

e

$$\sqrt{1+c^2}=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}};$$

per mezzo di quest'ultima equazione, eliminando il radicale dell'equazione (213), otterremo in seguito

$$c=-\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} \; \ldots\ldots \; (214).$$

[Non abbiamo affetto $\sqrt{1+c^2}$ del doppio segno, perchè x e c essendo di segni contrari nell'equazione (213), bisogna che segua il medesimo nell'equazione (214)].

Questo valore e quello di $\sqrt{1+c^2}$, essendo messi nell'equazione (212), avremo

$$y+\frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{a^2}{\sqrt{a^2-x^2}},$$

donde ricaveremo

$$y=\frac{a^2-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}=\sqrt{a^2-x^2},$$

equazione che, essendo elevata al quadrato, ci darà

$$y^2=a^2-x^2 \; \ldots\ldots \; (215);$$

e si vede che quest'equazione è effettivamente una soluzione particolare; poichè differenziandola, si ottiene $dy=-\frac{xdx}{y}$; questo valore cangia l'equazio-

ne (210) in

$$ydx+\frac{x^2}{y}dx=a\sqrt{dx^2+\frac{x^2dx^2}{y^2}},$$

riducendo al medesimo denominatore, e in virtù dell' equazione (215), sostituendo a^2 invece di x^2+y^2, si ottiene $a^2=a^2$.

202. Nell' applicazione che abbiamo data dei principii dimostrati n.° 197, abbiamo determinato il valore di c eguagliando a zero il coefficiente differenziale $\frac{dy}{dc}$. Questo processo può alcune volte essere insufficiente. Infatti l' equazione

$$dy=pdx+qdc,$$

essendo messa sotto questa forma:

$$Adx+Bdy+Cdc=0,$$

ove A, B e C sono funzioni di x e di y, ne ricaveremo

$$\left.\begin{aligned}dy&=-\frac{A}{B}dx-\frac{C}{B}dc\\ dx&=-\frac{B}{A}dy-\frac{C}{A}dc\end{aligned}\right\}\quad\ldots.\ (216),$$

e si vede che se tutto quello che abbiamo detto di y, considerato come funzione di x, è applicato ad x considerato come funzione di y, il valore del coefficiente di dc non sarà lo stesso, e che basterebbe soltanto che qualche fattore di B distruggesse in C un altro fattore differente da quello che potrebbe distruggere un fattore di A, perchè i valori del coefficiente di dc, nelle due ipotesi, comparissero interamente differenti. Così, quantunque bene spesso le equazioni $\frac{C}{B}=0$ e $\frac{C}{A}=0$ diano per c il medesimo valore, ciò non succede sempre. Ed è per questo che quando avremo determinato c per mezzo dell'equazione $\frac{dy}{dc}=0$; non sarà inutile vedere se l' ipotesi di $\frac{dx}{dc}$ porti al medesimo resultamento.

203. Il Clairaut fu il primo ad osservare una classe generale di equazioni capaci di una soluzione particolare; quest' equazioni sono contenute nella seguente:

$$y=\frac{dy}{dx}x+F\left(\frac{dy}{dx}\right),$$

equazione che potremo rappresentare con

$$y=px+Fp\ \ldots\ldots\ (217);$$

differenziando, troveremo

$$dy=pdx+xdp+\frac{dFp}{dp}dp;$$

quest' equazione, a motivo di $dy=pdx$, si riduce a

$$xdp+\frac{dFp}{dp}dp=0;$$

e siccome dp è fattor comune, essa può scriversi come segue:

$$\left(x+\frac{dFp}{dp}\right)dp=0.$$

Si soddisfà a quest' equazione facendo $dp=0$, il che dà $p=costante=c$; per conseguenza, sostituendo questo valore nell' equazione (217), troveremo

$$y=cx+Fc;$$

quest' equazione è l' integrale completo della proposta, poichè una costante arbitraria c è stata introdotta nell' integrazione. Se si differenzia quest' equazione rapporto a c, si avrà

$$\left(x+\frac{dFc}{dc}\right)dc=0,$$

per conseguenza, eguagliando a zero il coefficiente di dc, si ha l' equazione

$$x+\frac{dFc}{dc}=0,$$

la quale, con la sostituzione di c nell' Integrale completo, darà la soluzione particolare.

204. Abbiamo veduto che un' equazione differenziale del prim' ordine

$$Mdx+Ndy=0$$

essendo data, si poteva considerare come il risultamento dell' eliminazione di una costante c tra l' integrale completo e la sua differenziale $y=pdx$, e che il resultamento era lo stesso come se, supponendo questa costante variabile, l' eliminazione si effettuasse tra l' integrale completo $F(x,y,c)=0$ e $dy=pdx+qdc$, ma sotto la condizione che si avesse $q=0$. Egualmente, se si ammette che l' equazione differenziale del second' ordine,

$$M\frac{d^2y}{dx^2}+N\frac{dy}{dx}+P=0,$$

sia il resultamento dell' eliminazione di una costante che si sarebbe fatta variare, siccome si hanno in questo caso le due equazioni

$$\left.\begin{aligned}dy&=pdx+qdc\\ d.\frac{dy}{dx}&=p'dx+q'dc\end{aligned}\right\}\ldots\ldots(218),$$

si vede che perchè esse si riducano a

$$dy=pdx,\quad \text{e a}\quad d.\frac{dy}{dx}=p'dx,$$

bisogna che si abbiano queste due equazioni di condizione

$$q=0,\quad q'=0;$$

e che, per trovarle, non basterebbe disporre solamente di c, poichè ciò non adempirebbe che una condizione; ma siccome l' integrazione dell' equazione del second' ordine ha introdotto due costanti arbitrarie nell' integrale completo, si disporrà di queste due costanti, perche l'equazioni $q=0$, $q'=0$ abbiano luogo; e non è necessario avvertire che c sarà una di queste costanti.

Similmente, la determinazione delle soluzioni particolari di un' equazione differenziale del terz' ordine, dipende dall' equazioni $q=0$, $q'=0$, $q''=0$; e in generale, per ottenere una soluzione particolare dell' equazione differenziale dell' ordine n, son necessarie un numero n di equazioni di condizione:

$$q=0,\ q'=0,\ q''=0,\ q'''=0,\ \text{ec.} \ldots . (219).$$

Mettiamole sotto un' altra forma. Per eseguir ciò, l' equazioni (218) ci fanno conoscere che q e q' non sono altro che ciò che moltiplica dc nelle differenziali di y e di $\frac{dy}{dx}$ prese rapporto a c. Si ha dunque

$$q=\frac{dy}{dc},\quad q'=\frac{d^2y}{dxdc},$$

e, in generale, si vede che l' equazioni (219) equivalgono a

$$\frac{dy}{dc}=0,\quad \frac{d^2y}{dcdx}=0,$$

$$\frac{d^3y}{dcdx^2}=0,\ \frac{d^4y}{dcdx^3}=0,\ \text{ec.} \ldots . (220).$$

È essenziale osservare che quest' equazioni non possono aver luogo fino all' infinito. Infatti, $\frac{dy}{dc}$ essendo successivamente differenziato rapporto ad x nell' espressioni $\frac{dy}{dc}$, $\frac{d^2y}{dcdx}$, $\frac{d^3y}{dcdx^2}$, ec., possiamo considerare $\frac{dy}{dc}$ come una data funzione di x, che chiameremo Y; e, supponendo che x diventi $x+h$, il teorema del Taylor ci farà ottenere questo sviluppo

$$\mathrm{Y}+\frac{d\mathrm{Y}}{dx}h+\frac{d^2\mathrm{Y}}{dx^2}\frac{h^2}{1.2}+\frac{d^3\mathrm{Y}}{dx^3}\frac{h^3}{2.3}+\text{ec.} \ldots . (221);$$

ovvero, restituendo il valore di Y,

$$\frac{dy}{dc}+\frac{d^2y}{dcdx}h+\frac{d^3y}{dcdx^2}\frac{h^2}{2}+\text{ec.}$$

Ora, tutti i coefficienti delle potenze di h essendo nulli in virtù dell' equazioni (220), le quali, per ipotesi, avranno luogo fino all' infinito, ne risulterebbe che quando x diventerebbe $x+h$, l' equazione (221) si ridurrebbe al suo primo termine Y; il che fa conoscere che in questo caso Y, cioè $\frac{dy}{dc}$, sarebbe costante. Ma quando $\frac{dy}{dc}$ è costante, c non essendo combinato che con delle

costanti, l'equazione $\frac{dy}{dc}=0$ dovrebbe condurci a $c=costante$. Si veda dunque che allora la soluzione particolare si cangerebbe in un'integrale particolare, il che non supponiamo.

Resulta da ciò che precede, che l'equazioni (220) non possono aver luogo fino all' infinito; ed è sopra quest' osservazione che riposa la soluzione di quel problema importante risoluto dal Lagrange, ed al quale si faranno subire alcune modificazioni: *Un' equazione differenziale del prim' ordine essendo doto, trovare, senza ricorrere all' integrale completo, la soluzione particolare che essa può overe.* Sia u l'integrale completo che sarà una funzione di x, di y e di una costanta arbitraria c; la differenziale di u sarà rappresentata da

$$mdx+ndy=0 \;.\;.\;.\;.\;.\; (222),$$

mettiamola sotto la seguente forma:

$$dy=-\frac{m}{n}dx \;.\;.\;.\;.\;.\; (223).$$

Nel caso del quale ci occupiamo, si considera che quest' equazione abbia conservato la costante arbitraria; (osserveremo cha se l'integrale completo non contenesse la costante arbitraria che al primo grado, e in un termine della forma ac, essa sparirebbe mediante la differenziazione, e l'eliminazione di c sarebbe impossibile; ma allora q essendo costante, la proposta non comporterebbe soluzioni particolari); per conseguenza, potremo eliminare questa costante tra $dy=-\frac{m}{n}dx$ e $u=0$. Ricavando dunque dall' equazione (222) il valore di c in funzione di x, di y e di $\frac{dy}{dx}$, otterremo

$$c=\varphi\left(x,y,\frac{dy}{dx}\right),$$

equazione che, per abbreviazione, scriveremo come segue:

$$c=\varphi \;.\;.\;.\;.\;.\; (224).$$

Questo valore essendo messo nell' equaziona $u=0$, avremo un' equazione del prim' ordine, che indicheremo con $U=0$, o piuttosto con

$$Mdx+Ndy=0;$$

premesso ciò, se differenziamo $U=0$, rapporto alle tre variabili x, y e φ, otterremo

$$\frac{dU}{dx}dx+\frac{dU}{dy}dy+\frac{dU}{d\varphi}d\varphi=0;$$

e perchè y non varia che a motivo del valore arbitrario che si dà ad x, possiamo scrivere quest' equazione come segue

$$\left(\frac{dU}{dx}+\frac{dU}{dy}\frac{dy}{dx}\right)dx+\frac{dU}{d\varphi}d\varphi=0 \;.\;.\;.\;.\;.\; (225).$$

Ora, se facciamo attenzione che, in una funzione di due variabili, il primo termine della differenziale si ottiene considerando una di queste variabili come costante, e facendo variare l'altra, si riconoscerà che nell'equazione (225), la quale, sotto un certo punto di vista, non contiene che due variabili, x e φ (poichè y si tratta come funzione di x), φ è costante nel termine

$$\left(\frac{dU}{dx}+\frac{dU}{dy}\frac{dy}{dx}\right)dx.$$

Questo termine non è che la differenziale di u presa rapporto alle variabili x e y, e nella quale il segno φ sarebbe sostituito a c. Ora, questa differenziale è data dall'equazione (222): e, siccome il secondo membro di quest'equazione c' indica che la distruzione di tutti i termini deve operarsi nel primo, indipendentemente da c, si sente che sarà il medesimo quando φ terrà il posto della costante arbitraria c. Segue da ciò che la parte che è racchiusa tra le parentesi nell'equazioni (225) dev'essere identicamente nulla, e che, per conseguenza, quest'equazione si riduce a

$$\frac{dU}{d\varphi}d\varphi=0 \;\ldots\ldots\; (226),$$

equazione la quale è soddisfatta facendo

$$d\varphi=0 \quad \text{ovvero} \quad \frac{dU}{d\varphi}=0 \;\ldots\ldots\; (227);$$

e poichè non è che per abbreviazione, che noi abbiamo posto φ invece di $\varphi\left(x,y,\frac{dy}{dx}\right)$, si vede che la prima dell'equazioni (227) equivale a

$$d\varphi\left(x,y,\frac{dy}{dx}\right)=0 \;\ldots\ldots\; (228),$$

e per conseguenza è un'equazione differenziale del second'ordine. Quest'equazione, essendo integrata, ci dà

$$\varphi\left(x,y,\frac{dy}{dx}\right)=costante \;\ldots\; (229).$$

Da un'altra parte, la proposta $U=0$ sussiste tra le medesime variabili x, y e $\frac{dy}{dx}$. Ecco dunque due equazioni del prim'ordine di una stessa equazione (228) del secondo; per conseguenza, eliminando tra esse $\frac{dy}{dx}$, si otterrà una funzione di x e di y e della costante arbitraria c contenuta nell'equazione (229). Il resultamento di quest'operazione sarà perciò (n.° 189) l'integrale completo. Per effettuare l'eliminazione di cui si tratta, basta mandar via solamente φ dall'equazione $U=0$ con l'aiuto dell'equazione $\varphi=costante$; poichè allora tutti i termini $\frac{dy}{dx}$ contenuti in φ, e i quali non esistono altrove, spariranno dal risultamento. Ciò si riduce evidentemente a cangiare φ in c nell'equazione $U=0$, il che ci fa ricadere sopra $u=0$.

Se l'eliminazione di $\frac{dy}{dx}$ tra l'integrale del secondo fattore dell'equazione (226) e la proposta $U=o$ ci riporta all'integrale completo, con facilità riconosceremo che l'eliminazione di $\frac{dy}{dx}$ tra $U=o$ e l'altro fattore dell'equazione (226) ci conduce alla soluzione particolare.

Infatti, se si elimina $\frac{dy}{dx}$ tra $U=o$, e $\frac{dU}{d\varphi}=o$, si comincia dal vedere che non s'introduce costante arbitraria nel resultamento, come con la precedente operazione, atteso che in questo caso l'eliminazione si effettua senza che s'integri preliminarmente $\frac{dU}{d\varphi}$. Segue da ciò che l'eliminazione di $\frac{dy}{dx}$ tra queste due equazioni differenziali del prim' ordine non può condurci all'integrale completo, il quale necessariamente contiene una costante arbitraria. Per procedere a quest' eliminazione, osserviamo che essa si riduce a quella di φ, poichè $\frac{dy}{dx}$ non trovandosi in nessun' altra parte che in φ, sparirà dal resultamento con φ, e siccome questo resultamento non conserva alcuna traccia da φ, il quale entra per tutto ove entrava c, si conosce che ciò si riduce a eliminare c tra $u=o$ e $\frac{du}{dc}=o$; le quali sono ciò che diventano $U=o$ e $\frac{dU}{d\varphi}=o$, quando vi si cangia φ in c. Ora, $\frac{du}{dc}$ essendo il coefficiente differenziale di dc, si vede che l'eliminazione di c tra u e $\frac{du}{dc}=o$, è esattamente l'operazione che si eseguisce per giungere ad una soluzione particolare.

Cerchiamo ora a soddisfare alla condizione espressa dalla seconda dell' equazioni (227). Per eseguir ciò, se invece di φ sostituiamo il suo valore dato dall' equazione (224), otterremo

$$\frac{dU}{dc}=o \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (230).$$

Non si vede subito come si possa eseguire questa differenziazione rapporto a c, il quale essendo stato eliminato da U non deve trovarsi in dU; quest' eliminazione di c ci ha solamente insegnato che U è una funzione di x, di y e di $\frac{dy}{dx}$, e che per conseguenza dU non può essere che di questa forma:

$$Pdx+Qdy+Rd.\frac{dy}{dx}=o \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (231),$$

ma se c non è in evidenza in questo valore di dU, ci esiste almeno in una maniera implicita; poichè sappiamo che y è una funzione di x e di c, e che,

per conseguenza, dy e $d.\frac{dy}{dx}$ debbono tenere il posto dei seguenti valori

$$\left.\begin{array}{l} dy = \frac{dy}{dx}dx + \frac{dy}{dc}dc \\ d.\frac{dy}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2}dx + \frac{d^2y}{dxdc}dc \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots (232).$$

Nell' ipotesi di c costante, questi valori si riducono a

$$dy = \frac{dy}{dx}dx,$$

e a

$$d.\frac{dy}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2}dx,$$

equazioni i cui secondi membri esprimono la condizione espressa che la differenziazione sia presa rapporto ad x solo, condizione che tacitamente ammettiamo nell' equazione (231), quando vi sopponiamo c costante; ma quando c è variabile, bisogna mettere nell' equazione (231) i valori di dy e di $d.\frac{dy}{dx}$, dati dall' equazioni (232), ed avremo

$$Pdx + Q\left(\frac{dy}{dx}dx + \frac{dy}{dc}dc\right)$$

$$+ R\left(\frac{d^2y}{dx^2}dx + \frac{d^2y}{dxdc}dc\right) = 0 \ldots (233).$$

Ecco ciò che diventa dU quando si considera c come variabile, e si vede che si ha

$$\frac{dU}{dc} = Q\frac{dy}{dc} + R\frac{d^2y}{dxdc} \ldots\ldots (234).$$

Presentemente, se si passa all' ipotesi di una soluzione particolare, si ha, in virtù dell' equazione (230), $\frac{dU}{dc} = 0$, il che riduce l' equazione precedente a

$$Q\frac{dy}{dc} + R\frac{d^2y}{dxdc} = 0 \ldots (235).$$

Se ora si suppone che quest' equazione non contenga quantità trascendenti, e che si sia avuto cura, nelle susseguenti operazioni, di liberarsi dai radicali mediante l' elevazione a diverse potenze, e ancora dalle frazioni, le quantità P e Q che contiene l' equazione (231) non potranno diventare infinite. Ciò premesso, $\frac{dy}{dc}$ essendo nullo in virtù dell' equazione (205), che esprime la condizione della possibilità dell' esistenza di una soluzione particolare, si vede che

l' equazione (235) si riduce a

$$R\frac{d^2y}{dx^2}=o\ldots.(236);$$

ora, possono succedere questi due casi: o $\frac{d^2y}{dx^2}$ è ancora nullo, o non lo è; in questa seconda ipotesi, è dunque il fattore R il quale, diventando nullo, soddisfà all' equazione (236); ma se, al contrario, $\frac{d^2y}{dx^2}$ è nullo, l' equazione (235) è soddisfatta indipendentemente da Q e da R, e per conseguenza Q ed R possono conservare valori finiti. Guardiamoci non ostante dal concludere che R non è nullo; poichè se, trattando y come una funzione di x, si differenzia l' equazione (235) rapporto a questa variabile indipendente x, si trova

$$R\frac{d^3y}{d^2xdc}+\frac{d^2y}{dxdc}\left(Q+\frac{dR}{dx}\right)+\frac{dQ}{dx}\frac{dy}{dc}=o\ldots.(237).$$

Osserviamo che ciò che si rappresenta in una maniera abbreviata con $\frac{dR}{dx}dx$ e con $\frac{dQ}{dx}dx$, equivale a

$$\left(\frac{dR}{dx}+\frac{dR}{dy}\frac{dy}{dx}\right)dx$$

e a

$$\left(\frac{dQ}{dy}+\frac{dQ}{dy}\frac{dy}{dx}\right)dx.$$

Le quantità $\frac{d^2y}{dxdc}$ e $\frac{dy}{dx}$ essendo nulle, e i loro coefficienti non potendo diventare infiniti mediante l' osservazione fatta rapporto all' equazione (235), ne resulta che l' equazione (237) si riduce a $R\frac{d^3y}{d^2xdc}=o$, e, per conseguenza, dà $R=o$, quando $\frac{d^3y}{d^2xdc}$ non è nullo. Se al contrario, $\frac{d^3y}{d^2xdc}=o$, fosse nullo, si proverebbe egualmente che si avrebbe $R\frac{d^4y}{d^3xdc}=o$, e che $\frac{d^4y}{d^3xdc}$ dovrebbe esser nullo perchè R non lo fosse. Continuando questo medesimo ragionamento, si cade alla fine sopra un coeffiiciente differenziale $\frac{d^ny}{d^nxdc}$ il quale non sarà nullo, perchè è stato dimostrato che l' equazioni (220) non potevano aver luogo fine all' infinito. Resulta da questa dimostrazione che R, la quale conserva sempre il medesimo valore, essendo nulla in un caso lo è per tutti. Ma poichè R è nulla, l' equazione (231), messa sotto questa forma

$$P+Q\frac{dy}{dx}+R\frac{d^2y}{dx^2}=o\ldots.(238),$$

si riduce a

$$P+Q\frac{dy}{dx}=o\ \ldots\ldots\ (239).$$

Da un' altra parte, la medesima equazione (238) dandoci

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{P+Q\dfrac{dy}{dx}}{R},$$

si vede che, nella nostra ipotesi di una soluzione particolare, l' equazione (239) e il valore di R che è nullo, riducono quello di $\frac{d^2y}{dx^2}$ a $\frac{o}{o}$.

Resulta da questa teoria che, nel caso in cui una soluzione particolare può esistere, si ha l' equazione $\frac{dU}{dc}=o$, (abbiamo veduto che l' equazione $U=o$ non era altra cosa che la proposta, considerata come resultamento dell' eliminazione di c; quanto a quella di $\frac{dU}{dc}=o$, essa ci dice solamente che i termini i quali, in questa proposta, provengono dalla variazione della costante arbitraria, sono nulli.) e che quest' equazione $\frac{dU}{dc}=o$ porta la necessità che il valore di $\frac{d^2y}{dx^2}$ si riduca a $\frac{o}{o}$. I due termini di questa frazione, vale a dire il numeratore e il denominatore di quella che è il valore di $\frac{d^2y}{dx^2}$, eguagliati a zero, ci daranno due equazioni le quali, se si accordano con $U=o$, daranno la soluzione particolare.

Prendiamo per esempio l' equazione

$$x+y\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dx}\sqrt{x^2+y^2-c^2}\ \ldots\ldots\ (240),$$

elevando al quadrato e riducendo, faremo sparire il radicale ed avremo

$$x^2+2xy\frac{dy}{dx}+\frac{dy^2}{dx^2}\left(c^2-x^2\right)=o;$$

differenziando, considerando dx come costante: si ottiene

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{xdx+ydy}{(x^2-c^2)dy-xydx},$$

eguagliando i due termini di questa frazione a zero, e dividendo per dx, avremo

$$x+y\frac{dy}{dx}=o,\quad \left(x^2-c^2\right)\frac{dy}{dx}-xy=o\ \ldots\ldots\ (241);$$

eliminando $\frac{dy}{dx}$ tra quest' equazioni, e sopprimendo in seguito il fattor comune,

si troverà

$$y^2+x^2-c^2=0;$$

e siccome quest' equazione soddisfà alla proposta, si vede che essa è un integrale particolare.

Cerchiamo di riconoscere ancora se l' equazione

$$y-x\frac{dy}{dx}=x\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}},$$

comporta una soluzione singolare. A quest' effetto, cominceremo dal fare sparire il radicale, elevando i due membri al quadrato, e riducendo si trova

$$y^2-2xy\frac{dy}{dx}-x^2=0;$$

e, differenziando, verrà

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{x\left(\frac{dy^2}{dx^2}+1\right)}{xy}.$$

Quest' equazione si riduce a $\frac{0}{0}$ quando $x=0$; ma quest' ipotesi non soddisfacendo alla proposta non può condurci ad una soluzione particolare.

Conformemente all' osservazione che abbiamo fatto per l' equazioni (216), non bisognerà limitarsi all' ipotesi di y funzione di x; ma sopponendo quindi x funzione di y, si cercheranno le soluzioni particolari che possono darsi eguagliando a zero il valore di $\frac{d^2x}{dy^2}$.

Una soluzione particolare operando la distruzione scambievole dei termini dell' equazione differenziale alla quale essa appartiene, non è che un fattore che possiamo mettere in evidenza con l' aiuto di una trasformazione. Abbiamo veduto, per esempio, che $x^2+y^2-a^2=z^2$, era la soluzione particolare dell' equazione

$$(xdy+ydy)^2=dy^2(x^2+y^2-a^2)\;.\;.\;.\;.\;.\;(242);$$

se facciamo $x^2+y^2-a^2=z^2$, avremo

$$xdx+ydy=zdz;$$

sostituendo questi valori nell' equazione (242), essa diventerà

$$z^2(dz^2-dy^2)=0;$$

il che prova che effettivamente la soluzione particolare rappresentata da z^2 è un fattor comune della proposta.

Un' altra proprietà delle soluzioni particolari è di far diventare infinito il fattore che rende la proposta una differenziale esatta. Per dimostrarlo, metteremo l' integrale completo sotto una forma $u=costonte$. Un valore che soddisfacesse a quest' equazione dovrebbe perciò dare $du=0$, perchè la differenziale di una costante è nulla. Reciprocamente qualunque valore che non soddisfacesse a $u=costonte$ non può dare $du=0$; ora, quest' ultimo caso è esattamente quello di una soluzione particolare la quale, perchè essa non soddisfà all' integrale

completo, non potrebbe operare la distruzione scambievole dei termini di cui si compone la sua differenziale immediata; ora, questa differenziale immediata non è altra cosa che $\lambda(\mathrm{M}dx+\mathrm{N}dy)$. Bisogna dunque che la soluzione particolare non possa rendere eguale a zero il secondo membro di quest' equazione:

$$\lambda(\mathrm{M}dx+\mathrm{N}dy)=du;$$

ovvero, ciò che equivale al medesimo della seguente:

$$\lambda\left(\mathrm{M}+\mathrm{N}\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d(u)}{dx}.$$

(Indichiamo così la differenziale totale di u presa considerando x come variabile indipendente, per non confondere $\frac{d(u)}{dx}$ col coefficiente differenziale $\frac{du}{dx}$, il quale suppone che tutte le altre variabili, eccettuato x, siano considerate come costanti in queste termine.)

Si deduce da quest' equazione

$$\lambda=\frac{\frac{d(u)}{dx}}{\mathrm{M}+\mathrm{N}\frac{dy}{dx}}\;\ldots\ldots\;(243);$$

ma, per la sua natura, la soluzione particolare, quantunque non soddisfaccia all' equazione $\lambda\left(\mathrm{M}+\mathrm{N}\frac{dy}{dx}\right)=0$, soddisfa ciò non ostante a questa,

$$\mathrm{M}+\mathrm{N}\frac{dy}{dx}=0.$$

vale a dire ne rende nullo il primo membro. Ciò riduce dunque l' equazione (243) a

$$\lambda=\frac{\frac{d(u)}{dx}}{0}=\infty.$$

Per esempio, l' equazione

$$xdx+ydy=dy\sqrt{x^2+y^2-a^2}\;\ldots\;(244),$$

diventa una differenziale esatta quando si moltiplica per $\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2-a^2}}$, e dà

$$\frac{xdx+ydy}{\sqrt{x^2+y^2-a^2}}=dy;$$

così si vede che la soluzione particolare $x^2+y^2-a^2=0$ rende il fattore $\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2-a^2}}$ infinito.

205. La formula generale dell' eqnazioni differenziali del second'ordine a due variabili è

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = o \; . \; . \; . \; . \; . \; (245).$$

Non cercheremo d'integrare quest' equazione in questo grado di generalità; ma bensì esaminiamo come si può trovare l' integrale in alcuni casi particolari.

206. Cominciamo dal considerare l' ipotesi in cui si abbia

$$f\left(x, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = o \; . \; . \; . \; . \; . \; (246);$$

per integrare quest' equazione si farà $\frac{dy}{dx} = p$, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx}$, e essa si ridurrà a

$$f\left(x, p, \frac{dp}{dx}\right) = o \; . \; . \; . \; . \; . \; (247).$$

Se quest' eqnazione può integrarsi, a che se ne ricavi $p = X$, otterremo facilmente il valore di y; poichè l' equazione $\frac{dy}{dx} = p$ dandoci $y = \int p dx$, se si sostituisce in quest' equazione il valore di p, si avrà $y = \int X dx$; ma se l'equazione (247), in luogo di dare il valore di p in x, desse quello di x in funziona di p, in modo che si avesse $x = P$, integrando per parti $dy = pdx$, si comincerebbe da avere

$$y = px - \int x dp;$$

mettendo in qnest' equazione il valore di x, si troverebbe

$$y = px - \int P dp.$$

207. Consideriamo ora il caso in cui si abbia

$$f\left(y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = o \; . \; . \; . \; . \; . \; (248).$$

Facendo $\frac{dy}{dx} = p$, si troverebbe $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx}$; e sostituendo invece di dx il suo valore $\frac{dy}{p}$, quest' eqnazione diventerebbe

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{pdp}{dy},$$

mettendo questi valori di $\frac{dy}{dx}$ e di $\frac{d^2y}{dx^2}$ nell'equazione (248), essa si convertirebbe in

$$f(x, p, dy, dp) = o;$$

se quest' eqnazione può dare $p = Y$, si sostituirà questo valore nell' equazione

$dx = \frac{dy}{p}$, e integrando si otterrà

$$x = \int \frac{dy}{Y};$$

se al contrario y si determina in funzione di p, e che si abbia per conseguenza $y = P$; per avere x, s'iotegrerà per parti l'eqoazione $dx = \frac{dy}{p}$, e si avrà

$$x = \frac{y}{p} + \int y \frac{dp}{p^2};$$

e sostituendo in qoest'equazione il valore di y, si troverà

$$x = \frac{P}{p} + \int P \frac{dp}{p^2};$$

e avendo integrato, si elimioerà quindi p per mezzo dell'equazione $y = P$.

208. Quando l'eqoazione (245) non contiene con $\frac{d^2y}{dx^2}$ che una delle tre quantità $\frac{dy}{dx}$, x, e y, abbiamo, nel primo caso,

$$f\left(\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0 \quad \ldots\ldots (249).$$

Facendo $\frac{dy}{dx} = p$, e per conseguenza $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx}$, si sostituiranno questi valori e verrà

$$f\left(p, \frac{dp}{dx}\right) = 0.$$

Si deduce da quest' equazione

$$\frac{dp}{dx} = P \quad \ldots\ldots (250),$$

e per conseguenza

$$x = \int \frac{dp}{P} \quad \ldots\ldots (251).$$

Da uo'altra parte l'equazioоe $\frac{dy}{dx} = p$, ci dà

$$y = \int p dx;$$

e sostitoendo il valore di dx, dato dall'equazione (250), si ottiene

$$y = \int \frac{pdp}{P} \quad \ldots\ldots (252).$$

Quando avremo integrato l'eqoazioni (251) e (252), si eliminerà tra esse la quantità p per avere un'equazione in x e in y.

209. Nel caso in cui $\frac{d^2y}{dx^2}$ non si trovi combinato che con una funzione di x, si ha

$$\frac{d^2y}{dx^2} = X;$$

moltiplicando per dx e integrando, si trova

$$\frac{dy}{dx} = \int Xdx + C;$$

rappresentando con X' l' integrale indicato in quest' equazione, si ha

$$\frac{dy}{dx} = X' + C;$$

moltiplicando di nuovo per dx, e integrando, si ottiene

$$y = \int X'dx + Cx + C'.$$

210. Finalmente, quando $\frac{d^2y}{dx^2}$ è dato in funzione di y, si tratta d' integrare l' equazione

$$\frac{d^2y}{dx^2} = Y.$$

Per giungerci, si moltiplicherà questa per $2dy$, il che darà

$$2\frac{dy}{dx} \cdot \frac{d^2y}{dx} = 2\,Ydy;$$

il primo membro essendo composto come la differenziale di x^2, si troverà, integrando

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \int 2Ydy + C;$$

e ricavando la radice quadrata, si otterrà

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{C + 2\int Y dy};$$

donde si dedurrà, mediante una nuova integrazione

$$x = \int \frac{dy}{\sqrt{C + 2\int Ydy}} + C'.$$

211. Un' equazione differenziale tra due variabili x e y, è lineare quando l' espressioni

$$y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \ldots \frac{d^ny}{dx^n}$$

non sono elevate, in quest' equazione, che al primo grado: così, supponendo che A, B, C, D, ... N, X, siano funzioni di x, l' equazione lineare dell' en-

nesimo ordine sarà

$$Ay+B\frac{dy}{dx}+C\frac{d^2y}{dx^2}+D\frac{d^3y}{dx^3}\ldots+N\frac{d^ny}{dx^n}=X\ldots.(253).$$

Quando quest' equazione è del primo grado, essa si riduca a

$$Ay+B\frac{dy}{dx}=X;$$

mandando via il denominatore, e dividendo per B, possiamo metterla sotto questa forma

$$dy+Pydx=Qdx,$$

ed abbiamo veduto n.° 148, che quest' equazione aveva per integrale

$$y=e^{-\int Pdx}\left[\int Qe^{\int Pdx}dx+C\right].$$

212. Quando il termine in X è nullo nell' equazione (253), se un numero n di valori particolari p, q, r, ec., messi successivamente invece di y, hanno ciascuno la proprietà di soddisfarvi, basterà di moltiplicare p, q, r, ec., per delle costanti arbitrarie a, b, c, ec., per concludere cha l' integrale finito completo di quest' equazione è

$$y=ap+bq+cr+\text{ec.}$$

La dimostrazione di questa proposizione essendo la medesima per tutti i gradi non considereremo che l' equazione

$$Ay+B\frac{dy}{dx}+C\frac{d^2y}{dx^2}+D\frac{d^3y}{dx^3}=0\ldots(254).$$

Mettendo successivamente invece di y i valori ipotetici p, q, r, avremo

$$Ap+B\frac{dp}{dx}+C\frac{d^2p}{dx^2}+D\frac{d^3p}{dx^3}=0,$$

$$Aq+B\frac{dq}{dx}+C\frac{d^2q}{dx^2}+D\frac{d^3q}{dx^3}=0,$$

$$Ar+B\frac{dr}{dx}+C\frac{d^2r}{dx^2}+D\frac{d^3r}{dx^3}=0;$$

moltiplicando queste tre equazioni, la prima per a, la seconda per b e la terza per c, e aggiungendo i resultamenti, si trova

$$\begin{aligned}&A\left(ap+bq+cr\right)\\&+B\left(a\frac{dp}{dx}+b\frac{dq}{dx}+c\frac{dr}{dx}\right)\\&+C\left(a\frac{d^2p}{dx^2}+b\frac{d^2q}{dx^2}+c\frac{d^2r}{dx^2}\right)\\&+D\left(a\frac{d^3p}{dx^3}+b\frac{d^3q}{dx^3}+c\frac{d^3r}{dx^3}\right)=0.\end{aligned}$$

Ora è evidente che quest' espressione, che è identicamente nulla, è la medesima di quella che si otterrebbe facendo $y=ap+bq+cr$, nell' equazione (254); dunque questo valore di y soddisfà all' equazione (254); e siccome essa contiene tre costanti arbitrarie, così è l' integrale finito completo dell' equazione (254).

213. Quando X non è nullo nell' equazione

$$Ay+B\frac{dy}{dx}+C\frac{d^2y}{dx^2}+D\frac{d^3y}{dx^3}=X\ \ldots\ (255),$$

se possiamo trovare tre valori particolari p, q, r, i quali, messi successivamente in luogo di y, soddisfacciano ciascuno all' equazione

$$Ay+B\frac{dy}{dx}+C\frac{d^2y}{dx^2}+D\frac{d^3y}{dx^3}=0\ \ldots\ (256),$$

l' integrale finito completo dell' equazione (255), sarà

$$y=ap+bq+cr\ \ldots\ (257);$$

ma allora a, b, c, in luogo di essere costanti, saranno funzioni di x, che quanto prima insegneremo a determinare.

214. Per dimostrare questo teorema, differenziamo l' equazione (257) e dividiamola per dx, avremo

$$\frac{dy}{dx}=a\frac{dp}{dx}+b\frac{dq}{dx}+c\frac{dr}{dx}+p\frac{da}{dx}+q\frac{db}{dx}+r\frac{dc}{dx}.$$

Disponiamo dell' indeterminate a, b, c, mediante tre condizioni: con la prima, facciamo

$$p\frac{da}{dx}+q\frac{db}{dx}+r\frac{dc}{dx}=0\ \ldots\ (258),$$

rimarrà

$$\frac{dy}{dx}=a\frac{dp}{dx}+b\frac{dq}{dx}+c\frac{dr}{dx}.$$

Una nuova differenziazione ci darà

$$\frac{d^2y}{dx^2}=a\frac{d^2p}{dx^2}+b\frac{d^2q}{dx^2}+c\frac{d^2r}{dx^2}+\frac{da}{dx}\frac{dp}{dx}+\frac{db}{dx}\frac{dq}{dx}+\frac{dc}{dx}\frac{dr}{dx}\ \ldots (259).$$

Per adempire la seconda condizione, poniamo

$$\frac{da}{dx}\frac{dp}{dx}+\frac{db}{dx}\frac{dq}{dx}+\frac{dc}{dx}\frac{dr}{dx}=0\ \ldots\ (260),$$

rimarrà

$$\frac{d^2y}{dx^2}=a\frac{d^2p}{dx^2}+b\frac{d^2q}{dx^2}+c\frac{d^2r}{dx^2};$$

differenziando ancora e dividendo per dx, verrà

$$\frac{d^3y}{dx^3}=a\frac{d^3p}{dx^3}+b\frac{d^3q}{dx^3}+c\frac{d^3r}{dx^3}+\frac{da}{dx}\frac{d^2p}{dx^2}+\frac{db}{dx}\frac{d^2q}{dx^2}+\frac{dc}{dx}\frac{d^2r}{dx^2}.$$

Per adempire la terza condizione, supporremo

$$\frac{da}{dx}\frac{d^2p}{dx^2}+\frac{db}{dx}\frac{d^2q}{dx^2}+\frac{dc}{dx}\frac{d^2r}{dx^2}=\frac{X}{D}\ldots\ldots(261)$$

e l'equazione precedente diventerà

$$\frac{d^3y}{dx^3}=a\frac{d^3p}{dx^3}+b\frac{d^3q}{dx^3}+c\frac{d^3r}{dx^3}+\frac{X}{D}.$$

Ora dico che il valore $y=ap+bq+cr$, soddisfà all' equazione (255); poichè mettendo in quest' equazione il valore di y, e per conseguenza quelli dei suoi coefficienti differenziali, che abbiamo determinati, e mandando via i termini in X, i quali si distruggono, si trova

$$A(ap+bq+cr)+B\left(a\frac{dp}{dx}+b\frac{dq}{dx}+c\frac{dr}{dx}\right)$$

$$+C\left(a\frac{d^2p}{dx^2}+b\frac{d^2q}{dx^2}+c\frac{d^2r}{dx^2}\right)$$

$$+D\left(a\frac{d^3p}{dx^3}+b\frac{d^3q}{dx^3}+c\frac{d^3r}{dx^3}\right)=0\ldots(262).$$

215. Siccome non si sa se il valore dato da y fa distruggere scambievolmente tutti i termini dell' equazione (262), si tratta ora di dimostrare che quest'equazione è identicamente nulla. Ad eseguir ciò, p, q, r soddisfacendo all' equazione (256), si ha

$$Ap+B\frac{dp}{dx}+C\frac{d^2p}{dx^2}+D\frac{d^3p}{dx^3}=0,$$

$$Aq+B\frac{dq}{dx}+C\frac{d^2q}{dx^2}+D\frac{d^3q}{dx^3}=0,$$

$$Ar+B\frac{dr}{dx}+C\frac{d^2r}{dx^2}+D\frac{d^3r}{dx^3}=0;$$

moltiplicando la prima di quest' equazioni per a, la seconda per b e la terza per c, e aggiungendo i resultamenti, troveremo un' equazione identicamente nulla, le quale sarà la medesima dell' equazione (262).

216. Per determinare a, b, c, i coefficienti differenziali $\frac{da}{dx}$, $\frac{db}{dx}$, $\frac{dc}{dx}$ non entrando che al primo grado nell' equazioni di condizione (258), (260) e (261), possiamo eliminare due di questi coefficienti differenziali, e troveremo l' altro in funzione dell' espressioni $\frac{dp}{dx}$, $\frac{dq}{dx}$, ec., i quali sono funzioni determinate di x, poichè si conosce p, q, r, ec., avremo dunque dell' equazioni della forma

$$\frac{da}{dx}=X_{,},\quad\frac{db}{dx}=X_{,,},\quad\frac{dc}{dx}=X_{,,,},$$

ovvero

$$da = X_{,}dx\ ,\quad db = X_{,,}dx\ ,\quad dc = X_{,,,}dx\ ,$$

e integrando, si determinerà a, b, c.

Questo teorema è applicabile al caso in cui l' equazione lineare fosse di un ordine qualunque, per conseguenza l' integrazione di quest' equazioni si riduce a quella dell' equazione

$$Ay + B\frac{dy}{dx} + C\frac{d^2y}{dx^2} + \ldots$$
$$+ N\frac{d^ny}{dx^n} = 0 \ldots\ldots (263).$$

217. Quando l' equazione lineare dell' ordine n ha dei coefficienti costanti è facile determinare l' integrale. Infatti, se nell' equazione (263), si fa $y = e^{mx}$, si troverà, differenziando,

$$\frac{dy}{dx} = e^{mx}\,m\ ,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = e^{mx}\,m^2,$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = e^{mx}\,m^3 \quad \text{ec.};$$

sostituendo questi valori nell' equazione (263), otterremo

$$e^{mx}(A + Bm + Cm^2 + \ldots + Nm^n) = 0 \ldots\ldots (264);$$

siano m', m'', m''', ec., le radici dell' equazione

$$A + Bm + Cm^2 + \ldots + Nm^n = 0 \ldots (265),$$

l' equazione (263) sarà soddisfatta da questi valori

$$y = e^{m'x},\quad y = e^{m''x},\quad y = e^{m'''x},\quad \text{ec.};$$

e siccome si hanno n valori di y, l'integrale finito completo dell' equazione (263) sarà

$$y = ae^{m'x} + be^{m''x} + ce^{m'''x} + \text{ec.}$$

218. Quando $m' = m''$, e che per conseguenza i termini $ae^{m'x}$ e $be^{m''x}$ si riducono ad $(a+b)e^{m'x}$, la somma $a+b$ dovendo considerarsi come una sola costante, l' espressione y non contiene più un numero n di costanti arbitrarie. In questo caso, se $y = e^{m'x}$ soddisfà alla proposta, il valore $y = xe^{m'x}$ deve ancora soddisfarvi. Infatti, differenziando quest' ultima equazione, si trova

$$\frac{dy}{dx} = xe^{m'x}m' + e^{m'x},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = xe^{m'x}m'^2 + 2e^{m'x}m',$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = xe^{m'x}m'^3 + 3e^{m'x}m'^2,\ \text{ec.};$$

questi valori riducooo l' eqnazione (263) a

$$xe^{m'x}(A+Bm'+Cm'^2+Dm'^3+ \text{ec.})$$
$$+e^{m'x}(B+2Cm'+3Dm'^2+ \text{ec.}) \ldots\ldots (266).$$

Ora l' equazione (265) avendo per ipotesi due radici egoali, si sa, dalla teoria dell' equazioni, che l' espressione $B+2Cm+3Dm^2+$ ec., ne conterrà una di meno della proposta, e si annullerà quando faremo $m=m'$; doode segue che l' espressione (266) è identicamente nulla. Per conseguenza, l' eqnazione (263) sarà soddisfatta dal valore $y=xe^{m'x}$, e avrà per integrale completo

$$y=ae^{m'x}+bxe^{m'x}+ce^{m''x}+ \text{ec.}$$

219. Se vi fossero tre radici eguali ad m, si proverebbe egoalmente che l' equazione (263) sarebbe soddisfatta facendo

$$y=e^{m'x}+xe^{m'x}+x^2e^{m'x};$$

e così di seguito.

220. Quando l' equazione (265) ha delle radici immaginarie, se una di qoeste radici è $h+k\sqrt{-1}$, l'altra sarà $h-k\sqrt{-1}$; e si avrà, oel valore di y, questi doe termini

$$ae^{hx+kx\sqrt{-1}}+be^{hx-kx\sqrt{-1}},$$

ovvero

$$e^{hx}\left[ae^{kx\sqrt{-1}}+be^{-kx\sqrt{-1}}\right] \ldots (267).$$

Ora, si sa che si ha in generale, la formola

$$e^{\varphi\sqrt{-1}}=\cos\varphi+\operatorname{sen}\varphi\sqrt{-1}, \quad e^{-\varphi\sqrt{-1}}=\cos\varphi-\operatorname{seo}\varphi\sqrt{-1};$$

paragonaodo l' espressione (267) a queste formule, potremo sostituire

$$e^{kx\sqrt{-1}} \text{ con } \cos kx+\operatorname{sen} kx\sqrt{-1},$$

e

$$e^{-kx\sqrt{-1}} \text{ con } \cos kx-\operatorname{seo} kx\sqrt{-1},$$

e la formola (267) diventerà

$$e^{hx}\left[a\cos kx+a\operatorname{seo} kx\sqrt{-1}+b\cos kx-b\operatorname{seo} kx\sqrt{-1}\right],$$

espressiooe che poò scriversi come segue:

$$e^{hx}\left[(a+b)\cos kx+(a-b)\operatorname{seo} kx\sqrt{-1}\right] \ldots\ldots (268).$$

Quando X è nullo nell' equazione (253), a, b, c, essendo dalle costanti arbitrarie, n.° 212, possiamo supporre $a+b=c$, $a-b=c'\sqrt{-1}$; allora la parte immaginaria che è nell' espressione (267) si annullerà.

221. Proponiamoci ora d' integrare nel medesimo tempo due o più equazioni differenziali. Siano

$$\left.\begin{array}{l} My+Nx+P\dfrac{dy}{dt}+Q\dfrac{dx}{dt}=T \\ M'y+N'x+P'\dfrac{dy}{dt}+Q'\dfrac{dx}{dt}=T' \end{array}\right\} \ldots.(269),$$

l' equazioni le più generali del primo grado tra x e y, e i coefficienti differenziali $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dx}{dt}$; e nelle quali i coefficienti M, N, P, ec., sono funzioni della variabile indipendente t. Possiamo scrivere quest' equazioni come segue:

$$(My+Nx)\,dt+Pdy+Qdx=Tdt,$$
$$(M'y+N'x)dt+P'dy+Q'dx=T'dt;$$

se si moltiplica la seconda per una funzione φ di t, e che si aggiunga i resultamenti, si otterrà

$$[(M+M'\varphi)y+(N+N'\varphi)\,x\,]\,dt+(P+P'\varphi)\,dy+(Q+Q'\varphi)\,dx=(T+T'\varphi)\,dt,$$

rappresentando le quantità che sono tra le parentesi con una sola lettera, quest' equazione può scriversi come segue:

$$Hydt+Kxdt+Rdy+Sdx=Tdt;$$

se ne deduce

$$H\left(y+\frac{K}{H}x\right)dt+R\left(dy+\frac{S}{R}dx\right)=Tdt\,.\,,..(270),$$

equazione che sarà della medesima forma dell' equazione

$$dy+Pydx=Qdx\ldots..(271),$$

che abbiamo integrata n.° 48, se

$$d\left(y+\frac{K}{H}x\right)=dy+\frac{S}{R}\,dx\ldots.(272),$$

perchè allora facendo

$$y+\frac{K}{H}x=z\ldots..(273),$$

l' equazione (270) diventerà

$$Hzdt+Rdz=Tdt,$$

ovvero

$$dz+\frac{H}{R}\,zdt=\frac{T}{R}\,dt\ldots..(274);$$

e si vede che quest' equazione è della medesima forma dell' equazione (271), poichè $\frac{H}{R}$ e $\frac{T}{R}$ sono funzioni della variabile indipendente t.

222. Per soddisfare all'equazione (272), basta che si abbia

$$d\left(\frac{K}{H}x\right)=\frac{S}{R}dx;$$

ed eseguendo la differenziazione indicata, si troverà

$$\frac{K}{H}dx+xd.\frac{K}{H}=\frac{S}{R}dx.$$

Perchè quest'equazione sia soddisfatta, bisogna in generale, che i moltiplicatori di dx siano eguali, e che, per conseguenza, $xd.\frac{K}{H}$ sia nullo; vale a dire che si abbia

$$\frac{K}{H}=\frac{S}{R},\quad d.\frac{K}{H}=0\ \ldots\ldots\ (275).$$

Si rimetteranno in quest'equazioni i valori dell'espressioni K, H, S e R; e avendo effettuato la differenziazione indicata, si eliminerà φ contenuto in quest'equazioni; e si avrà la relazione che deve sussistere tra i coefficienti, perchè l'equazione di condizione sia soddisfatta.

223. Nel caso in cui i coefficienti dei primi membri dell'equazioni (269) sieno costanti, la differenziale di una costante essendo eguale a zero, non rimane che la prima dell'equazioni (275); essa basterà per determinare il fattore φ, che allora sarà costante, poichè esso diventerà eguale a una funzione di costanti. Rimettendo per K, H, R, S i loro valori, si ha

$$\frac{N+N'\varphi}{M+M'\varphi}=\frac{Q+Q'\varphi}{P+P''\varphi},$$

e facendo sparire i denominatori, si vede che φ dev'essere determinato da un'equazione del secondo grado. Chiamando φ' e φ'' questi valori di φ, e supponendo che dopo avergli sostituiti, successivamente nell'equazione (274), i coefficienti di zdt e di dt diventino, nel primo caso p' e q', e nel secondo p'' e q'', si avrà

$$dz+p'zdt=q'dt,$$
$$dz+p''zdt=q''dt;$$

integrando mediante la formula (136), si troverà

$$z=e^{-\int p'dt}\left(\int q'e^{\int p'dt}dt+C'\right),$$

$$z=e^{-\int p''dt}\left(\int q''e^{\int p''dt}dt+C''\right).$$

Si sostituirà in questi valori quello di z, ricavato dall'equazione (273), e si avranno due equazioni in x, in y e in t.

224. Se eccettuato T, T' e T'', che considereremo sempre come funzioni di t, i coefficienti M, N, P, Q, ec., sono costanti, e che si abbiano le tre equazioni

$$dy+(My+Nx+Pz)dt=Tdt,$$
$$dx+(M'y+N'x+P'z)dt=T'dt,$$
$$dz+(M''y+N''x+P''z)dt=T''dt,$$

si moltiplicherà la seconda per una costante φ, e la terza per una costante φ'; e aggiungendo i resultamenti, si avrà un'equazione che potremo rappresentare con

$$dy + \varphi dx + \varphi' dz + Q(y + Rx + Sz)\,dt = Udt.$$

Ora, perchè quest'equazione sia della forma

$$dy + Pydx = Qdx\,,$$

bisogna che considerando la funzione $y + Rx + Sz$ come una sola variabile y', la differenziale dy' di questa funzione sia eguale a $dy + \varphi dx + \varphi' dz$, ciò che esige che si abbiano l'equazioni di condizione

$$\varphi = R\,,\quad \varphi' = S;$$

R ed S non essendo che funzioni di φ e di φ', in virtù delle precedenti operazioni, ne resulta che quest'equazioni basteranno per determinare i diversi valori delle costanti φ e φ'.

225. Questo metodo è generale, e si applica ancora all'equazioni differenziali degli ordini superiori, perchè quest'equazioni possono ridursi al primo grado. Se si avessero, per esempio, l'equazioni

$$\frac{d^2y}{dt^2} + My + Nx + P\frac{dy}{dt} + Q\frac{dx}{dt} = T\,,$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + M'y + N'x + P'\frac{dy}{dt} + Q'\frac{dx}{dt} = T'\,,$$

ovvero piuttosto

$$\left.\begin{array}{l} d^2y + (My + Nx)dt^2 + (P\,dy + Qdx)\,dt = T\,dt^2 \\ d^2x + (M'y + N'x)dt^2 + (P'\,dy + Q'dx)\,dt = T'dt^2 \end{array}\right\}\ldots\ldots (276),$$

si farebbe

$$dy = pdt\,,\quad dx = qdt\ \ldots\ldots (277);$$

e osservando che dt è costante, quest'equazioni diventerebbero

$$dp + (M\,y + N\,x + P\,p + Q\,q)\,dt = Tdt,$$
$$dq + (M'y + N'x + P'p + Q'q)\,dt = T'dt;$$

queste due equazioni, con l'equazioni (277), formano quattro equazioni del prime grado, alle quali possiamo applicare i precedenti processi.

226. Un'equazione che sussista tra coefficienti differenziali, combinati, secondo il caso, con variabili e costanti, è, in generale, un'equazione differenziale parziale, ovvero, seguendo l'antica denominazione, e un'equazione alle differenze parziali. Sono state così chiamate quest'equazioni, perchè la notazione dei coefficienti differenziali che esse contengono indica, come lo abbiamo veduto nel calcolo differenziale, che la differenziazione non può essere eseguita che parzialmente, vale a dire considerando certe variabili come costanti. Ciò suppone perciò che la funzione proposta non contenga che una sola variabile. Per maggior semplicità, cominceremo da non ammetterne che due, e considereremo l'equazioni differenziali del prim'ordine, le quali sono quelle che non contengono che uno o più coefficienti differenziali del prim'ordine.

227. La prima equazione che cominceremo a integrare è la seguente:

$$\frac{dz}{dx} = a.$$

Se, contro la nostra ipotesi, z invece di essere funzioni di due variabili x ed

y, non contenesse che x, si avrebbe un'equazione differenziale ordinaria la quale, essendo integrata, darebbe $z=ax+c$; ma, nel caso presente, z essendo una funzione di x e di y, le y contenute in z hanno dovuto sparire nella differenziazione, poichè differenziando rapporto ad x, abbiamo considerato y come costante. Dobbiamo dunque, integrando, conservare la medesima ipotesi, e supporre che la costante arbitraria è in generale una funzione di y; per conseguenza avremo per l'integrale dell'equazione proposta

$$z=ax+\varphi y.$$

228. Cerchiamo ancora a integrare l'equazione differenziale parziale

$$\frac{dz}{dx}=\mathrm{X},$$

nella quale X è una funzione di x; moltiplicando per dx e integrando, troveremo

$$z=\int \mathrm{X}\,dx+\varphi y.$$

229. Per esempio, se la funzione rappresentata da X fosse x^2+a^2, l'integrale sarebbe

$$z=\frac{x^3}{3}+a^2x+\varphi y.$$

230. Non si troverà maggior difficoltà a integrare l'equazione

$$\frac{dz}{dx}=\mathrm{Y},$$

e si avrà

$$z=\mathrm{Y}x+\varphi y.$$

231. S'integrerà nella medesima maniera qualunque equazione nella quale $\frac{dz}{dx}$ eguaglierà una funzione di due variabili x e y. Se si ha, per esempio,

$$\frac{dz}{dx}=\frac{x}{\sqrt{ay+x^2}},$$

considerando y come costante, s'integrerà mediante il n.° 43, dopo aver moltiplicato per dx; e chiamando φy la costante che si deve aggiungere all'integrale, si avrà

$$z=\sqrt{ay+x^2}+\varphi y.$$

232. Finalmente, se vogliamo integrare l'equazione

$$\frac{dz}{dx}=\frac{1}{\sqrt{y^2-x^2}},$$

considereremo sempre y come costante, e si avrà n.° 46,

$$z=\mathrm{arco}\left(\mathrm{sen}=\frac{x}{y}\right)+\varphi y.$$

233. In generale, per integrare l'equazione

$$\frac{dz}{dx}dx=\mathrm{F}(x,y)\,dx,$$

si prenderà l'integrale rapporto ad x, e aggiungendo quindi una costante funzione di y, per completarlo, si troverà

$$z=\int F(x,y)\,dx+\varphi y.$$

234. Da quello che precede, si vede che eccettuato l'ipotesi di una delle variabili supposta costante, e l'introduzione, nell'integrale di una costante funzione di questa variabile, si segue lo stesso processo che nell'integrazione dell'equazioni differenziali ordinarie.

235. Consideriamo ora l'equazioni differenziali parziali, le quali contengono due coefficienti differenziali del prim'ordine; e sia l'equazione

$$M\frac{dz}{dx}+N\frac{dz}{dy}=0,$$

nella quale M ed N rappresentano delle funzioni date di x e di y, se ne deduce

$$\frac{dz}{dy}=-\frac{M}{N}\frac{dz}{dx},$$

sostituendo questo valore nella formola

$$dz=\frac{dz}{dx}dx+\frac{dz}{dy}dy\ .\ .\ .\ .\ .\ (278),$$

la quale altro non esprime che z è funzione di x e di y, si ottiene

$$dz=\frac{dz}{dx}\left(dx-\frac{M}{N}dy\right),$$

ovvero

$$dz=\frac{dz}{dx}\cdot\frac{Ndx-Mdy}{N}.$$

Sia λ il fattore proprio a rendere $Ndx-Mdy$ una differenziale esatta dv, avremo

$$\lambda(Ndx-Mdy)=dv\ .\ .\ .\ .\ .\ (279).$$

Per mezzo di quest'equazione, elimineremo $Ndx-Mdy$ dalla precedente, ed otterremo

$$dz=\frac{1}{\lambda N}\frac{dz}{dx}\cdot dv.$$

Finalmente, se si osserva che il valore $\frac{dz}{dx}$ non è determinato, possiamo prenderlo tale che $\frac{1}{\lambda N}\frac{dz}{dx}dv$ possa integrarsi, il che esige che $\frac{1}{\lambda N}\frac{dz}{dx}$ sia una funzione di v; poichè si sa che la differenziale di qualunque funzione data di v, dev'essere della forma $Fv\,.\,dv$. Segue dunque da ciò che dobbiamo avere

$$\frac{1}{\lambda N}\frac{dz}{dx}=Fv,$$

equazione che cangerà la precedente in

$$dz=Fv\,.\,dv;$$

donde si ricaverà

$$z = \varphi v \ldots\ldots (280).$$

236. Se s' integra con questo mezzo l' equazione

$$x\frac{dz}{dy} - y\frac{dz}{dx} = 0 \ldots\ldots (281),$$

abbiamo in questo caso $M = -y$, $N = x$, e per conseguenza l' equazione (279) diventerà

$$dv = \lambda (xdx + ydy).$$

Ed è evidente che il fattore λ, proprio a rendere integrabile il secondo membro di quest' equazione, è 2. Sostituendo questo valore a λ e integrando, si ha

$$v = x^2 + y^2;$$

mettendo questo valore nell' equazione (280), avremo per l' integrale dell' equazione (281)

$$z = \varphi\,(x^2 + y^2).$$

237. Sia ora l' equazione

$$P\frac{dz}{dx} + Q\frac{dz}{dy} + R = 0 \ldots\ldots (282),$$

nella quale P, Q ed R sono funzioni delle variabili x, y e z; dividendo per P, e facendo $\frac{Q}{P} = M$, $\frac{R}{P} = N$, potremo metterla sotto questa forma:

$$\frac{dz}{dx} + M\frac{dz}{dy} + N = 0 \ldots\ldots (283);$$

e facendo $\frac{dz}{dx} = p$, $\frac{dz}{dy} = q$, essa diventerà

$$p + Mq + N = 0 \ldots\ldots (284).$$

Quest' equazione stabilisce una relazione tra i coefficienti p e q della formula generale

$$dz = pdx + qdy \ldots\ldots (285);$$

senza questa relazione, p e q sarebbero interamente arbitrarie in questa formola; poichè, come ciò è stato digià osservato, essa non significa altro che z è una funzione di due variabili x ed y, e questa funzione può essere qualunque; così, dobbiamo considerare, nell' equazione (285) p e q come due indeterminate; eliminando p per mezzo dall' equazione (284), otterremo

$$dz + Ndx = q(dy - Mdx) \ldots\ldots (286),$$

e q rimarrà sempre indeterminato; ma come vedremo in seguito quando un'equazione di questo genere ha luogo, qualunque sia q, bisogna che si abbia separatamente

$$dz + Ndx = 0, \quad dy - Mdx = 0 \ldots\ldots (287).$$

238. Se P, Q ed R non contengono la variabile z, seguirà il medesimo di M e di N; allora la seconda dell'equazioni (287) sarà un' equazione a due variabili x e y, e potrà diventare una differenziale esatta mediante l' aiuto di un fattore che rappresenteremo con λ; ed avremo

$$\lambda(dy - Mdx) = 0 \ldots\ldots (288).$$

L' integrale di quest' equazione sarà una funzione di x e di y alla quale dovremo aggiungere una costante arbitraria $-\omega$, che facciamo precedere del segno negativo, perchè trasportata nel secondo membro, essa sia positiva; dimodochè avremo

$$F(x,y)=\omega;$$

donde dedurremo

$$y=f(x,\omega).$$

Tale sarà il valore di y che sarà dato dalla seconda dell' equazioni (287); e, per stabilire che esse hanno luogo simultaneamente, bisognerà sostituire questo valore nella prima di quest' equazioni; ora, quantunque questa variabile non sia in evidenza, si sente che essa può essere contenuta in N. Questa sostituzione, mediante il valore che abbiamo trovato per y, equivale a considerare y, come una funzione di x e della costante arbitraria ω nella prima dell' equazioni (287). Integrando dunque questa prima equazione, in quest' ipotesi si troverà

$$z=-\int \mathrm{N}dx+\varphi\omega.$$

239. Per dare un esempio di quest' integrazione; prendiamo l' equazione

$$x\frac{dz}{dx}+y\frac{dz}{dy}=a\sqrt{x^2+y^2};$$

paragonandola all' equazione (283), abbiamo

$$\mathrm{M}=\frac{y}{x},\quad \mathrm{N}=-a\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}\ \ldots\ldots (289).$$

Questi valori, essendo sostituiti nell' equazioni (287), le convertiranno in

$$dz-a\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}dx=0,\quad dy-\frac{y}{x}dx=0\ \ldots\ldots (290).$$

Sia λ il fattore che rende integrabile quest' ultima equazione, avremo

$$\lambda\left(dy-\frac{y}{x}dx\right)=0,$$

ovvero piuttosto

$$\lambda\left(\frac{xdy-ydx}{x}\right)=0,$$

equazione integrabile se si fa $\lambda=\frac{1}{x}$, perchè allora il suo primo membro diventa una differenziale esatta. Eguagliando dunque l' integrale di quest' equazione ad una costante arbitraria ω, avremo

$$\frac{y}{x}=\omega,$$

e per conseguenza $y=\omega x$.

Per mezzo di questo valore di y, si converte la prima dell' equazioni (290) in

$$dz-a\frac{\sqrt{x^2+\omega^2x^2}}{x}dx=0,$$

o piuttosto in

$$ds = adx\sqrt{1+\omega^2};$$

integrando considerando ω come costante, otterremo

$$s = a\int dx\sqrt{1+\omega^2+\varphi\omega};$$

e per conseguenza

$$s = ax\sqrt{1+\omega^2}+\varphi\omega.$$

Rimettendo per ω il suo valore, si otterrà

$$s = ax\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}}+\varphi\frac{y}{x},$$

ovvero piuttosto

$$s = a\sqrt{x^2+y^2}+\varphi\frac{y}{x}.$$

240. Nel caso il più generale, in cui i coefficienti P, Q, R, dell'equazione (282), contengono le tre variabili x, y, z, può succedere che l'equazioni (287) non contengano ciascuna che le due variabili le quali sono in evidenza, e che per conseguenza, si possa metterle sotto le forme

$$dz = f(x, z)\,dx = o, \qquad dy = \mathrm{F}(x, y)\,dx.$$

Non possiamo integrare volontariamente quest' equazioni, scrivendo come nel n.° 233,

$$z = \int f(x, z)\,dx + \varphi z, \quad y = \int \mathrm{F}(x, y)\,dx + \varphi y;$$

poichè allora si vede che bisognerebbe supporre z costante nella prima equazione, e y costante nella seconda; ipotesi contraddittorie, poichè una delle tre coordinate x, y, z, non può suppórsi costante nella prima equazione senza che essa lo sia nella seconda.

241. Ecco dunque in qual maniera s'integreranno l'equazioni (287), nel caso in cui esse non contengano ciascuna che le due variabili che sono in evidenza: siano μ e λ i fattori che rendono l'equazioni (287) delle differenziali esatte; se rappresentiamo queste differenziali per $d\mathrm{U}$ e per $d\mathrm{V}$, avremo

$$\lambda(dz + \mathrm{N}dx) = d\mathrm{U}, \quad \mu(dy - \mathrm{M}dx) = d\mathrm{V};$$

per mezzo di questi valori, l'equazione (286) diventerà

$$d\mathrm{U} = g\,\frac{\lambda}{\mu}\,d\mathrm{V} \ldots\ldots (291).$$

Siccome il primo membro di quest' equazione è una differenziale esatta, bisogna che segua ll medesimo del secondo, ciò significa che $g\frac{\lambda}{\mu}$ dev'essere una funzione di V; rappresentando questa funzione per $\varphi\mathrm{V}$, l'equazione (291) diventerà

$$d\mathrm{U} = \varphi\mathrm{V}\,.\,d\mathrm{V};$$

donde integrando si dedurrà,

$$U = \phi V.$$

242. Prendiamo per esempio l' equazione

$$xy\frac{dz}{dx} + x^2\frac{dz}{dy} = yz;$$

scrivendola come segue:

$$\frac{dz}{dx} + \frac{x}{y}\frac{dz}{dy} - \frac{z}{x} = 0,$$

si paragonerà all' equazione (285), e si avrà

$$M = \frac{x}{y},\quad N = -\frac{z}{x};$$

per mezzo di questi valori, l' equazioni (287) diventeranno

$$dz - \frac{z}{x}dx = 0,\quad dy - \frac{x}{y}dx = 0;$$

e facendo sparire i denominatori, avremo

$$xdz - zdx = 0,\quad ydy - xdx = 0.$$

I fattori propri a rendere quest' equazioni integrabili sono $\frac{1}{x^2}$ e 2; sostituendoli e integrando, si trova $\frac{z}{x}$ e $y^2 - x^2$ per gl' integrali; mettendo dunque questi valori in luogo di U e di V, nell' equazione $U = \phi V$, otterremo per l' integrale della proposta,

$$\frac{z}{x} = \phi(y^2 - x^2).$$

243. Conviene osservare, che se si fosse eliminato q invece di p (n.° 287), l' equazioni (287) si sarebbero cangiate nelle seguenti:

$$Mdz + Ndy = 0,\quad dy - Mdx = 0 \ldots .(292);$$

e siccome tutto ciò che abbiamo detto dell' equazioni (287) può applicarsi a queste, ne segue che, nel caso in cui la prima dell' equazioni (287) non fosse integrabile, abbiamo la facoltà di cangiare quest' equazioni col sistema dell' equazioni (292), il che equivale a impiegare la prima dell' equazioni (292) invece dalla prima dell' equazioni (287), allora si vedrà se l' integrazione è possibile.

244. Per esempio, se si avesse

$$az\frac{dz}{dx} - zx\frac{dz}{dy} + xy = 0;$$

quest' equazione, divisa per az e paragonata all' equazione (283), darebbe

$$M = -\frac{x}{a},\quad N = \frac{xy}{az};$$

per conseguenza l' equazioni (287) diventerebbero

$$dz + \frac{xy}{az}dx = 0,\quad dy + \frac{x}{a}dx = 0;$$

e mandando via i denominatori, si avrebbe

$$azdz + xydx = 0, \quad ady + xdx = 0 \ldots (293).$$

La prima di quest' equazioni, che contiene tre variabili, non potendo integrarsi immediatamente, sostituiremo ad essa la prima dell' equazioni (292), ed avremo invece dell' equazioni (292), le seguenti;

$$-\frac{x}{a}dz + \frac{xy}{az}dy = 0, \quad ady + xdx = 0;$$

sopprimendo $\frac{x}{a}$ come fattor comune nella prima di quest' equazioni, e moltiplicando l' una per $2z$ e l' altra per 2, si troverà

$$-2zdz + 2ydy = 0, \quad 2ady + 2xdx = 0,$$

equazioni che hanno per integrali

$$y^2 - z^2, \quad e \quad 2ay + x^2;$$

questi valori essendo messi invece di U (n.° 241) e di V (n.° 242), si avrà

$$y^2 - z^2 = \Phi(2ay + x^2).$$

245. Osserviamo che la prima dell' equazioni (292) non è altra cosa che il risultamento dell' eliminazione di dx tra l' equazioni (287).

In generale, si può eliminare qualunque variabile contenuta nei coefficienti M ed N, e, in una parola, combinare in un modo qualunque quest' equazioni: se dopo avere eseguito queste operazioni, si ottiene due integrali rappresentati da $U = a$ e da $V = b$, a e b essendo due costanti arbitrarie, ne potremo sempre conchiudere, che l' integrale è $U = \Phi V$. Infatti, poichè a e b sono due costanti arbitrarie, avendo preso b a piacere, possiamo comporre a in b in un modo qualunque; ciò equivale a dire che si ha la facoltà di prendere per a una funzione arbitraria di b: questa condizione sarà espressa dall' equazione $a = \Phi b$; per conseguenza avremo l' equazioni $U = \Phi b$, $V = b$, nelle quali x, y, z rappresentano le medesime coordinate; se si elimina b tra quest' equazioni, si otterrà $U = \Phi V$.

Possiamo ancora osservare che quest' equazione dice che facendo $V = b$, si deve avere $U = \Phi b = costante$; vale a dire che U e V sono costanti nel medesimo tempo, senza che a e b dipendano l' una dall' altra, poichè la funzione Φ è arbitraria. Ora questa è esattamente la condizione che vien data dall' equazioni $U = a$, e $V = b$.

246. Abbiamo veduto (n.° 245), che se nell' integrare l'equazione

$$\frac{dz}{dx} + M\frac{dz}{dy} + N = 0 \ldots (294),$$

nella quale M ed N sono funzioni di x, di y e di z, si ottengono due integrali $U = a$ e $V = b$, si aveva necessariamente $a = \Phi b$. La dimostrazione di questo teorema essendo importantissima, abbiamo cercato di darle l' ultimo grado di rigore nella seguente maniera.

U e V essendo funzioni di x, di y e di z, le costanti a e b possono ancora considerarsi come funzioni di queste medesime variabili, in virtù dell' equazioni $U = a$ e $V = b$; per conseguenza, se si differenziano successivamente quest' equazioni, si avrà

$$\left.\begin{aligned} da &= X\,dx + Y\,dy + Z\,dz \\ db &= X'dx + Y'dy + Z'dz \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (295);$$

queste differenziali debbono esser nulle, per la ragione che a e b sono costanti; così, l'equazioni $da=0$, $db=0$, obbligano alle seguenti:

$$\left.\begin{array}{l} X\,dx+Y\,dy+Z\,dz=0 \\ X'dx+Y'dy+Z'dz=0 \end{array}\right\} \ldots\ldots (296).$$

Se in quest' equazioni, divise per dx, si sostituiscono i valori di dz e di dy, ricavati dall' equazioni (287)

$$dz+N\,dx=0,\quad dy-M\,dx=0 \ldots\ldots (297),$$

si avrà

$$X+YM-ZN=0,\quad X'+Y'M-Z'N=0,$$

da quest' equazioni ricaveremo

$$M=\frac{ZX'-XZ'}{Z'Y-ZY'},\qquad N=\frac{X'Y-Y'X}{Z'Y-ZY'};$$

sostituendo questi valori di M e di N nell' equazione (294), si otterrà

$$\frac{dz}{dx}+\frac{ZX'-XZ'}{Z'Y-ZY'}\frac{dz}{dy}+\frac{X'Y-Y'X}{Z'Y-ZY'}=0 \ldots\ldots (298);$$

i coefficienti $\frac{dz}{dx}$ e $\frac{dz}{dy}$ si deducono dall' equazioni (297), le quali danno

$$\frac{dz}{dx}=-N,\quad \frac{dy}{dx}=M,$$

$$\frac{dz}{dy}=\frac{dz}{dx}\frac{dx}{dy}=-\frac{N}{M} \ldots\ldots (299);$$

mettendo questi valori di $\frac{dz}{dx}$ e di $\frac{dz}{dy}$ nell' equazione (298), e facendo sparire il denominatore, si troverà

$$-\left(Z'Y-ZY'\right)N-\left(ZX'-XZ'\right)\frac{N}{M}+X'Y-Y'X=0 \ldots\ldots (300).$$

La quantità X, Y, Z, che entrano in quest' equazione, non sono sempre conosciute, poichè esse non debbono essere date che differenziando l' equazioni $U=a$ e $V=b$. Cerchiamo dunque di eliminare X, Y e Z dal nostro resultamento. A quest' effetto, considerando z come una funzione di x e di y, ricaveremo dall' equazioni (295)

$$\frac{da}{dx}=X+Z\frac{dz}{dx},\qquad \frac{db}{dx}=X'+Z'\frac{dz}{dx},$$

$$\frac{da}{dy}=Y+Z\frac{dz}{dy},\qquad \frac{db}{dy}=Y'+Z'\frac{dz}{dy};$$

mettendo in quest' espressioni i valori di $\frac{dz}{dx}$ e di $\frac{dz}{dy}$, dati dall' equazio-

n.° (290), e deducendo i valori di X, di Y, di X' e di Y', troveremo

$$X = \frac{da}{dx} + ZN, \quad X' = \frac{db}{dx} + Z'N,$$

$$Y = \frac{da}{dy} + \frac{ZN}{M}, \quad Y' = \frac{db}{dy} + \frac{Z'N}{M};$$

sostituendo questi valori di X, di Y, di X' e di Y', nell'equazione (300) e riducendo, otterremo

$$\frac{da}{dx}\frac{db}{dy} = \frac{da}{dy}\frac{db}{dx} \ldots\ldots (301).$$

Quest'equazione prova che a è funzione di b; e infatti, se abbiamo $a = Fb$, differenziando quest'equazione, troveremo

$$da = \varphi b\, db,$$

donde ne dedurremo

$$\frac{da}{dx} = \varphi b \frac{db}{dx}, \quad \frac{da}{dy} = \varphi b \frac{db}{dy};$$

eliminando φb, troveremo l'equazione (301).

247. Per dare un'applicazione del teorema stabilito (n.° 245), sia

$$zx\frac{dz}{dx} - zy\frac{dz}{dy} - y^2 = 0.$$

Dopo aver diviso per zx, paragoneremo quest'equazione all'equazione (283), il che ci darà

$$M = -\frac{y}{x}, \quad N = -\frac{y^2}{zx},$$

e l'equazioni (287) diventeranno

$$dz - \frac{y^2}{zx}dx = 0, \quad dy + \frac{y}{x}dx = 0,$$

ovvero

$$zxdz - y^2dx = 0, \quad xdy + ydx = 0.$$

La prima di quest'equazioni contenendo tre variabili, non cercheremo d'integrarla in questo stato; ma se sostituiamo il valore ydx, dedotto dalla seconda, essa acquista un fattor comune x il quale, essendo soppresso, si riduce a

$$zdz + ydy = 0,$$

e si vede che moltiplicandola per 2, essa diventa integrabile; l'altra equazione lo è ancora, integrandole, si troverà

$$z^2 + y^2 = a, \quad xy = b;$$

donde concluderemo che

$$z^2 + y^2 = \varphi xy.$$

248. Termineremo quello che dobbiamo dire sull'equazioni differenziali parziali del prim'ordine, con la soluzione di questo problema: *Un' equazione la quale contiene una funzione arbitraria di una o di più variabili essendo data,*

trovare l'equazione differenziale parziale che l' ha prodotta.

Supponiamo dunque che si abbia

$$z = F(x^2 + y^2);$$

faremo

$$x^2 + y^2 = u \quad \ldots \quad (302),$$

e la nostra equazione diventerà

$$z = Fu;$$

la differenziale di Fu dovendo essere, in generale, una funzione di u moltiplicata per du, potremo scrivere

$$dz = \varphi u du;$$

se prendiamo la differenziale di z, rapporto ad x solamente, vale a dire considerando y come una costante, dovremo ancora prendere la differenziale di u nella stessa ipotesi; per conseguenza, dividendo per dx l'equazione precedente, avremo

$$\frac{dz}{dx} = \varphi u \frac{du}{dx} \quad \ldots \quad (303);$$

se consideriamo in seguito x come costante, e y come variabile, troveremo, con un analogo processo

$$\frac{dz}{dy} = \varphi u \frac{du}{dy} \quad \ldots \quad (304);$$

i valori dei coefficienti differenziali $\frac{du}{dx}$ e $\frac{du}{dy}$, i quali entrano nell' equazioni (303) e (302), si otterranno differenziando successivamente l' equazione (302) rapporto a x e ad y, il che ci darà

$$\frac{du}{dx} = 2x, \quad \frac{du}{dy} = 2y;$$

sostituendo questi valori nell' equazioni (303) e (304), avremo

$$\frac{dz}{dx} = 2x\varphi u, \quad \frac{dz}{dy} = 2y\varphi u;$$

eliminando φu tra quest' equazioni, troveremo finalmente

$$y\frac{dz}{dx} = x\frac{dz}{dy}.$$

249. Prendiamo ancora per esempio l' equazione

$$z^2 + 2ax = F(x - y);$$

facendo

$$x - y = u \quad \ldots \quad (305),$$

quest' equazione diventa

$$z^2 + 2ax = Fu;$$

e differenziando, si ha

$$d(z^2 + 2ax) = \varphi u du;$$

prendendo, rapporto ad x, la differenziale indicata, considereremo z come variabile in virtù di x che vi è contenuto, e dividendo per dx, avremo

$$2z\frac{dz}{dx} + 2a = \varphi u \frac{du}{dx} \quad \ldots \quad (306);$$

operando in una maniera analoga, rapporto ad y, considerando z come una funzione la quale non varia che a motivo di y, e dividendo per dy, troveremo

$$2z\frac{dz}{dy}=\varphi u\frac{du}{dy}\ \ldots\ (307);$$

per eliminare i coefficienti differenziali di du, l'equazione (305) dà

$$\frac{du}{dx}=1,\quad \frac{du}{dy}=-1;$$

sostituendo questi valori nell'equazioni (306) e (307), avremo

$$2z\frac{dz}{dx}+2a=u,\quad 2z\frac{dz}{dy}=-u;$$

eliminando u tra quest'equazioni, otterremo

$$\frac{dz}{dx}+\frac{dz}{dy}+\frac{a}{z}=0.$$

250. Le funzioni arbitrarie, le quali completano gl'integrali dell'equazioni differenziali parziali, debbono determinarsi mediante condizioni le quali dipendono dalla natura dei problemi che hanno dato luogo a quest'equazioni, problemi che la maggior parte appartengono a questioni fisico-matematiche.

Non volendo punto allontanarci dal nostro soggetto, ci limiteremo ad alcune considerazioni puramente analitiche, e cominceremo dal cercare quali sono le condizioni contenute nell'equazione

$$\frac{dz}{dx}=a\ \ldots\ (308).$$

251. Quando z è una funzione di x e di y, quest'equazione può considerarsi come quella di una superficie. Questa superficie, dalla natura della sua equazione, gode della seguente proprietà, che $\frac{dz}{dx}$ deve sempre essere una quantità costante. Segue da ciò che qualunque sezione EF (*Tav.* CLI, *fig.* 1), di questa superficie fatta da un piano CD, parallelo a quello delle x, z, è una linea retta. Infatti, qualunque sia la natura di questa sezione, se si divide in un numero infinito di parti mm', $m'm''$, $m''m'''$, ec., queste parti vista la loro piccola estensione, potranno considerarsi come linee rette, e rappresenteranno gli elementi della sezione; uno di questi elementi mm' facendo, con una paralella mn'' all'asse delle ascisse, un angolo la cui tangente trigonometrica è rappresentata da $\frac{dz}{dx}$; siccome quest'angolo è costante, ne segue che tutti gli angoli $m'mn''$, $m''m'n''$, $m'''m''n'$, ec., formati dagl'elementi della curva, con delle paralelle mn'', $m'n''$, $m''n'$, ec., all'asse delle ascisse, saranno tutti eguali; il che prova che la sezione EF è una linea retta.

252. Si giungerebbe al medesimo resultamento considerando l'integrale dell'equazione $\frac{dz}{dx}=a$, che abbiamo veduto essere, n.° 227,

$$z=ax+\varphi y\ \ldots\ (309);$$

mentre, per tutti i punti della superficie i quali sono nel piano CD, l'ordinata

è eguale ad una costante c, rappresentata nella (*Tav.* CLI, *fig.* 1), con AB; sostituendo dunque φc invece di φy, e facendo $\varphi c = C$, l'equazione (309) diventerà

$$z = ax + C \ldots\ldots (310);$$

quest'equazione essendo quella di una retta, e appartenendo alla sezione EF, ne segue che questa sezione è una linea retta.

253. La medesima cosa avendo luogo rapporto agli altri piani secanti che si condurrebbero paralellamente a quello delle x, z, concludiamo che tutti questi piani taglieranno la superficie seguendo delle linee rette, le quali saranno paralelle, poichè esse formeranno ciascuna, con una paralella all'asse delle x, un angolo la cui tangente trigonometrica sarà a.

254. Se ora facciamo $x = 0$, l'equazione (309) si ridurrà a $z = \varphi y$, e sarà quella di una curva GHK tracciata sul piano delle y, z; questa curva contenendo tutti i punti della superficie, le cui coordinate sono $x = 0$, incontrerà il piano CD in un punto m, che avrà $x = 0$ per una delle sue coordinate, in virtù dell'equazione (310), sarà $z = C$, valore rappresentato nella figura da Bm. Quello che si dice del piano CD potendo applicarsi a tutti gli altri piani che gli sono paralelli, ne resulta che per tutti i punti della curva di cui $z = \varphi y$ è l'equazione, e la quale è tracciata sul piano delle y, z, partiranno delle rette paralelle all'asse delle x. Ecco tutto quello che ci dienno l'equazioni (308) e (309); e siccome questa condizione è sempre adempita, qualunque sia la figura della curva di cui $z = \varphi y$ è l'equazione, si veda che questa curva è arbitraria.

255. Segue da ciò che precede, che la curva GHK, di cui $z = \varphi y$ è l'equazione, può essere composta di archi di differenti curve, i quali si uniscono gli uni gli altri, ovvero i quali lasciano tra essi dell'interruzioni, in certe parti come nella (*Tav.* CLI, *fig.* 2). Una curva di quest'ultimo genere si chiama *discontinua*. Una curva può essere ancora discontigua; questo è quello che succede quando vi è interruzione nelle sue parti, senza che, nel punto in cui ha luogo quest'interruzione, il suo corso sia sospeso. La curva (*Tav.* CLI, *fig.* 3) ce ne offre un esempio ai punti M ed N i quali non si succedono, e non ostante non lasciano tra essi alcun vuoto. Osserviamo che in simile circostanza, due ordinate differenti, tali come PM e PN, ovvero come QB e QS, corrispondono ad una medesima ascissa. Finalmente, è possibile che la curva sia composta di un seguito infinito di archi infinitamente piccoli, i quali appartengono ciascuno a curve differenti; in questo caso, la curva è irregolare, come lo sarebbero, per esempio, dei segni di penna che si traccerebbero a caso; ma in qualunque maniera sia formata la curva la cui equazione è $z = \varphi y$, basterà per costruire la superficie, di far muovere una retta sempre paralellamente a se stessa, con questa condizione, che il suo punto m percorra la curva GHK (*Tav.* CLI, *fig.* 1) di cui $z = \varphi y$ è l'equazione, e che è tracciata a caso sul piano delle y, z.

256. Se invece dell'equazione $\frac{dz}{dx} = a$, si avesse quella di $\frac{dz}{dx} = X$, nella quale X fosse una funzione di x, allora conducendo un piano CD, (*Tav.* CLI, *fig.* 1), paralello a quello delle x, z la superficie sarebbe tagliata seguendo una data sezione EF, la quale non sarebbe più una linea retta, come nel caso precedente. Infatti, per ogni punto m' preso sopra questa sezione, la tangente trigonometrica dell'angolo $n''m'm''$ formato dal prolungamento dell'elemento $m'm''$ della sezione, con una paralella all'asse delle x, sarà eguale ad una funzione X dell'ascissa x di questo punto: e siccome l'ascissa x è differente per ciascun punto, ne segue che l'angolo $n''m'm''$ sarà differente a ciascun punto della se-

zione; il che prova che EF non sarà più, come precedentemente, una linea retta. La superficie si costruirà egualmente che nel precedente problema, facendo muovere la sezione EF paralellamente a se stessa, in modo che il suo punto m tocchi continuamente la curva GHK, di cui l'equazione è $z = \varphi y$.

257. Supponiamo ora che, nell' equazione precedente, in luogo di X, si abbia una funzione P di x e di y; l' equazione $\frac{dz}{dx} = \text{P}$, contenendo tre variabili, apparterrà ancora ad una superficie curva. Se si taglia questa superficie mediante un piano paralello a quello delle x, z, avremo una sezione nella quale y sarà costante, e siccome in tutti i suoi punti $\frac{dz}{dx}$ eguaglierà una funzione della variabile x, bisognerà dunque, come nel caso precedente, che questa sezione sia curva. L' equazione $\frac{dz}{dx} = \text{P}$, essendo integrata, avremo per quella della superficie

$$z = \int \text{P}dx + \varphi y,$$

se io quest' equazione diamo successivamente a y i valori crescenti y', y'', y''', y^{IV}, ec., e che si chiami P', P'', P'''; P$^{\text{IV}}$, ec., ciò che diventa allora la funzione P, avremo l' equazioni

$$\left.\begin{aligned} z &= \int \text{P}'\,dx + \varphi y', \\ z &= \int \text{P}''\,dx + \varphi y'', \\ z &= \int \text{P}'''\,dx + \varphi y''', \\ z &= \int \text{P}^{\text{IV}}\,dx + \varphi y^{\text{IV}}, \text{ ec.} \end{aligned}\right\} \ldots . (311);$$

e si vede che quest' equazioni apparterranno a curve della medesima natura, ma differenti di forme, poichè i valori della costante y non sono i medesimi. Queste curve non saranno altra cosa che le sezioni della superficie con piani paralelli a quello delle x, z; e, incontrando il piano delle y, z, esse formeranno una curva di cui l' equazione si otterrà eguagliando a zero il valore di x in quello della superficie. Si chiami Y ciò che diventa $\int \text{P}dx$ in questo caso, avremo

$$z = \text{Y} + \varphi y \ldots\ldots (312);$$

e si vede che a motivo di φy, la curva determinata da questa sezione dev' essere arbitraria; così avendo tracciata a piacere (*Tav.* CLI, fig. 4), la curva QRS sul piano delle y, z, se rappresentiamo con RL la sezione di cui $z = \int \text{P}'dx + \varphi y'$ è l' equazione, si farà muovere questa sezione, tenendo la sua estremità R sempre applicata alla curva QRS; ma in modo che, in questo

movimento, questa sezione RL prenda le forme successive determinate dall'equazioni (311), e si costruirà la superficie alla quale apparterrà l'equazione $\frac{dy}{dx}=P$.

258. Consideriamo finalmente l'equazione generale

$$\frac{dz}{dx}+M\frac{dz}{dy}+N=o,$$

il cui integrale è $U=\phi T$, n°. 245. Quando abbiamo $U=a$ è $V=b$, quest'equazioni esistendo ciascona tra tre coordinate, possiamo considerarle come quelle di due superficie; e poichè queste coordinate sono comuni, esse debbono appartenere alla curva d'intersezione di queste due superficie. Premesso ciò, a e b essendo costanti arbitrarie, se in $U=a$ si dà ad x e ad y i valori x' ed y' otterremo per z una funzione di x', di y' e di a, la quale determinerà un punto della superficie di cui $U=a$ è l'equazione. Questo punto qualunque varierà di posizione se successivamente si danno diversi valori alla costante arbitraria a, ciò equivale a dire che facendo variare a, faremo passare la superficie di cui $U=a$ è l'equazione, per un nuovo sistema di punti. Quello che si dice di $U=a$, potendo applicarsi a $V=b$, concludiamo che la curva d'intersezione delle due superficie cangerà continuamente di posizione, e per conseguenza descriverà una superficie curva, nella quale a e b potranno considerarsi come due coordinate; e poichè la relazione $a=\phi b$, che lega tra esse queste due coordinate, è arbitraria, si conosce che la determinazione della funzione ϕ equivale al problema di far passare una superficie per una curva tracciata arbitrariamente.

259. Per far conoscere come queste sorti di problemi possono condurre a condizioni analitiche, esaminiamo qual è la superficie di cui l'equazione è

$$y\frac{dz}{dx}=x\frac{dz}{dy}\ \ldots\ldots\ (313).$$

Abbiamo veduto, n.° 236, che quest'equazione aveva per integrale

$$z=\varphi(x^2+y^2)\ \ldots\ (314),$$

reciprocamente si deduce da quest'integrale

$$x^2+y^2=\Phi z;$$

se si taglia la superficie con un piano paralello a quello delle x, y, la sezione avrà per equazione

$$x^2+y^2=\Phi c;$$

e rappresentando con a^2 la costante Φc, si avrà

$$x^2+y^2=a^2.$$

Quest'equazione appartiene al circolo; per conseguenza la superficie goderà di questa proprietà, che qualunque sezione fatta da un piano paralello a quello delle x, y, sarà un circolo.

260. Questa proprietà è ancora indicata dall'equazione (313), poichè si deduce (*Vedi* Differenziale),

$$x=y\frac{dy}{dx}.$$

Quest'equazione c'insegna che la suonormale dev'essere sempre eguale all'ascissa, il che è la proprietà del circolo.

261. L'equazione (314) non dicendoci altro, se non che tutte le sezioni paralelle al piano delle x, y, sono circoli, ne segue che la legge secondo la

quale i raggi delle sezioni debbono aumentarsi, non è compresa nell'equazione (314), e che, per conseguenza, qualunque superficie di rivoluzione soddisfarà al problema; poichè si sa che in queste sorti di soperficie, le sezioni parallele al piano delle x, y sono sempre circoli, e non vi è bisogno di dire che la generatrice la quale, in una rivoluzione, descrive la soperficie, può essere una curva discontinua, discontigua, regolare o irregolare.

262. Cerchiamo dunque la superficie per la quale questa generatrice sarebbe una parabola AN, (*Tav.* CLI, *fig.* 5), e supponiamo che, in quest'ipotesi, la superficie sia tagliata da un piano AB, il quale passerebbe per l'asse delle z; la traccia di questo piano sopra quello delle x, y sarà una retta AL la quale, condotta per l'origine, avrà per equazione $y=ax$; se rappresentiamo con t l'ipotenusa AQ del triangolo rettangolo APQ, costruito sul piano delle x, y, avremo

$$t^2=x^2+y^2;$$

ma t essendo l'ascissa AQ della parabola AN, di cui QM$=z$ è l'ordinata, abbiamo per la natura di questa curva

$$t^2=bz;$$

mettendo invece di t^2 il suo valore x^2+y^2, verrà

$$z=\frac{1}{b}\left(y^2+x^2\right), \quad \text{ovvero} \quad z=\frac{1}{b}\left(a^2x^2+x^2\right)=\frac{1}{b}\,x^2\left(a^2+1\right);$$

e facendo $\frac{1}{b}\left(a^2+1\right)=m$, otterremo

$$z=mx^2;$$

dimodochè la condizione prescritta nell'ipotesi in cui la generatrice debba essere una parabola, è che si deve avere

$$z=mx^2 \quad \text{quando} \quad y=ax.$$

263. Cerchiamo ora di determinare, per mezzo di queste condizioni, la funzione arbitraria che entra nell'equazione (314). A quest'effetto, rappresenteremo con U la quantità x^2+y^2 che è affetta del segno φ, e l'equazione (314) diventerà

$$z=\varphi U \;\ldots\ldots\; (315),$$

ed avremo le tre equazioni

$$x^2+y^2=U, \quad y=ax, \quad z=mx^2.$$

Per mezzo delle due prime elimineremo y, ed otterremo il valore di x^2 il quale, essendo messo nella terza, darà

$$z=m\,\frac{U}{a^2+1},$$

equazione che si riduce a

$$z=\frac{1}{b}\,U;$$

perchè si è visto che abbiamo supposto $\frac{1}{b}\left(a^2+1\right)=m$; il valore di z essendo

sostituito nell' equazione (315), la cangerà in

$$\varphi U = \frac{1}{b} U;$$

mettendo il valore di U in quest' equazione, troveremo

$$\varphi\left(x^2+y^2\right) = \frac{1}{b}\left(x^2+y^2\right),$$

e si vede che la funzione è determinata; sostituendo questo valore di $\varphi(x^2+y^2)$ nell' equazione (314), avremo per l' integrale cercato

$$z = \frac{1}{b}\left(x^2+y^2\right);$$

equazione che gode della proprietà domandata, poichè l' ipotesi di $y = ax$, dà

$$z = mx^2.$$

264. Questo processo è generale; poichè, supponiamo che le condizioni che debbono determinare la costante arbitraria, siano che l'integrale dia $F(x,y,z) = o$, quando si ha $f(x,y,z) = o$, ci procoreremo una terza equazione eguagliando ad U la quantità che è preceduta da φ; e allora eliminando successivamente due delle variabili x, y, z, si otterrà ciascuna delle variabili in funzione di U. Mettendo questi valori nell' integrale, si giungerà ad un' equazione il di cui primo membro sarà φ U, e di cui il secondo membro sarà un' espressione composta in U; rimettendo il valore di U in funzione delle variabili, la funzione arbitraria si troverà determinata.

265. Un' equazione differenziale parziale del second' ordine, nella quale z è una funzione di due variabili x e y, deve sempre contenere uno o più di questi coefficienti differenziali $\frac{d^2z}{dx^2}$, $\frac{d^2z}{dy^2}$, $\frac{d^2z}{dxdy}$, indipendentemente dai coefficienti differenziali del prim' ordine che essa può contenere.

266. Ci limiteremo ad integrare le più semplici dell' equazioni differenziali parziali del second' ordine, e cominceremo dalle seguenti:

$$\frac{d^2z}{dx^2} = o,$$

moltiplicando per dx, e integrando rapporto ad x, aggiungeremo all' integrale una costante arbitraria funzione di y, ed avremo

$$\frac{dz}{dx} = \varphi y;$$

moltiplicando di nuovo per dx, e indicando con ψy una funzione di y, che si deve aggiungere all' integrale, troveremo

$$z = x\varphi y + \psi y.$$

267. Proponiamoci ora d' integrare l' equazione

$$\frac{d^2z}{dx^2} = P,$$

nella quale P è una funzione di x e di y; operando come nell' integrazione

precedente, cominceremo dal trovare

$$\frac{dz}{dx} = \int P dx + \varphi y;$$

una seconda integrazione ci darà

$$z = \int \left[\int P dx + \varphi y\right] dx + \psi y.$$

268. S' integrerebbe nella medesima maniera

$$\frac{d^2z}{dy^2} = P,$$

e si troverebbe

$$z = \int \left[\int P dy + \varphi x\right] dy + \psi x.$$

269. L' equazione

$$\frac{d^2z}{dy dx} = P,$$

si comincerebbe ad integrarla rapporto ad una delle variabili, e quindi rapporto all' altra, il che darebbe

$$z = \int \left[\int P dx + \varphi y\right] dy + \varphi x.$$

270. In generale, si tratterà nella medesima maniera una dell' equazioni

$$\frac{d^nz}{dy^n} = P, \quad \frac{d^nz}{dx dy^{n-1}} = Q,$$

$$\frac{d^nz}{dx^2 dy^{n-2}} = R, \text{ ec.},$$

nelle quali P, Q, R, ec., sono funzioni di x e di y, il che darà luogo a un seguito d' integrazioni le quali introdurranno ciascuna una funzione arbitraria nell' integrale.

271. Dopo l' equazioni che abbiamo considerate, una delle più facili a integrare è la seguente:

$$\frac{d^2z}{dy^2} + P\frac{dz}{dy} = Q;$$

con P e con Q indichiamo sempre due funzioni di x e di y. Facciamo

$$\frac{dz}{dy} = u \; \ldots\ldots (316),$$

trasformeremo quest' equazione in

$$\frac{du}{dy} + Pu = Q \; \ldots\ldots (317).$$

Per integrare, considereremo x come costante, ed allora quest' equazione non conterrà che due variabili y e u, e sarà della medesima forma dell' equazione

$$dy + Py dx = Q dx \; \ldots\ldots (318),$$

trattata (n.° 148), e il cui integrale è

$$y = e^{-\int P dx} \left(\int Q e^{\int P dx} dx + C \right) \dots (319);$$

paragonando dunque l' equazioni (317) e (318), avremo

$$y = u, \quad x = y;$$

sostituendo questi valori nella formula (319), e cangiando C in φx, otterremo

$$u = e^{-\int P dy} \left(\int Q e^{\int P dy} dy + \varphi x \right);$$

mettendo questo valore di u nell' equazione (316), moltiplicando per dy, e integrando, si troverà

$$z = \int \left(e^{-\int P dy} \left(\int Q e^{\int P dy} dy + \varphi x \right) \right) dy + \psi x.$$

272. S' integrerebbero col medesimo metodo l' equazioni

$$\frac{d^2 z}{dx dy} + P \frac{dz}{dx} = Q,$$

$$\frac{d^2 z}{dx dy} + P \frac{dz}{dy} = Q,$$

nelle quali P e Q rappresentano delle funzioni di x; e, a motivo del divisore $dxdy$, ci si accorge che il valore di z non conterrebbe funzioni arbitrarie della medesima variabile.

273. Proponiamo ancora d' integrare l' equazione

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = a^2 \frac{d^2 y}{dx^2} \dots (320).$$

Per eseguir ciò, cominceremo dall' osservare che y essendo una funzione di x e di t, la sua differenziale dev' essere rappresentata da

$$dy = \frac{dy}{dx} dx + \frac{dy}{dt} dt \dots (321);$$

e facendo $\frac{dy}{dx} = p$, $\frac{dy}{dt} = q$, si cangia l' equazione (321), in

$$dy = pdx + qdt \dots (322),$$

e la proposta in

$$\frac{dq}{dt} = a^2 \frac{dp}{dx} \dots (323).$$

L' equazione (322) essendo una differenziale esatta, si avrà

$$\frac{dq}{dx} = \frac{dp}{dt} \dots (324);$$

e siccome p e q sono funzioni di x e di t, le loro differenziali saranno

$$dp = \frac{dp}{dx} dx + \frac{dp}{dt} dt \ldots\ldots (325),$$

$$dq = \frac{dq}{dx} dx + \frac{dq}{dt} dt \ldots\ldots (326);$$

mettendo nell' equazione (326) i valori di $\frac{dq}{dt}$ e di $\frac{dq}{dx}$, dati dall' equazioni (323) e (324), quest' equazione (326) diventerà

$$dq = \frac{dp}{dt} dx + a^2 \frac{dp}{dx} dt \ldots (327).$$

Rappresentando con le medesime lettere le quantità comuni all' equazioni (325) e (327), quest' equazioni potranno scriversi come segue:

$$dp = m dx + n dt \ldots\ldots (328),$$
$$dq = n dx + a^2 m dt \ldots\ldots (329).$$

Moltiplicando la prima di quest' equazioni per a, e aggiungendola all' altra, si troverà

$$a dp + dq = (am + n) dx + a(am + n) dt,$$

equazione la quale, a motivo del fattor comune, può scriversi come segue:

$$a dp + dq = (am + n)(dx + a dt),$$

o piuttosto come segue

$$a dp + dq = (am + n) d(x + at) \ldots\ldots (330).$$

Sottraendo in seguito l' equazione (329) dall'equazione (328) moltiplicata per a, si troverà mediante un' operazione analoga alla precedente

$$a dp - dq = (am - n)(dx - a dt) \ldots\ldots (331),$$

e per conseguenza

$$a dp - dq = (am - n) d(x - at) \ldots\ldots (332).$$

274. Ora, se si osserva che quando si differenzia una funzione di z, la differenziale dev' essere della forma $fz.dz$ (z potrebbe non entrare che alla potenza zero, caso in cui fz si ridurrebbe ad una costante), si concluderà che nell'equazione (330), ove la differenziale, in luogo di essere z, è $x + at$, si deve avere

$$am + n = F(x + at).$$

Egualmente, indicando con F' la caratteristica di un' altra funzione, si ricaverà dall' equazione (332),

$$am - n = F'(x - at);$$

il che cangerà l' equazioni (330) e (332), in

$$a dp + dq = F(x + at) d(x + at) \ldots\ldots (334),$$

e in

$$a dp - dq = F'(x - at) d(x - at) \ldots\ldots (335);$$

e siccome l' integrale di un' espressione della forma $fzdz$ è un' altra funzione di

s, avremo integrando l'equazioni (334) e (335), e rappresentando con f e con f' le caratteristiche di due differenti funzioni,

$$\left.\begin{aligned} ap+q &= f(x+at) \\ ap-q &= f'(x-at) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (336).$$

275. Aggiungendo l'equazioni (336), per eliminare q esse ci danno

$$2ap = f(x+at) + f'(x-at);$$

sottraendo l'equazioni (336) l'una dall'altra per eliminare p, si avrà

$$2q = f(x+at) - f'(x-at);$$

e dividendo uno di questi risultamenti per $2a$, e l'altro per 2, i valori di p e di q sono determinati come segue:

$$p = \frac{f(x+at)+f'(x-at)}{2a},$$

$$q = \frac{f(x+at)-f'(x-at)}{2};$$

mettendo questi valori nell'equazione (322), otterremo

$$dy = \frac{f(x+at)+f'(x-at)}{2a}dx + \frac{f(x+at)-f'(x-at)}{2}dt;$$

e moltiplicando i due termini della seconda frazione per a, per darle il denominatore dell'altra frazione, avremo

$$dy = \frac{f(x+at)+f'(x-at)}{2a}dx + \frac{af(x+at)-af'(x-at)}{2a}dt;$$

riunendo i termini che hanno per fattore $f(x+at)$, e quelli che hanno per fattore $f'(x-at)$, si troverà

$$dy = \frac{f(x+at)(dx+adt)+f'(x-at)(dx-adt)}{2a};$$

equazione che è equivalente a

$$dy = \frac{1}{2}\cdot\frac{f(x+at)d(x+at)}{a} + \frac{1}{2}\cdot\frac{f'(x-at)d(x-at)}{a};$$

e basandoci sopra la medesima ragione che ci ha fatto giungere, n.° 274, alla prima integrazione, troveremo indicando con φ e con ψ le caratteristiche delle due funzioni differenti,

$$y = \frac{1}{2}\cdot\frac{\varphi(x+at)}{a} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\psi(x-at)}{a};$$

e se si osserva che il denominatore a può essere compreso nella funzione, si avrà finalmente

$$y = \frac{1}{2}\varphi\left(x+at\right) + \frac{1}{2}\psi\left(x-at\right) \quad \ldots\ldots (337).$$

276. L'equazioni differenziali parziali del secondo ordine conducono a integrali i quali contengono due funzioni arbitrarie; la determinazione di queste

funzioni equivale a far passare la superficie per due curve le quali possono essere discontinue o discontigue. Per darne l'esempio, prendiamo l'equazione

$$\frac{d^2z}{dx^2}=0,$$

il cui integrale, n.° 266, è

$$z=x\varphi y+\psi y \; . \; . \; . \; . \; . \; (338).$$

Siano Ax, Ay, e Az (*Tav.* CLI *fig.* 1) gli assi coordinati; se si conduce un piano KL parallellamente a quello delle x, z, la sezione della superficie, per questo piano, sarà una linea retta; poichè, per tutti i punti di questa sezione, y essendo eguale ad Ap, se rappresentiamo Ap medianta una costante c, le funzioni φy e ψy diventeranno φc e ψc, e per conseguenza si potranno invece sostituire due costanti a e b; dimodochè l'equazione (338) diventerà

$$z=ax+b \; . \; . \; . \; . \; . \; (339),$$

e sarà quella della sezione fatta dal piano KL.

277. Per conoscere il punto in cui questa sezione incontra il piano delle y, z, facciamo $x=0$; l'equazione (338) ci dà, in quest'ipotesi,

$$z=\psi y,$$

il che indica una curva amb tracciata sul piano delle y, z. Sarebbe facile dimostrare, come nel n.° 254, che la sezione incontra la curva amb in un punto m; e siccome questa sezione è una linea retta, non si tratta, per determinarne la posizione, che trovare un secondo ponto pel quale passi questa linea. A quest'effetto, osserviamo che quando x è eguale a zero, l'equazione (338) si riduce a

$$z=\psi y,$$

nel mentre che quando x è eguale all'unità, la medesima equazione si riduce a

$$z=\varphi y+\psi y;$$

facendo, come precedentemente, $y=$ A$p=$ c, questi due valori di z diventano

$$z=b, \quad z=a+b,$$

e determinano due punti m ed r presi sopra la medesima sezione mr che abbiamo visto essere una linea retta. Per costruire questi punti, si opererà nel seguente modo: si traccerà arbitrariamente sul piano delle y, z la curva amb, e pel punto p, in cui il piano secante KL incontra l'asse delle y, si eleverà la perpendicolare $pm=b$, la quale sarà un'ordinata alla curva; inseguito si prenderà all'intersezione HL del piano secante e di quello delle x, y, la parte pp' eguale all'unità, e pel punto p' si condurrà un piano parallelo a quello delle y, z, e in questo piano si costruirà la curva $a'm'b'$, sul modello della curva amb, e in modo che sia similmente disposta; allora l'ordinata $m'p'$ sarà eguale ad mp; e se si prolunga $m'p'$ di una quantità arbitraria $m'r$, la quale rappresenterà a, si determinerà il punto r della sezione.

Se in seguito si prolunga, col medesimo processo, tutte le ordinate della curva $a'm'b'$, si costruirà una nuova curva $a'rb'$ la quale sarà tale, che conducendo per questa curva e per amb, un piano paralello a quello delle x, z, i due punti in cui le curve saranno incontrate apparterranno alla medesima sezione della superficie.

Segue da ciò che precede, che la superficie può costruirsi, facendo muovere la retta mr, in modo che continuamente tocchi le due curve amb, $a'rb'$.

278. Quest' esempio è sufficiente a far travedere come la determinazione delle funzioni arbitrarie, le quali completano gl' integrali dell' equazioni differenziali parziali del second' ordine, equivale a far passare la superficie per due curve le quali, come le funzioni arbitrarie che servono a costruirle, possono essere discontinue, discontigue, regolari o irregolari.

279. Osserveremo finalmente che se la risoluzione *teorica* dell' equazioni differenziali è ancora tanto poco avanzata, non segue il medesimo della risoluzione *tecnica*, ovvero, come comunemente si dice della loro risoluzione per approssimazione, quest' ultima è completamente data da una formula di sviluppo osservabilissima, dovuta al Signor Wronski. (*Vedi Réfutation de la théorie des fonctions analytiques*, pagina 31). Dobbiamo aggiungere che si deve ancora al medesimo dotto una soluzione teorica dell' equazioni alle differenze del second'ordine. (*Vedi. Critique des fonctions génératrices*).

Per l' istoria del Calcolo Integrale, vedi, in questo Dizionario, la parola MATEMATACHE.

280. I cortesi lettori per completare il presente articolo potranno vedere in questo Dizionario le parole CUBATURA, QUADRATURA, RETTIFICAZIONE e SUPERFICIE, e quindi desiderando sempre più approfondire lo studio di questo ramo importantissimo dell' analisi potranno con profitto consultare le seguenti opere; cioè:

Bordoni — *Lezioni di calcolo sublime*; Brunacci — *Lezioni di calcolo sublime*, vol. 4, in-4, Firenze, 1804 e segg; Navier — *Résumé des leçons d'analyse données à l'École Polytecnique, suivi des notes par M. J. Liouville*, 2 vol. in-8, Paris, 1840; Bossut — *Calcul différentiel et intégral*, 2 vol. in-8; Bougainville — *Traité du calcul intégral*, 2 vol. in-4; Lacroix, *Traité complet de calcul différentiel et calcul intégral*, 3 vol. in-4, Paris, 2ª édition; Duhamel — *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique*; Dobourguet — *Traités élémentaires de Calcul différentiel et de calcul intégral*, 2 vol. in-8, Paris, 1810 e 1811; e Legendre — *Esercices de calcul intégral*, 3 vol. in-4. *avec les supplémens*, 1811 à 1819, ec., ec.

INTERESSE. (*Arit. e Alg.*). L' interesse dell' argento è un canone periodico pagato da quello che prende in imprestito un capitale a quello che lo presta.

L' interesse di una somma qualunque si valuta ordinariamente sopra 100 lire di capitale, e per un periodo di un anno. Se quello che prende in prestito paga annualmente 3, 4, 5, ec. lire per ciascun cento di lire, si dice che la *tassa* dell' interesse è di 3, 4, 5, ec. per cento, e si scrive 3, 4, 5, ec. per $^0/_0$.

Altre volte, invece d' indicare l' interesse di una somma di 100 lire, si dava la somma che rendeva 1 lira di rendita per anno; così, per esempio, se 20 lire rendevano una lira per anno, si diceva che il suo collocamento era fatto *al denaro* 20, egualmente se 18 lire rendevano 1 lira, il collocamento si diceva esser fatto al *denaro* 18, ec. Il denaro 20 rappresentava evidentemente l' interesse di L. 5 per 100 lire di capitale, il denaro 18 quello di 5,55 $^1/_2$ per cento lire, ec.; una semplice proporzione indicherà sempre qual interesse per 100 lire rappresenta un denaro qualunque.

Il modo di riportare la tassa dell' interesse a un capitale di 100 lire, piuttosto che ad un altra somma è una conseguenza del sistema decimale, esso è comodo nel commercio; ma per lo scopo che in questo punto ci proponiamo, è più conveniente di riportare l' interesse dell' argento all' unità d' argento, alla lira, dimodochè invece di dire che cento lire rendono 2, 3, 4, 5, ec., lire, diremo che 1 lira rende Lire 0,02, L. 0,03, L. 0,04, L. 0,05, ec; in generale, indicheremo con r l' interesse di 1 lira per anno.

L'interesse è *semplice* o *composto*. L'interesse *semplice* è quello che si paga alla fine di ciascun anno fino all'epoca del rimborso della somma prestata.

Se si presta per esempio, 1000 lire per 10 anni, alla tassa di L. 0,05 per 1. L., ossia 5 per $^0/_0$, l'interesse annuale sarà di 50 lire. Quest'interesse non aumenterà con gli anni, e nemmeno il capitale prestato varierà.

L'interesse composto è quello che, invece di esser pagato ciascun anno, si aggiunge al contrario alla somma presa ad imprestito dimodochè al second'anno l'interesse dovrà essere calcolato, non più sul capitale primitivo, ma sopra questo capitale aumentato degli interessi dovuti alla fine del prim'anno, e così di seguito.

Per esempio, il capitale collocato essendo di lire 1000, la tassa dell'interesse per 1 lira essendo L. 0,04, ossia 4 per $^0/_0$, quello che presta il denaro dovrebbe lire 40 d'interesse alla fine dal prim'anno; ma invece di pagargli, gli aggiunge al capitale di 1000 lire, e al principio del second'anno deve dunque L. 1040.

Alla fine del second'anno, dovrà gl'interessi di 1040 lire e non più di 1000 lire solamente; quest'interessi ammontano a L. 41,60, e invece di pagargli, gli aggiunge ancora al capitale di L. 1040; al principio del terz'anno, si trova per conseguenza dover dare L. 1081,60, e così di seguito.

Come si vede, il capitale cresce di anno in anno, e per conseguenza gl'interessi crescono ancora; l'aumento del capitale è dovuto all'interesse del capitale primitivo il quale viene aggiunto annualmente, e agli interessi di questi interessi, i quali sono egualmente convertiti ciascun anno in capitale. Sono gl'interessi degl'interessi del capitale primitivo che fanno in modo che questo cresce in una progressione *geometrica*, come si vedrà quanto prima, e non in una progressiona *aritmetica*.

Da queste definizioni ne emergono due conseguenze importanti:

1.° L'*interesse semplice è proporzionale al capitale collocato*, poichè un collocamento di 1000 lire, per esempio, può considerarsi come essendo la riunione di mille collocamenti differenti di 1 Lira.

Dunque, se C rappresenta il numero delle lire contenute nel capitale collocato, r l'interesse di 1 lira nell'unità di tempo (un anno per esempio), e i la rendita prodotta dal capitale C in un anno, avremo

$$i = Cr.$$

E se il collocamento è effettuato per n anni, avremo, indicando con p la somma di tutte le rendite annuali, cioè $n.i$

$$p = n.C.r \quad \ldots . \quad (1).$$

Conoscendo tre delle quattro quantità p, n, C, r, l'equazione (1) darà immediatamente la quarta.

2.° I valori, in capo ad n anni, di due capitali differenti collocati a interesse composto in questo tempo, *sono proporzionali ai capitali primitivi.*

Poichè se si segue di anno in anno ciò che diventano due capitali C e C' collocati in questo modo, si avranno alla fine di ciascun anno delle somme proporzionali ai capitali dal principio dell'anno che si considera, in un anno infatti l'interesse non può essere che semplice; ora, se i capitali prodotti alla fine dell'anno sono costantemente proporzionali ai capitali del principio di quest'anno, si troverà, mediante una serie di rapporti eguali, che i valori, in capo ad n anni, di due capitali primitivi C e C' saranno tra loro nel medesimo rapporto di C e C'.

Resulta da queste due conseguenze che i calcoli degl' interessi riposano essenzialmente sopra il principio della proporzionalità, ed è per questo che stabiliremo tutte le formule sopra questo principio.

1. Poichè 1 lira collocata all' interesse r per un anno, diventa $1+r$ alla fine dell' anno, il valore di $1+r$ collocato egualmente, sarà dato dalla proporzione:

$$1:1+r::1+r:x=(1+r)^2;$$

egualmente se vogliamo sapere quale sarebbe il valore $(1+r)^2$ in capo ad un anno, si farà la proporzione:

$$1:1+r::(1+r)^2:x=(1+r)^3;$$

e in generale $(1+r)^{n-1}$ diventerà $(1+r)^n$ in capo ad un anno.

Si conclude da ciò che una lira situata all' interesse composto per n anni, all' interesse r, diventerà dopo questo tempo

$$(1+r)^n \ldots . (2).$$

Il paragone dei valori successivi $(1+r)$, $(1+r)^2$, $(1+r)^3 \ldots$ che acquista una lira di anno in anno, prova che il suo accrescimento si fa in progressione geometrica e non in progressione aritmetica.

Esempio. Si domanda qual somma avrà prodotto una lira situata a interesse composto per 10 anni, la tassa dell' interesse essendo L. 0,045 per 1 lira, cioè il $4\,{}^1/_2$ per $^0/_0$, si avrà $1+r=1,045, n=10$, donde

$$(1+r)^n=(1,045)^{10}=1,55297,$$

così una lira avrà prodotto L. 1, 55, trascurando gl' ultimi decimali.

Per sapere ciò che diventerebbe una somma qualunque a situata a interesse composto per n anni, faremo in virtù della seconda conseguenza la proporzione

$$1:(1+r)^n::a:x=a(1+r)^n,$$

chiamando perciò p il valore di a alla fine di n anni, avremo l' equazione

$$p=a(1+r)^n \ldots . (3).$$

Esempio. Si domanda ciò che produrrà una somma di L. 4688 situata a interesse composto per 20 anni, alla tassa di 0,0375 per 1 lira, ossia $3\,{}^3/_4$ per $^0/_0$.

Si ha in questo caso

$$p=4688(1,0375)^{20}.$$

Ora

$$\begin{aligned} 20\log(1,0375) &= 0,3197622 \\ \log 4688 \ldots &= 3,6709876 \\ \text{Somma} \ . \ &3,9907498 = \log 9789,25; \end{aligned}$$

dunque le Lire 4688 produrranno L. 9789, 25.

Conoscendo tre delle quattro quantità p, a, r, n contenute nell' equazione (3), si otterrà la quarta per mezzo di una delle seguenti formule dedotte dalla citata formula (3); cioè:

$$\left.\begin{aligned} p&=a(1+r)^n, \qquad & a&=\frac{p}{(1+r)^n} \\ n&=\frac{\log p-\log a}{\log(1+r)}, \qquad & \log(1+r)&=\frac{\log p-\log a}{n} \end{aligned}\right\} \ldots . (4).$$

2. Invece di domandare ciò che diventa 1 lira situata a interesse composto dopo n anni, si può domandare qual somma bisognerebbe situare oggi a interesse composto, alla tassa r, per ricevere Lire 1 alla fine di n anni.

Questa questione in fondo è la medesima di quella che ha dato luogo alla formula (2), essa differisce solamente in ciò che essa si riporta ad altri numeri; una semplice proporzione con l'espressione $(1+r)^n$ deve dunque darcene la soluzione, e diremo Lire 1 è il valore attuale di $(1+r)^n$ in n anni, qual è ancora il valore attuale di una lira pagabile in n anni, vale a dire

$$(1+r)^n : 1 :: 1 : x = \frac{1}{(1+r)^n} = (1+r)^{-n}.$$

E se si domandasse quanto bisogna situare immediatamente per ricevere una somma a dopo n anni, si farebbe la proporzione

$$1 : (1+r)^{-n} :: a : x = a(1+r)^{-n}.$$

Chiamando e questo valore attuale, si avrà

$$e = a(1+r)^{-n} \ldots. (5).$$

Questa formula (5) è l'espressione di ciò che si chiama lo *sconto* nel commercio, essa è identica con la seconda delle formule (4), poichè essa esprime la medesima cosa.

Si vede dalla maniera con cui essa è stata stabilita che le questioni di sconto non sono altro che questioni d'interesse riferite ad altri numeri.

1° Esempio. Qual somma bisogna situare oggi per ricevere Lire 7843 in 14 anni, l'interesse di una lira essendo 0,0388, ovvero l'interesse di 100 lire essendo 3,88. Si ha in questo caso:

$$a(1+r)^{-n} = 7843\,(1,0388)^{-14}.$$

Ora

$$\begin{aligned} \log\ 7843 &= 3,8944822 \\ 14 \log 1,0388 &= \underline{0,2314472} \\ \text{Differenza} \ldots\ & 3,6630350 = \log 4602,94. \end{aligned}$$

Così bisognerebbe situare oggi Lire 4602,94.

2° Esempio. Cerchiamo con la formula (5) ciò che valgono attualmente 100 lire pagabili in un anno, l'interesse essendo 0,05, per una lira, cioè 5 per %.

Si avrà

$$a(1+r)^{-n} = 100\,(1,05)^{-1}$$

e effettuando i calcoli si trova $e =$ L. 95,238, ovvero circa L. 95,24.

Si vede con ciò che il commerciante il quale, contando l'interesse al 5 per % stima L. 95 il valore attuale di L. 100 pagabili in un anno, commette un errore di 24 centesimi circa; sopra L. 10000 l'errore sarebbe di Lire 24.

Possiamo ben dire che tutti i commercianti facendo il medesimo, si stabilisce una compensazione, e che definitivamente persona non perde nulla: ciò può essere, ma tuttavia possiamo asserire che un tal modo di sconto è il risultamento dell'ignoranza e della cupidità; ciò dovrebbe bastare per farlo abbandonare.

Spesso gl'interessi di un capitale si pagano *per semestre*, e non per anno, questa condizione non modifica le formule dell'interesse semplice, ma le formule dell'interesse composto sono cangiate, se si conviene che gl'interessi di una somma gli saranno aggiunti ogni sei mesi invece di essere ogni anno.

L' interesse di una lira per anno essendo r, dopo sei mesi non è che $\frac{r}{2}$, e aggiungendolo al capitale Lire 1, la somma situata nel secondo semestre sarà $1+\frac{r}{2}$; alla fine del secondo semestre, la somma di $1+\frac{r}{2}$ sarà diventata $\left(1+\frac{r}{2}\right)^2$, alla fine del terzo semestre $\left(1+\frac{r}{2}\right)^2$ sarà diventata $\left(1+\frac{r}{2}\right)^3$ ec.; ma cumulando gl' interessi per n anni, avremmo avuto $2n$ collocamenti d' interessi, e per conseguenza in capo ad n anni, una lira diventerà

$$\left(1+\frac{r}{2}\right)^{2n} \ldots\ldots\ldots (6).$$

Una somma a situata a interesse composto in n anni, gl' interessi essendo capitalizzati ogni 6 mesi, diventerà dunque

$$a\left(1+\frac{r}{2}\right)^{2n}.$$

Il valore attuale di una somma a pagabile in n anni, gl' interessi potendo aggiungersi al capitale per semestre, sarebbe

$$a\left(1+\frac{r}{2}\right)^{-2n}.$$

Cercando per esempio il prodotto, dopo 30 anni, di una somma di L. 1000 situate a interesse composto al 4 per %, e gl' interessi essendo capitalizzati ogni 6 mesi, si trova

$$1000(1,02)^{2\cdot 30} = \text{Lire } 3281.$$

E cercando ciò che diventerebbe questo prodotto capitalizzando gl' interessi ogni anno, si trova, formula (3)

$$1000(1,04)^{30} = \text{Lire } 3243,40.$$

Così dunque, la capitalizzazione degl' interessi per semestre, invece di esserlo per anno, produce, in quest' esempio Lire 37,60 di più per mille lire.

La differenza sarebbe di L. 3760 sopra un capitale di Lire 100,000.

Una tal differenza, quantunque repartita sopra un intervallo di 30 anni, è troppo sensibile perchè si trascuri ancora per lungo tempo.

La tassa dell' interesse avendo una tendenza continua a diminuire, la differenza che abbiamo fatto osservare avrà un' importanza sempre maggiore, e finirà certamente per tenerne conto, tanto negli imprestiti dello Stato, quanto negl' imprestiti tra particolari.

Quanto all' altre questioni che possiamo incontrare sopra l' interesse, *vedi* le parole Annualità, Vitalizio, Rimborso.

INTERPOLAZIONE. (*Alg.*) Operazione il cui scopo è di determinare la natura di una funzione della quale si conoscono solamente alcuni valori particolari.

Se consideriamo una funzione qualunque di una variabile x, per esempio ax^2+b, vediamo che dando successivamente alla variabile i valori determinati 0, 1, 2, 3, ec., otteniamo un seguito di valori particolari. Così

per $x=o$	la funzione diventa	b,
$x=1$		$a+b$,
$x=2$		$4a+b$,
$x=3$		$9a+b$,
ec....		ec....

Ora, la *totalità* dei valori di questa funzione si trova interamente determinata dalla sua *natura* medesima, poichè, dando ad x un valore qualunque l'esecuzione dei calcoli, costituendo questa *natura*, fa sempre conoscere il valore corrispondente della funzione. Quando dunque la natura di una funzione è conosciuta, tutti i suoi valori particolari si trovano determinati, e per ottenere uno di questi valori, è assolutamente inutile di considerare gli altri. Ma, al contrario, se si conoscessero solamente i valori particolari

$$b,\ a+b,\ 4a+b,\ 9a+b,\ \text{ce}\ldots,$$

corrispondenti ai valori o, 1, 2, 3, ec. della variabile x, di una funzione incognita φx, e che si volesse trovare qualunque altro valore di questa funzione incognita, quello per esempio che deve corrispondere a $x=\frac{1}{2}$, e il quale conseguentemente, si trova tra b e $a+b$, bisognerebbe cominciare dai valori cogniti per ottenere il valore domandato. Quest'operazione che si chiama *interpolazione*, perchè s'intercalano dei termini intermediari tra una serie di termini dati, equivale dunque, in ultima analisi; alla determinazione della natura della funzione incognita, o almeno alla determinazione di una forma generale che abbraccia la totalità dei valori di questa funzione.

Per esaminare la questione in tutta la sua generalità, supponiamo che ai valori particolari

$$x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ \text{ec.}$$

di una variabile x, corrispondano i valori

$$X_0,\ X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4,\ \text{ec.}$$

di una funzione incognita φx di questa variabile.

Se i valori x_0, x_1, x_2, ec., sono equidifferenti, vale a dire, se si ha

$$x_1-x_0=\xi,$$
$$x_2-x_1=\xi,$$
$$x_3-x_2=\xi,$$
$$\text{ec.}=\text{ec.}$$

avremo ancora, considerando x_0 come una variabile che riceve successivamente un accrescimento ξ

$$X_1=X_0+\Delta X_0,$$
$$X_2=X_0+2\Delta X_0+\Delta^2X_0,$$
$$X_3=X_0+3\Delta X_0+3\Delta^2X_0+\Delta^3X_0,$$
$$\text{ec.}=\text{ec.},$$

e, in generale, per un indice qualunque m, (*Vedi* DIFFERENZA)

$$X_m=X_0+\frac{m}{1}\Delta X_0+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}\Delta^2X_0$$

$$+\frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\Delta^3X_0+\text{ec.}\ldots$$

Così, X essendo ciò che diventa la funzione φx, quando facciamo $x=x_0+m\xi$; se poniamo $m\xi=z$, donde $m=\frac{z}{\xi}$, otterremo l'espressione

$$\varphi\left(x_0+z\right)=X_0+\frac{z}{\xi}.\Delta X_0+\frac{z(z-\xi)}{1.2.\xi^2}\Delta^2X_0$$
$$+\frac{z(z-\xi)(z-2\xi)}{1.2.3.\xi^3}\Delta^3X_0+\text{ec.}$$

ovvero semplicemente

$$\varphi x=X_0+\frac{z}{\xi}\Delta x_0+\frac{z(z-\xi)}{1.2.\xi^2}\Delta^2X_0$$
$$+\frac{z(z-\xi)(z-2\xi)}{1.2.3.\xi^3}\Delta^3X_0+\text{ec.}\ldots.(a),$$

facendo $x_0+z=x$.

È facile vedere che l'espressione (a) abbraccia la totalità dei valori della funzione φx, poichè dando ad x un valore determinato x', la relazione $x_0+z=x'$, dà $z=x'-x_0$, e sostituendo $x'-x_0$ invece di z nel secondo membro di quest'espressione, si ottiene il valore di $\varphi.x$ corrispondente a $x=x'$.

Per far conoscere le applicazioni di questa formula, proponiamoci la serie

$$1,\ 3,\ 6,\ 10,\ 15,\ 21,\ 28,\ \text{ec.}$$

corrispondente agli indici 0, 2, 3, 4, 5, 6, ec.

Abbiamo in questo caso, $x_0=0$; $x_0+z=x$, ovvero $z=x$; $\xi=1$, e

$$X_0=1,\ X_1=3,\ X_2=6,\ X_3=10,\ \text{ec.}$$

Così:

$$\Delta X_0=X_1-X_0=2,$$
$$\Delta^2X_0=X_2-2X_1+X_0=1,$$
$$\Delta^3X_0=X_3-3X_2+3X_1-X_0=0.$$

Tutte le differenze degli ordini superiori al secondo riducendosi a zero, la formula (a) diventa per la sostituzione dei precedenti valori

$$\varphi x=1+2x+\frac{x(x-1)}{2}=\frac{x^2+3x+2}{2}.$$

Se si domandasse, per esempio, il termine corrispondente all'indice $\frac{1}{2}$, si farebbe $x=\frac{1}{2}$, e si troverebbe

$$\varphi x=\frac{99}{8}=12+\frac{3}{8}.$$

Quando la funzione incognita non è una funzione intera e razionale, non possiamo giungere ad una differenza $\Delta^mX_0=0$, e allora la serie che forma il secondo membro dell'espressione (a) si prolunga all'infinito. In questo caso, non si trovano i valori cercati che in un modo approssimativo; ma, quando la serie è convergentissima, basta un piccolo numero di termini per ottenere una sufficiente approssimazione, e possiamo ancora impiegarla molto vantaggiosamente.

Ora, consideriamo il caso in cui i valori particolari della variabile x

$$x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ \text{ec.}$$

non siano *equidifferenti*. Poichè possiamo in generale stabilire

$$\varphi x = a + bx + cx^2 + dx^3 + \text{ec.}$$

e che X_0, X_1, X_2, ec. rappresentano i valori di φx, quando facciamo $x = x_0$, $x = x_1$, $x = x_2$, ec., abbiamo dunque ancora

$$X_0 = a + bx_0 + cx_0^2 + dx_0^3 + \text{ec.},$$

$$X_1 = a + bx_1 + cx_1^2 + dx_1^3 + \text{ec.},$$

$$X_2 = a + bx_2 + cx_2^2 + dx_2^3 + \text{ec.},$$

$$X_3 = a + bx_3 + cx_3^2 + dx_3^3 + \text{ec.},$$

$$\text{ec.} = \text{ec.} \ldots\ldots$$

equazioni con l'aiuto delle quali possiamo ottenere i coefficienti indeterminati a, b, c, d, ec. Ma, senza ricorrere alla soluzione un poco complicata di queste equazioni, osserviamo che la forma della funzione φx dovendo essere tale che si abbia $\varphi x = X_0$, quando $x = x_0$, $\varphi x = X_1$, quando $x = x_1$; ec. ec.; possiamo egualmente stabilire

$$\varphi x = X_0 fx + X_1 f_1 x + X_2 f_2 x + X_3 f_3 x + \text{ec.};$$

prendendo per fx, $f_1 x$, $f_2 x$, $f_3 x$, ec. delle funzioni di x che diventino

$$fx = 1,\quad f_1 x = 0,\quad f_2 x = 0,\quad f_3 x = 0,\ \text{ec.},$$

quando $x = x_0$;

$$fx = 0,\quad f_1 x = 1,\quad f_2 x = 0,\quad f_3 x = 0,\ \text{ec.},$$

quando $x = x_1$;

$$fx = 0,\quad f_1 x = 0,\quad f_2 x = 1,\quad f_3 x = 0,\ \text{ec.},$$

quando $x = x_2$; e così di seguito.

Queste condizioni che possono essere adempite in molte maniere, lo sono evidentemente se facciamo

$$fx = \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)\ldots\ldots}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)\ldots\ldots},$$

$$fx_1 = \frac{(x - x_0)(x - x_2)(x - x_3)\ldots\ldots}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)\ldots\ldots},$$

$$fx_2 = \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_3)\ldots\ldots}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)\ldots\ldots},$$

$$\text{ec.} = \text{ec.} \ldots\ldots$$

donde si conclude quest' elegante formula d' interpolazione, dovuta al celebre Lagrange,

$$\left.\begin{aligned}\varphi x = &\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\ldots\ldots}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)\ldots\ldots}X_0\\ &+\frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)\ldots\ldots}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)\ldots\ldots}X_1\\ &+\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)\ldots\ldots}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)\ldots\ldots}X_2\\ &+\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\ldots\ldots}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)\ldots\ldots}X_3\\ &+\text{ec.}\ldots\ldots\end{aligned}\right\}\ldots\ldots(b).$$

Applichiamo questa formula alla serie

$$4,\ 20,\ 35,\ 84,$$

corrispondente agl' indici

$$1,\ 3,\ 4,\ 6,$$

e proponiamoci di trovare il termine che corrisponde all' indice 5.

Abbiamo in quest' esempio,

$$x_0=1,\ x_1=3,\ x_2=4,\ x_3=6,$$
$$X_0=4,\ X_1=20,\ X_2=35,\ X_3=84;$$

e, dalla formula (*b*),

$$\begin{aligned}\varphi x = &\frac{(x-3)(x-4)(x-6)}{(1-3)(1-4)(1-6)}4\\ &+\frac{(x-1)(x-4)(x-6)}{(3-1)(3-4)(3-6)}20\\ &+\frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{(4-1)(4-3)(4-6)}35\\ &+\frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{(6-1)(6-3)(6-4)}84.\end{aligned}$$

Eseguendo i calcoli si trova, dopo tutte le riduzioni,

$$\varphi x = \frac{1}{6}\left[x^3+6x^2+11x+6\right].$$

Così facendo $x=5$, si ottiene $\varphi x=56$. Tale è dunque il termine che corrisponde all' indice 5.

Esistono molte altre formule d' interpolazione per le quali dobbiamo rimandare all' opera del Lacroix *Traité des différences et des series*, molte delle quali sono riportate in questo dizionario alle parole DIFFERENZA e INTEGRALE. Queste formule servono particolarmente nell'astronomia ove continuamente si ha bisogno d' intercalare dei termini tra delle serie di numeri o di osservazioni la cui marcia non è eguale nè il progresso uniforme. Quanto ai principj filosofici di quest' operazione inventata, in primo luogo dal Briggs per calcolare i logaritmi, vedi *la prima sezione della filosofia della Tecnia* del signor Wronski.

INTERSEZIONE (*Geom.*) Si chiama *punto d' intersezione*, il punto in cui due linee si tagliano, e *linea d' intersezione*, la linea ove due superficie si tagliano. *L' intersezione* di due piani è una linea retta. *Vedi* PIANO.

INTERVALLI MUSICALI (*Acust.*). In musica s' indica generalmente col nome d' *intervallo* di due suoni il rapporto dei numeri delle vibrazioni che fanno nello stesso tempo le corde sonore che danno questi suoni. Se, per esempio, una corda sonora nel dare un suono A fa 124 vibrazioni in un secondo sessagesimale, ed un' altra corda sonora nel dare un suono B faccia 186 vibrazioni nello stesso tempo, si dirà che l' *intervallo* dei suoni A e B è eguale a $\frac{186}{124}$, o semplicemente a $\frac{3}{2}$, perchè la frazione $\frac{186}{124}$, ridotta alla sua più semplice espressione, diviene $\frac{3}{2}$.

1. Dobbiamo osservare che, in forza di questa convenzione, uno dei due suoni confrontati è sempre rappresentato dall' *unità*, e l' altro dal numero delle vibrazioni che esso fa nel tempo che il primo dà *una sola vibrazione*, qualunque d'altronde sia la durata di questa vibrazione, poichè è assolutamente la stessa cosa il dire che il suono B fa 186 vibrazioni nel tempo che il suono A ne fa 124, o il dire che il suono B fa $\frac{186}{124} = \frac{3}{2}$ vibrazioni nel mentre che il suono A ne fa *una*.

Consideriamo adesso tre suoni A, B, C, i numeri delle cui vibrazioni respettive nella durata di un secondo siano 124, 155, 186: si avrà, applicando loro le considerazioni precedenti,

$$\text{Intervallo da A a B} = \frac{155}{124} = \frac{5}{4},$$

$$\text{Intervallo da A a C} = \frac{186}{124} = \frac{3}{2},$$

vale a dire che prendendo il suono A per termine di confronto, la rappresentazione numerica di questi tre suoni diviene

$$\begin{array}{ccc} A & B & C \\ 1, & \frac{5}{4}, & \frac{3}{2} \end{array} \ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

Se si cercasse l' intervallo dei suoni B e C, bisognerebbe prendere il suono B per unità di confronto, e si avrebbe

$$\text{Intervallo da B a C} = \frac{186}{155} = \frac{6}{5},$$

o, il che è lo stesso, facendo uso dei rapporti precedenti,

$$\text{Intervallo da B a C} = \frac{3}{2} : \frac{5}{4} = \frac{6}{5}:$$

così gl' intervalli parziali sono

$$\begin{array}{ccc} A & B & C \\ & \frac{5}{4}, & \frac{6}{5} \end{array} \ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

2. Da quanto abbiamo detto è facile vedere che bisogna ben distinguere la rappresentazione numerica di un suono, rapporto ad un altro suono preso per *unità*, dall'*intervallo* di questi due suoni, quantunque l' uno e l' altra siano espressi dal medesimo numero. Infatti la frazione $\frac{5}{4}$ rappresenta nella tavola (1) il suono B rapporto ad un suono fisso o *fondamentale* A, mentre nella tavola (2) questa stessa frazione esprime l' *intervallo* dei due suoni A e B, facendo astrazione da qualunque suono fondamentale preso per punto di partenza. Nel primo caso, $\frac{5}{4}$ è un *rapporto costituente*, che determina il posto del suono B tra tutti gli altri suoni riferiti allo stesso suono fondamentale A; nel secondo, $\frac{5}{4}$ è unicamente l' *intervallo* dei suoni A e B, e non fa conoscere altro se non che il suono B fa 5 vibrazioni nel tempo che il suono A ne fa 4.

3. Per poter determinare l' intervallo di due suoni non è dunque necessario conoscere i numeri assoluti delle loro vibrazioni, vale a dire i numeri delle vibrazioni effettive che l' uno e l' altro fanno nell' unità di tempo, ma soltanto i numeri relativi di queste vibrazioni, o ciò che abbiamo di sopra chiamato i loro *rapporti costituenti*. Questi calcoli, fondati sulle proprietà dei rapporti geometrici, non presentano in sè stessi nessuna difficoltà; ma non bisogna perder di vista il significato esatto dei numeri di cui si fa uso; e, per l' intelligenza di ciò che saremo per dire, ne daremo un esempio più sviluppato.

4. Siano i suoni A, B, C, D, E, F, G, H generati dalle corde sonore che fanno nell' unità di tempo i numeri assoluti di vibrazioni

144, 162, 180, 192, 216, 240, 270, 288.

L' intervallo di due qualunque di questi suoni essendo il rapporto dei numeri delle loro vibrazioni respettive (1), se si domanda, per esempio, l' intervallo dei due suoni C ed F, si avrà

$$\text{Intervallo da C ad F} = \frac{240}{180} = \frac{4}{3}.$$

Ciò posto, prendendo A per suono fondamentale e dividendo tutti i numeri per 144, avremo dopo la riduzione delle frazioni alla loro più semplice espressione,

A	B	C	D	E	F	G	H
1,	$\frac{9}{8}$,	$\frac{5}{4}$,	$\frac{4}{3}$,	$\frac{3}{2}$,	$\frac{5}{3}$,	$\frac{15}{8}$,	2.

Questi nuovi numeri esprimono i *numeri relativi* delle vibrazioni dei suoni o i numeri delle vibrazioni che fanno tutte le corde sonore nel tempo che la prima, quella cioè che dà il suono A, fa una *sola vibrazione*. È evidente che i rapporti di questi numeri relativi tra loro sono esattamente gli stessi di quelli dei numeri assoluti, ed hanno di più il vantaggio d' indicare immediatamente l' intervallo tra ciascun suono e il suono fondamentale A. Il numero $\frac{5}{3}$, per esempio, costituente il suono F, esprime nel tempo stesso che questo suono fa una vibrazione e due terzi di vibrazione mentre il suono A ne fa *una*, e che l' in-

tervallo dei suoni A ed F è eguale a $\frac{5}{3}$. Per calcolare per mezzo di questi numeri l'intervallo da C ad F, pel quale avevamo di sopra 240 : 180, avremo ora

$$\text{Intervallo da C ad F} = \frac{5}{3} : \frac{5}{4} = \frac{4}{3},$$

che è la stessa cosa.

Ecco il calcolo dell'intervallo di ognuno di questi suoni da quello che lo segue immediatamente:

$$\text{Intervallo da A a B} = \frac{9}{8} : 1 = \frac{9}{8},$$

$$\text{B a C} = \frac{5}{4} : \frac{9}{8} = \frac{10}{9},$$

$$\text{C a D} = \frac{4}{3} : \frac{5}{4} = \frac{16}{15},$$

$$\text{D ad E} = \frac{3}{2} : \frac{4}{3} = \frac{9}{8},$$

$$\text{E ad F} = \frac{5}{3} : \frac{3}{2} = \frac{10}{9},$$

$$\text{F a G} = \frac{15}{8} : \frac{5}{3} = \frac{9}{8},$$

$$\text{G ad H} = 2 : \frac{15}{8} = \frac{16}{15},$$

il che ci somministra il quadro seguente, di cui avremo occasione di fare uso in seguito:

Suoni	A	B	C	D	E	F	G	H	
Rapporti costituenti	1,	$\frac{9}{8}$,	$\frac{5}{4}$,	$\frac{4}{3}$,	$\frac{3}{2}$,	$\frac{5}{3}$,	$\frac{15}{8}$,	2	. . . (3)
Intervalli parziali	$\frac{9}{8}$,	$\frac{10}{9}$,	$\frac{16}{15}$,	$\frac{9}{8}$,	$\frac{10}{9}$,	$\frac{9}{8}$,	$\frac{16}{15}$		

5. Quando si conoscono gl' intervalli parziali a due a due di una serie di suoni, si può trovare l' intervallo dei due suoni estremi senza aver bisogno di risalire ai loro rapporti costituenti, ovvero ai numeri assoluti delle loro vibrazioni. Per esempio, essendo dati i tre intervalli parziali:

A B C D

$$\frac{9}{8}, \frac{10}{9}, \frac{16}{15},$$

si avrà

$$\text{Intervallo da A a D} = \frac{9}{8} \times \frac{10}{9} \times \frac{16}{15}.$$

Questa regola non consiste in altro che nella *regola congiunta* (Si veda questa parola nel Dizionario), e se ne può facilmente vedere la ragione osservando che siccome le lettere A, B, C, D non rappresentano quì che i numeri assoluti o relativi delle vibrazioni, si ha necessariamente

$$\frac{B}{A}=\frac{9}{8}, \quad \frac{C}{B}=\frac{10}{9}, \quad \frac{D}{C}=\frac{16}{15};$$

ma il prodotto dei rapporti $\frac{B}{A}$, $\frac{C}{B}$, $\frac{D}{C}$ si riduce a $\frac{D}{A}$ in forza della soppressione dei fattori comuni, dunque

$$\frac{D}{A}=\frac{9\times10\times16}{8\times\ 9\times15}=\frac{4}{3},$$

vale a dire

$$\text{Intervallo da A a D}=\frac{4}{3}.$$

L'ultimo numero 2 della seconda linea del quadro (3) deve dunque essere eguale al prodotto di tutti gl'intervalli del quadro, perchè esprime l'intervallo tra il primo suono A e l'ultimo H. Infatti si ha

$$2=\frac{9\times10\times16\times9\times10\times9\times16}{8\times\ 9\times15\times8\times\ 9\times8\times15}.$$

Applichiamo adesso questi principj elementari del calcolo degli intervalli musicali ai suoni di cui si compongono le diverse scale adottate dagli scrittori di musica.

6. La produzione del suono per mezzo dei corpi sonori è l'effetto di movimenti vibratorj che fanno le molecole di questi corpi per riprendere la loro posizione primitiva quando ne sono state allontanate dall'azione istantanea di una forza estranea (*Vedi* Acustica): se le vibrazioni sono regolari, esse formano il *suono distinto* o *suono musicale*, che però non è percettibile che quando queste vibrazioni hanno una certa celerità: e quanto più questa celerità è grande, tanto più il suono è *acuto*. Quando il numero delle vibrazioni di due corpi sonori è il medesimo in un tempo medesimo, i suoni non possono esser distinti l'uno dall'altro che dalla loro intensità e dal loro genere. L'intensità dipende dall'ampiezza delle onde sonore (*Vedi* Suono); il genere è una qualità data al suono dalla natura particolare del corpo sonoro.

L'intervallo di due suoni si dice *consonante* quando il rapporto numerico che lo costituisce è semplicissimo; ed è detto poi *dissonante* nel caso contrario. Ciò non ostante, questa divisione non ha nulla di assoluto e riposa unicamente sulla maggiore o minor facilità che ha l'orecchio nell'afferrare il rapporto di due suoni coesistenti, facilità che dipende dal grado di cultura musicale dell'orecchio medesimo, talchè quegl'intervalli che passavano una volta per dissonanti sono oggi nel numero dei consonanti.

Due suoni coesistenti, sentiti nel tempo stesso dall'orecchio, formano un *accordo* se il loro intervallo è consonante. Per rendersi ragione della natura del fenomeno che avviene allora nell'orecchio, bisogna osservare che nella sensazione di un suono semplice o isolato la membrana del timpano riceve un movimento vibratorio, che può paragonarsi a quello che sarebbe prodotto da una serie di colpi battuti ad intervalli di tempo eguali. Ora, quando due suoni differenti colpiscono nel tempo stesso l'orecchio, si effettua la riunione di due serie di colpi, in ognuna delle quali le distanze dei tempi sono eguali, ma in una più grandi

che nell'altra: questi colpi non possono dunque battere insieme che a certe distanze, e quanto più sono piccole queste distanze, tanto più facilmente l'orecchio sente o comprende il rapporto dei due suoni. Se, per esempio, il primo suono batte due colpi mentre il secondo non ne batte che uno, il 2°, 3°, 4°, 5° ec. colpo della seconda serie coinciderà col 3°, 5°, 7°, 9° ec. della prima, il che produce una riunione armonica; mentre se il primo suono battesse 11 colpi nel tempo che il secondo ne batte 10, le coincidenze non avverrebbero che tra i colpi 11°, 22°, 33° ec. della prima serie coi colpi 10°, 20°, 30° ec. della seconda, ciocchè non potrebbe esser ben sentito o compreso dall'orecchio. Ora l'orecchio eseguisce per le proprie sensazioni quelle medesime operazioni che fa l'occhio per le sue; esso apprende i rapporti dei suoni con una facilità tanto maggiore quanto più semplici sono questi rapporti, e, nel modo medesimo che l'occhio rimane colpito in un modo grato e piacevole dai rapporti giusti delle forme senza misurare nè calcolare questi rapporti, così l'orecchio rimane colpito piacevolmente quando scorge senza difficoltà l'effetto della concorrenza delle vibrazioni simultanee di più suoni.

7. Il rapporto più semplice delle vibrazioni di due suoni è 1 : 1, che vien chiamato l'*unisono*. Dopo l'unisono, il rapporto più facile a intendersi è quello di 2 : 1, che costituisce l'*ottava*: due suoni che sono all'ottava l'uno dall'altro differiscono nel loro grado di acutezza, ma per ogni altra parte si rassomigliano così bene che quando si vuole imitare un suono colla voce si prende spesso la sua ottava quando l'orecchio non è bastantemente esercitato. Gli altri intervalli consonanti i più semplici dopo l'ottava si chiamano

quinta, quando il rapporto è eguale a 3 : 2
quarta . . . . 4 : 3
terza . . . . 5 : 4

Volendo riferire questi diversi intervalli a un suono qualunque considerato come *suono fondamentale* e dando il nome di *ut* a questo suono, quello di *mi* alla sua *terza*, quello di *fa* alla sua *quarta*, quello di *sol* alla sua *quinta*, e quello di ut_2 alla sua *ottava*, i rapporti costituenti dei numeri delle vibrazioni di questi ultimi suoni con quello delle vibrazioni del suono fondamentale preso per unità saranno

$$\begin{matrix} ut & mi & fa & sol & ut_2 \\ 1, & \frac{5}{4}, & \frac{4}{3}, & \frac{3}{2}, & 2. \end{matrix}$$

Se si parte dall'ottava ut_2 del suono fondamentale e si forma una nuova serie di suoni mi_2, fa_2, sol_2, ut_3, che abbiano con ut_2 gli stessi rapporti che i suoni *mi*, *fa*, *sol*, ut_2, hanno con *ut*, si avrà una nuova serie di suoni ciascuno dei quali sarà all'ottava di quello corrispondente della prima serie, e i cui rapporti costituenti, partendo sempre dal suono fondamentale *ut*, saranno evidentemente

$$\begin{matrix} ut_2 & mi_2 & fa_2 & sol_2 & ut_3 \\ 2, & \frac{5}{2}, & \frac{8}{3}, & \frac{6}{2}, & 4. \end{matrix}$$

Si potrebbe nel modo medesimo formare un terzo periodo, quindi un quarto, e così di seguito. È evidente che i numeri del secondo periodo sono respettivamente eguali a quelli del primo moltiplicati per 2, che quelli del terzo sono eguali a quelli del secondo moltiplicati per 2 o a quelli del primo moltiplicati

per 4, e così di seguito. In generale, i numeri di un periodo il cui *ut* sia dell'ordine μ, cioè ut_{μ}, saranno eguali a quelli del primo moltiplicati per $2^{\mu-1}$.

Per formare dei periodi al di sotto del primo bisognerebbe fare l'operazione inversa, vale a dire dividere i numeri del primo periodo per tante volte il fattore 2, quante fossero le ottave al di sotto dell'*ut*. Così il primo periodo al di sotto sarebbe

$$\begin{matrix} ut' & mi' & fa' & sol' & ut \\ \frac{1}{2}, & \frac{5}{8}, & \frac{2}{3}, & \frac{3}{4}, & 1. \end{matrix}$$

Ma in questa generazione dei suoni musicali ognuno di essi può esser preso successivamente per *suono fondamentale*, e così ne resultano altri suoni di cui gli uni trovansi già compresi tra quelli dei periodi successivi crescenti verso l'*acuto* o descendenti verso il *grave*, e gli altri vengono ad intercalarsi tra questi. Per esempio, partendo dai suoni *mi*, *fa*, *sol*, e calcolando i suoni che sono alla *terza*, alla *quarta* e alla *quinta* d'ognuno di essi, si troverà per le regole del calcolo precedente:

$$\textit{terza di mi} = \frac{5}{4} \times \frac{5}{4} = \frac{25}{16}$$

$$\textit{terza di fa} = \frac{4}{3} \times \frac{5}{4} = \frac{5}{3}$$

$$\textit{terza di sol} = \frac{3}{2} \times \frac{5}{4} = \frac{15}{8}$$

$$\textit{quarta di mi} = \frac{5}{4} \times \frac{4}{3} = \frac{5}{3}$$

$$\textit{quarta di fa} = \frac{4}{3} \times \frac{4}{3} = \frac{16}{9}$$

$$\textit{quarta di sol} = \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} = 2$$

$$\textit{quinta di mi} = \frac{5}{4} \times \frac{3}{2} = \frac{15}{8}$$

$$\textit{quinta di fa} = \frac{4}{3} \times \frac{3}{2} = 2$$

$$\textit{quinta di sol} = \frac{3}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{9}{4}$$

Le terze ci danno dei suoni espressi da $\frac{25}{16}$, $\frac{5}{3}$, $\frac{15}{8}$, le quarte dei suoni espressi da $\frac{5}{3}$, $\frac{16}{9}$, 2, e le quinte dei suoni espressi da $\frac{15}{8}$, 2 e $\frac{9}{4}$; escluden-

espresso da $\frac{16}{9}$ che poco si discosta da $\frac{15}{8}$, ci resta un suono $\frac{5}{3}$ compreso tra do il primo che poco differisce da $\frac{24}{16} = \frac{3}{2} =$ *sol*, ed escludendo egualmente il suono i suoni $\frac{3}{2}$ e 2, un altro $\frac{15}{8}$ compreso pure tra gli stessi suoni, e un ultimo suono $\frac{9}{4}$ che va ad intersecarsi tra i suoni 2 e $\frac{5}{2}$ del secondo periodo; prendendo perciò l' ottava al di sotto, si ha il suono $\frac{9}{8}$ intercalare tra i suoni 1 e $\frac{5}{4}$ del primo periodo. Questo primo periodo diviene dopo le intercalazioni

$$\begin{array}{cccccccc} ut & re & mi & fa & sol & la & si & ut_2 \\ 1, & \frac{9}{8}, & \frac{5}{4}, & \frac{4}{3}, & \frac{3}{2}, & \frac{5}{3}, & \frac{15}{8}, & 2 \ldots\ldots (4). \end{array}$$

Esso si compone così di sette intervalli, ciascuno dei quali trae la sua denominazione dalla distanza che i suoni hanno tra loro. Per esempio, l' intervallo da *ut* a *re* è una *seconda*; quello da *ut* a *mi* una *terza*; da *ut* a *fa* una *quarta*; da *ut* a *sol* una *quinta*; da *ut* a *la* una *sesta*; da *ut* a *si* una *settima*; e finalmente da *ut* a ut_2 una *ottava*. Le stesse denominazioni di suoni e d' intervalli ricominciano in un secondo periodo come in tutti gli altri. La successione dei suoni dall' *ut* fondamentale fino al *si* si chiama la *scala diatonica* o *gamma naturale*.

8. Formato il gamma naturale di un suono fondamentale, se si parte da ciascuno dei suoni che lo compongono per costruire il suo gamma particolare, si cade di nuovo in suoni che non sono compresi tra quelli del gamma primitivo o delle loro ottave successive, e fa d' uopo intercalare di nuovo altri suoni intermedj tra i suoni del gamma naturale per poter abbracciare in una serie composta di periodi eguali tutti i suoni musicali tra i quali l' orecchio può scorgere una differenza. Siccome la scala del gamma naturale non è composta di gradi eguali, ma l' intervallo dal *mi* al *fa* e quello dal *si* all' ut_2, sono assai più piccoli degli altri, perciò tra questi ultimi si sono intercalati i suoni intermedj di cui passeremo ora a far parola. Si osservi primieramente che gl' intervalli di ciascuno dei suoni del gamma naturale da quello che immediatamente gli succede sono, per ciò che abbiamo trovato di sopra (4),

$$\begin{array}{lcccccccc} & ut & re & mi & fa & sol & la & si & ut_2 \\ \text{Intervalli} \ldots\ldots & \frac{9}{8}, & \frac{10}{9}, & \frac{16}{15}, & \frac{9}{8}, & \frac{10}{9}, & \frac{9}{8}, & \frac{16}{15}. & \end{array}$$

Donde si vede, come abbiamo avvertito, che gl' intervalli dall' *ut* al *re*, dal *re* al *mi*, dal *fa* al *sol*, dal *sol* al *la*, e dal *la* al *si*, che poco differiscono tra loro, sono sensibilmente il doppio degli intervalli dal *mi* al *fa*, e dal *si* all' ut_2. Infatti se s' introducesse tra *ut* e *re* un suono intercalare *ut'*, in modo che gl' in-

tervalli da *ut* a *ut'* e da *ut'* a *re* fossero

$$\begin{matrix} ut & ut' & re \\ & \frac{16}{15}, & \frac{16}{15}, \end{matrix}$$

l'intervallo dall'*ut* al *re* sarebbe allora eguale a $\frac{16}{15} \times \frac{16}{15} = \frac{256}{225}$ (*Vedi* di sopra il n.° 5), numero che differisce pochissimo da $\frac{10}{9}$. Una tale intercalazione però non è possibile, e noi non l'abbiamo accennata che per far conoscere il senso che deve darsi all'espressione *intervallo doppio di un altro intervallo*. Quando considereremo gl'intervalli nel rapporto della loro *misura*, allora insegneremo a determinare i loro veri rapporti di grandezza.

9. Gl'intervalli dei suoni del gamma naturale essendo diseguali, si sono date loro denominazioni differenti; così gl'intervalli maggiori hanno ricevuto il nome di *toni*, e i minori quello di *semitoni*. Si chiamano particolarmente *toni maggiori* quelli il cui rapporto è $\frac{9}{8}$ e *toni minori* quelli il cui rapporto è $\frac{10}{9}$. Il rapporto dell'intervallo di un *tono maggiore* all'intervallo di un *tono minore*, o il numero $\frac{9}{8} : \frac{10}{9} = \frac{81}{80}$, si chiama un *comma*, che viene considerato come il più piccolo intervallo che l'orecchio possa distinguere. Due suoni il cui intervallo sia più piccolo di un comma differiscono tanto poco l'uno dall'altro che possono approssimativamente considerarsi come all'*unisono*.

Il gamma naturale trovasi dunque composto di una serie d'intervalli nell'ordine seguente, facendo astrazione dalla differenza dei toni maggiori dai toni minori:

$$\begin{matrix} ut & re & mi & fa & sol & la & si & ut_2 \\ 1, & 1, & \frac{1}{2}, & 1, & 1, & 1, & \frac{1}{2}. \end{matrix}$$

Introducendo ora un semitono in ciascuno intervallo di un tono, si forma il gamma di semitoni, che dicesi in altro modo *gamma cromatico*. Ma questi semitoni non possono essere eguali tra loro, ed è essenziale di sceglierli in modo che la *terza* e la *quinta* di ciascun suono del gamma si approssimino più che sia possibile ai rapporti esatti determinati precedentemente.

10. L'intervallo da un tono minore $\frac{10}{9}$ al semitono $\frac{16}{15}$, che dicesi *semitono maggiore*, ha ricevuto il nome di *semitono minore*, e la sua espressione numerica è

$$\frac{10}{9} : \frac{16}{15} = \frac{150}{144} = \frac{25}{24},$$

donde si vede che l'intervallo del tono minore si divide naturalmente in due semitoni, l'uno maggiore e l'altro minore. Quest'intervallo $\frac{25}{24}$ è il più pic-

colo di cui si faccia uso in pratica, e con esso si formano i semitoni intercalari del gamma cromatico.

Si osservi che per passare da un suono qualunque M, dato dal suo rapporto costituente $\frac{a}{b}$, ad un altro suono M', il cui intervallo da M sia $\frac{a'}{b'}$, bisogna moltiplicare i due rapporti $\frac{a}{b}$ e $\frac{a'}{b'}$, e il prodotto $\frac{aa'}{bb'}$ è il rapporto costituente di di M', cioè il suo intervallo dal suono fondamentale s. È questa una conseguenza di ciò che è stato esposto di sopra al n.° 5. Così, moltiplicando ogni rapporto costituente dei suoni del gamma naturale per l'intervallo $\frac{25}{24}$, si otterrà una serie di suoni i cui intervalli respettivi dai suoni primitivamente più bassi saranno tutti di un *semitono minore*, nel modo medesimo che dividendo questi stessi rapporti per questo stesso intervallo $\frac{25}{24}$, si ottiene un'altra serie di suoni, i cui intervalli dai suoni primitivamente più alti saranno tutti di un *semitono minore*. In generale, un suono moltiplicato per $\frac{25}{24}$ sale di un *semitono minore*, e lo stesso suono diviso per $\frac{25}{24}$ o moltiplicato per $\frac{24}{25}$ scende dello stesso semitono.

I nuovi suoni formati in questa guisa non hanno ricevuto nomi particolari; essi hanno quello del suono inferiore seguito dalla parola *diesis*, o quello del suono superiore seguito dalla parola *bimolle*. Per esempio, il *la* naturale $=\frac{5}{3}$ moltiplicato per $\frac{25}{24}$ diviene *la diesis* $=\frac{125}{72}$, e questo stesso suono diviso per $\frac{25}{24}$ diviene *la bimolle* $=\frac{8}{5}$.

11. Eseguendo l'operazione che abbiamo indicato, s'introducono due suoni intermedj in ciascuna coppia di suoni del gamma naturale, tanto se il loro intervallo è un tono maggiore quanto se sia un tono minore.

I rapporti costituenti di questi nuovi suoni sono:

ut diesis $=\frac{25}{24}$,	*sol bimolle* $=\frac{36}{25}$
re bimolle $=\frac{27}{25}$,	*sol diesis* $=\frac{25}{16}$
re diesis $=\frac{75}{64}$,	*la bimolle* $=\frac{8}{5}$
mi bimolle $=\frac{6}{5}$,	*la diesis* $=\frac{125}{72}$
fa diesis $=\frac{25}{18}$,	*si bimolle* $=\frac{9}{5}$.

Negli strumenti a suoni fissi, come il piano-forte, lo stesso tasto battendo il diesis e il bimolle dei due suoni naturali dell' intervallo di un tono, è d' uopo considerare i due suoni intercalari come identici, e scegliere tra essi quello che più egualmente divide l' intervallo primitivo. Questa necessità proviene ancora dalla gran difficoltà che vi sarebbe nel conservare una quantità troppo grande di suoni, la maggior parte dei quali non differiscono tra loro in un modo sensibile.

Si ammette dunque come limite d' intervallo quello che esiste tra un semitono maggiore e un semitono minore, cioè:

$$\frac{16}{15} : \frac{25}{24} = \frac{128}{125},$$

vale a dire che tutti i suoni il cui intervallo non è maggiore di $\frac{128}{125}$ sono considerati come identici, o come all' unisono gli uni degli altri. Ed infatti due corde sonore le vibrazioni delle quali fatte in un medesimo tempo stessero come i numeri 128 e 125, produrrebbero due suoni che l' orecchio il più delicato difficilmente distinguerebbe l' uno dall' altro.

12. Serviamoci di questo piccolo intervallo $\frac{128}{125}$, o di questo *comma*, per nostra guida nella scelta dei semitoni che debbono comporre il gamma cromatico. L' intervallo tra l' *ut diesis* e il *re bimolle* essendo

$$\frac{27}{25} : \frac{25}{24} = \frac{648}{625} = \frac{129{,}6}{125},$$

vale a dire più grande del comma $\frac{128}{125}$, si vede che nessuno dei due numeri costituenti $\frac{25}{24}$, $\frac{27}{25}$ può rappresentare il suono compreso tra *ut* e *re*, e che nel tempo stesso deve essere *ut diesis* e *re bimolle*; ma alzando il più piccolo di questi numeri dell' intervallo $\frac{128}{125}$ ed abbassando il maggiore di questo stesso intervallo, si otterranno due suoni che non differiranno sensibilmente dai proposti e che potranno poi prendersi senza inconveniente alcuno l' uno per l' altro: ora

$$\frac{25}{24} \times \frac{128}{125} = \frac{16}{15}, \quad \frac{27}{25} : \frac{128}{125} = \frac{135}{128}.$$

Così i due rapporti $\frac{16}{15}$, $\frac{135}{128}$, il cui intervallo è minore di $\frac{128}{125}$, possono esser presi indifferentemente per rappresentare il semitono intercalare tra *ut* e *re*; e poichè per una regola fondata sulla natura stessa dell' organo dell' udito l' intervallo rappresentato dai numeri i più semplici è meglio e più facilmente compreso, si farà

$$ut\ diesis = re\ bimolle = \frac{16}{15}.$$

L' intervallo tra il *re diesis* e il *mi bimolle* essendo

$$\frac{6}{5} : \frac{75}{64} = \frac{384}{375} = \frac{128}{125},$$

si farà per la stessa ragione

$$re\ diesis = mi\ bimolle = \frac{6}{5},$$

L' intervallo tra il *fa diesis* e il *sol bimolle* essendo

$$\frac{36}{25} : \frac{25}{18} = \frac{648}{625},$$

fa d'uopo operare su questi due suoni come si è fatto sopra *ut diesis* e *re bimolle*: se dunque si alza il primo e si abbassa il secondo del comma $\frac{128}{125}$ si ottiene:

$$\frac{25}{18} \times \frac{128}{125} = \frac{64}{45}, \quad \frac{36}{25} : \frac{128}{125} = \frac{45}{32},$$

e scegliendo il rapporto più semplice si farà

$$fa\ diesis = sol\ bimolle = \frac{45}{32}.$$

Confrontando nella stessa guisa i suoni *sol diesis* e *la bimolle* si troverà pel loro intervallo

$$\frac{8}{5} : \frac{25}{16} = \frac{128}{125};$$

perciò si potrà fare

$$sol\ diesis = la\ bimolle = \frac{8}{5}.$$

Finalmente, l' intervallo tra *la diesis* e *si bimolle*

$$\frac{9}{5} : \frac{125}{72} = \frac{648}{625}$$

essendo maggiore del comma $\frac{128}{125}$, si troverà, alzando il più basso e abbassando il più alto di questi suoni di questo stesso comma,

$$\frac{125}{72} \times \frac{128}{125} = \frac{16}{9}, \quad \frac{9}{5} : \frac{128}{125} = \frac{225}{128},$$

donde

$$la\ diesis = si\ bimolle = \frac{16}{9}.$$

Riunendo tutti questi risultati, si avrà per la scala completa del gamma cromatico:

$$1, \frac{16}{15}, \frac{9}{8}, \frac{6}{5}, \frac{5}{4}, \frac{4}{3}, \frac{45}{32}, \frac{3}{2}, \frac{8}{5}, \frac{5}{3}, \frac{16}{9}, \frac{15}{8}, 2 \ldots\ldots\ldots (5).$$

Il suono di mezzo della scala $\frac{45}{32}$ essendo espresso da numeri un poco grandi, comparativamente agli altri suoni, si è trovato che invece di alterare i due suoni *fa diesis e sol bimolle* del comma $\frac{128}{125}$, sarebbe stato più esatto il prendere una media proporzionale tra questi due suoni $\frac{25}{18}$, $\frac{36}{25}$, tanto più che questa media

$$\sqrt{\left[\frac{25}{18} \times \frac{36}{25}\right]} = \sqrt{2}$$

è nel tempo stesso la media dei due suoni estremi 1 e 2, e che l'intervallo totale dell'ottava si trova così diviso in due parti eguali dal suono di mezzo.

Facendo questo cangiamento, la scala cromatica diviene . . . . (6)

SUONI	NUMERI RELATIVI DELLA VIBRAZIONI	
	esatti	in decimali
ut.	1	1,000000
ut diesis o re bimolle . .	$\frac{16}{15}$	1,066666
re.	$\frac{9}{8}$	1,125000
re diesis o mi bimolle. .	$\frac{6}{5}$	1,200000
mi	$\frac{5}{4}$	1,250000
fa.	$\frac{4}{3}$	1,333333
fa diesis o sol bimolle .	$\sqrt{2}$	1,414213
sol.	$\frac{3}{2}$	1,500000
sol diesis o la bimolle .	$\frac{8}{5}$	1,600000
la.	$\frac{5}{3}$	1,666666
la diesis o si bimolle . .	$\frac{16}{9}$	1,777777
si	$\frac{15}{8}$	1,875000
ut_2	2	2,000000

13. Prima di proseguire, rammentiamoci che per costruire il *gamma naturale* (4), e per conseguenza il *gamma cromatico* (5) e (6) ci siamo partiti dai rapporti delle vibrazioni $\frac{1}{1}$, $\frac{2}{1}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{5}{4}$, che sono i più semplici tra tutti quelli che possono esprimersi per mezzo dei soli numeri primi 1, 2, 3, 5. Aggiungendovi il rapporto $\frac{6}{5}$, che l'orecchio comprende quasi colla stessa facilità del rapporto $\frac{5}{4}$, e che forma nel *gamma naturale* (4) l'intervallo esatto tra il *la* e l'ut_2, cioè

$$2 : \frac{5}{3} = \frac{6}{5},$$

si avrà per la totalità degl'intervalli consonanti fondamentali

Intervalli	Numeri costituenti
Unisono	1 : 1
Ottava	2 : 1
Quinta	3 : 2
Quarta	4 : 3
Terza maggiore	5 : 4
Terza minore	6 : 5

Tutti gli altri intervalli risultando dalle combinazioni di questi, è chiaro che la scala musicale attuale deriva dai numeri primi 1, 2, 3, 5. Se si volesse introdurre il numero 7, bisognerebbe far subire a questa scala dei cangiamenti di cui l'utilità pei progessi della musica è tuttora problematica.

13. Se per giudicare delle qualità e degli effetti degl'intervalli consonanti è necessario attribuir loro i rapporti precedenti, è però assolutamente impossibile di servirsi sempre di questi rapporti nella pratica, specialmente per gli strumenti a suoni fissi, nei quali non si può fare a meno di confondere i *diesis* coi *bimolli*. La scala cromatica (6), destinata a modificare la maggior parte degli intervalli, conservando loro il più alto grado possibile di esattezza, è lungi dal raggiungere compiutamente questo scopo; imperocchè due suoni, il cui intervallo è eguale al comma $\frac{128}{125}$, quantunque poco differenti l'uno dall'altro, e sensibilmente all'unisono per l'orecchio, quando si sentono isolatamente, producono dissonanze marcatissime nella loro coesistenza con altri suoni. Un pianoforte, per esempio, tutti i gammi del quale fossero accordati esattamente sulla scala (5) presenterebbe parecchie terze maggiori e minori insoffribili perchè inesatte di questo comma $\frac{128}{125}$. Alterando più o meno gl'intervalli della scala (5) si possono ottenere degli accordi sufficientemente esatti; ma eseguendo tali alterazioni è necessario di repartirle in modo che ciascuno intervallo si approssimi il più che sia possibile all'esattezza senza snaturare gli altri. Le alterazioni dei suoni che producono questi effetti diconsi il *temperamento*; un sistema di

scala temperata deve essere considerato come tanto più perfetto quanto maggiore è il numero degli accordi perfettamente esatti che esso presenta.

14. Sono stati proposti diversi sistemi di *temperamento*, il più semplice dei quali consiste nel fare perfettamente eguali i dodici gradi della scala cromatica. Questa scala si compone allora di tredici suoni, compresovi l'ottava ut_2, i quali hanno per intervallo parziale un *semitono* un poco più grande di un semitono minore e un poco più piccolo di un semitono maggiore; tutte le quinte vi sono sensibilmente giuste, e le terze vi sono meno alterate che nella scala (5). Ma per giudicare dei vantaggi o degl' inconvenienti di un *temperamento* qualunque, diviene necessario di considerare gl' intervalli sotto un altro punto di vista diverso da quello della loro generazione; poichè se i numeri costituenti di questi intervalli hanno il vantaggio prezioso di esser l' espressione fedele dei fenomeni acustici, sono insufficienti, o per lo meno complicano le questioni di difficoltà estranee, quando si prendono a trattare i fenomeni musicali, vale a dire quando si vogliono confrontare tra loro questi intervalli e determinare i loro rapporti reali di grandezza. Quando nel *temperamento eguale* si dice, per esempio, che un *semitono* è la *metà* di un *tono*, che una *terza maggiore* è composta di quattro semitoni ec., si fa uso di espressioni giuste e convenienti, perchè si considera l' intervallo di due suoni come una *distanza* composta di distanze più piccole; così la voce che sale dall' *ut* al *mi* per la serie dei suoni *ut*, *ut diesis*, *re*, *re diesis*, *mi* percorre quattro distanze eguali, e se si prende la prima per *unità*, la distanza totale, o l' intervallo dall' *ut* al *mi*, deve esser rappresentata dal numero 4, il che fa conoscere immediatamente il rapporto di grandezza dell' intervallo di terza coll' intervallo del semitono. Non avviene più lo stesso se gl' intervalli si vogliono rappresentare esclusivamente col rapporto delle vibrazioni, come fin qui hanno fatto tutti gli autori di trattati di armonia; perchè allora bisogna dare alle parole un senso affatto diverso dal senso ordinario per poter dire che un *intervallo* è la *metà* o una parte qualunque di un altro intervallo, perchè non si tratta mai, in questi pretesi rapporti di grandezza, del Rapporto geometrico base della nozione di Misura.

15. Il confronto degl' intervalli non può dunque farsi in un modo razionale che prendendo uno di essi per unità, e rappresentando ognuno degli altri col numero che esprime quante volte esso contiene questa unità. Quanto alla scelta dell' intervallo destinato a servire di unità, essa è affatto arbitraria e non potrebbe esser determinata che da ragioni di convenienza o di facilità pei calcoli. La scala cromatica essendo composta di dodici intervalli parziali diseguali, se si prendesse per unità o il semitono minore $\frac{25}{24}$ o il semitono maggiore $\frac{16}{15}$, nessuno di essi sarebbe compreso un numero esatto di volte nell' intervallo dell' ottava, il che renderebbe straordinariamente complicato il confronto dei suoni appartenenti a due periodi differenti. È dunque molto più semplice l' adottare per unità un *semitono medio* esattamente eguale alla dodicesima parte dell' ottava, vale a dire il semitono del *temperamento eguale*.

16. Per ben comprendere i nuovi principj che adesso siamo per esporre, non bisogna perder di vista le regole date di sopra pel calcolo degl' intervalli rappresentati dai rapporti delle vibrazioni; poichè la prima cosa da farsi è quella di rappresentare con un rapporto simile il semitono che è per servirci di unità. Ora questo semitono deve esser tale che moltiplicato dodici volte per se stesso produca il numero 2, perchè l' intervallo di due suoni estremi è sempre eguale al prodotto di tutti gl' intervalli parziali dei suoni intermedj tra questi estremi (5). Il

semitono medio di cui si tratta avrà dunque per espressione onmerica $\sqrt[12]{2}$, e così per misurare un intervallo dato dal suo rapporto costitnente non si tratterà che di trovare quaote volte il oumero $\sqrt[12]{2}$ è *fattore* di qoesto rapporto, o, il che è lo stesso, a qual potenza è necessario elevare $\sqrt[12]{2}$ per ottenere il onmero costitoente dell' intervallo. Se, per esempio, l' intervallo dato, che io generale indicheremo con M, cootieoe esattameote due volte l' unità adottata per la misura degl' iotervalli, si avrà

$$(\sqrt[12]{2})\times(\sqrt[12]{2})=(\sqrt[12]{2})^2=\text{M}.$$

Se la contiene due volte e mezzo, si avrà egualmeote

$$(\sqrt[12]{2})^{2,5}=\text{M},$$

e così di seguito.

Da ciò resulta in generale che se m è l' espooeote della potenza alla quale bisogna innalzare $\sqrt[12]{2}$ per prodorre M, m darà la *misura* dell' intervallo M, vale a dire esprimerà il numero dei semitooi medj di cui si compooe questo iotervallo. Così, considerando $\sqrt[12]{2}$ come la base di uo sistema particolare di logaritmi, potremo dire che la *misura* di un intervallo è il *logaritmo* di ciò che abbiamo chiamato il suo *numero costituente*.

17. Proponiamoci, per esempio di calcolo, di trovare quanti semitoni medj contiene l' intervallo dall' *ut* al *la*, il cui numero costituente è $\frac{5}{3}$. Indicando con x il numero cercato, si dovrà risolvere l' equazione esponenziale

$$(\sqrt[12]{2})^x=\frac{5}{3},$$

la quale, facendo uso dei logaritmi, dà

$$x\log(\sqrt[12]{2})=\log\frac{5}{3}=\log 5-\log 3,$$

e quindi

$$x=\frac{\log 5-\log 3}{\log\sqrt[12]{2}}=\frac{0,2218 5}{0,02509}.$$

Cootentandoci dei centesimi, il che è più che sufficiente, si ottiene $x=8,84$, vale a dire che l' intervallo dall' *ut* al *la* comprende otto semitoni medj e 84 centesimi di semitono.

18. Una simile operazione, eseguita su tutti i numeri della scala cromatica (6), produrrà la tavola seguente, che reode sensibili i rapporti di grandezza dei diversi intervalli di questa scala:

TAVOLA

degl' intervalli della scala cromatica prendendo per unità il semitono medio.

Intervallo dall' *ut* al	Numeri proporzionali	Differenze
ut	0,00	
		1,12
ut diesis o *re bimolle*. .	1,12	
		0,92
re.	2,04	
		1,12
re diesis o *mi bimolle*. .	3,16	
		0,70
mi.	3,86	
		1,12
fa.	4,98	
		1,02
fa diesis o *sol bimolle* .	6,00	
		1,02
sol.	7,02	
		1,12
sol diesis o *la bimolle*. .	8,14	
		0,70
la.	8,84	
		1,12
la diesis o *si bimolle* . .	9,96	
		0,92
si.	10,88	
		1,12
ut_2.	12,00	

La colonna intitolata *differenze* contiene gl' intervalli parziali dei dodici gradi della scala. Si vede che il più piccolo di questi intervalli 0,70 differisce dal più grande 1,12 di 0,42, cioè di circa due quinti di semitono.

Ecco in particolare gl' intervalli i più usuali i quali debbono servire di punti di confronto nelle diverse scale temperate

Nomi degl' Intervalli	Numeri costituenti	Numeri proporzionali
ottava.	$\frac{2}{1}$	12,00
quinta.	$\frac{3}{2}$	7,02
quarta.	$\frac{4}{3}$	4,98
terza maggiore.	$\frac{5}{4}$	3,86
terza minore.	$\frac{6}{5}$	3,16
tono maggiore	$\frac{9}{8}$	2,04
tono minore	$\frac{10}{9}$	1,82
semitono maggiore	$\frac{16}{15}$	1,12
semitono minore	$\frac{25}{24}$	0,70

Tutti gl' intervalli più piccoli del semitono minore $\frac{25}{24}$ vengono indicati col nome di *comma*. L' intervallo dal semitono minore al semitono maggiore, cioè il comma $\frac{128}{125}$ è eguale a 0,42, o circa i due quinti del semitono medio. Il comma volgare $\frac{81}{80}$, considerato come il limite superiore degli errori permessi nell' uso del temperamento, corrisponde a 22 centesimi di questo semitono medio.

19. Considerando la somma facilità che reca nel calcolo degl' intervalli la loro rappresentazione per mezzo dei numeri proporzionali, deve far maraviglia che nessuno armonista teorico abbia cercato di trar profitto dalla distinzione stabilita per la prima volta da Eulero (*Tentamen novae theoriae musicae*, *ec.*, 1739) tra i *rapporti dei suoni* e la *misura degl' intervalli*; distinzione riprodotta da Lambert nelle *Memorie* dell' Accademia di Berlino per l' anno 1776, ed insegnata quindi da Suremain de Missery nella sua *Théorie de l' Acoustique*. Ad eccezione di quest' ultimo, troppo buon geometra per essere a parte dell' errore

comune, tutti gli autori francesi che hanno scritto sulla teoria della musica non hanno detto una sola parola che abbia rapporto alla vera misura degl'intervalli; e quando sono obbligati a confrontarli tra loro come *quantità misurabili*, fanno uso dei rapporti dei numeri relativi delle vibrazioni, il che non ha significato di nessuna sorta, poichè $\frac{3}{2}$, per esempio, è in verità il *rapporto costituente* dell'intervallo di *quinta*, ma non gli è nè eguale nè proporzionale. Se questa egusglianza o proporzionalità avesse luogo, bisognerebbe che la doppia quinta fosse espressa da $\frac{6}{2}$, la tripla quinta da $\frac{9}{2}$, e così di seguito. Quest'assurda misura degl'intervalli musicali si riscontrerebbe ancora nella misura degli edifizj, se un architetto, per annunziare la *differenza assoluta* tra una colonna corintia ed una colonna toscana, dicesse che questa differenza è quella di $\frac{1}{10}$ a $\frac{1}{7}$, perchè la proporzione tra il diametro della colonna e la sua altezza è $\frac{1}{10}$ per l'ordine corintio e $\frac{1}{7}$ per l'ordine toscano.

Fra gli errori resultanti dalla falsa rappresentazione delle misure degl'intervalli per mezzo dei rapporti costituenti, uno dei più singolari è quello di Gian Giacomo Rousseau, che, nel suo *Dizionario di Musica*, ha voluto calcolare gl'intervalli parziali di una scala enarmonica compresa tra due *ut* (dicesi scala *enarmonica* quella che non confonde il suono inferiore fatto *diesis* col suono superiore fatto *bimolle*), e non si è accorto che il resultato dei suoi calcoli dava una somma maggiore dell'ottava.

20. Abbiamo veduto di sopra (16) che la *vera misura* degl'intervalli si riduce ad un uso dei logaritmi che, quantunque semplice, non ha per anche potuto naturalizzarsi in Francia ad onta dei tentativi fatti fin qui per adattare alle capacità le più mediocri questo potente e comodo strumento di calcolo. Deriva probabilmente dalla mancanza di nozioni sufficienti sulla natura e sull'uso dei logaritmi quella moltitudine spaventevole di cifre di cui alcuni scrittori teorici di musica empiono le pagine delle loro opere per giungere a resultati spesso erronei, e che, quando ancora sono esatti, hanno sempre l'inconveniente di esser basati sopra un falso sistema di misura, atto a fare sviare gli scolari se pure non smarrisce gli stessi professori.

Ciò non ostante, se si può perdonare ad alcuni autori moderni di non conoscere le opere straniere di Eulero e di Lambert, e l'opera francese di Suremain de Missery, pubblicata in un'epoca (1793) in cui si pensava a tutt'altro che alla teorie musicali, e che d'altronde manca degli sviluppi necessarj, non è possibile di risparmiar loro il rimprovero d'ignoranza per lavori assai più completi e molto più decisivi. Nel 1815, nella sua *Meccanica analitica*, il barone de Prony ha consacrato un capitolo dettagliatissimo all'*acustica musicale*, nel quale egli insiste sulla necessità di applicare al calcolo degl'intervalli musicali metodi analoghi alla natura delle quantità che voglionsi confrontare. Questo capitolo, riprodotto in parte nel *Bullettino scientifico* di Férussac nell'Aprile 1825, riconduce la *misura degl'intervalli* al suo vero punto di vista. In seguito lo stesso dotto, colpito dagli errori che giornalmente commettono gli scrittori di musica ogni volta che cercano di calcolare gl'intervalli, ha pubblicato un' *In-*

struction sur le calcul des intervolles musicaux, Parigi, 1832, presso Firmino Didot, in cui tutte le difficoltà sono definitivamente apianate. Questa istruzione, che potrebbe chiamarsi un'*aritmetica musicale*, è un modello di chiarezza e di precisione che nulla lascia a desiderare: tutti i calcoli vi si trovano ridotti all' *addizione* e alla *sottrazione* per mezzo di due piccole tavole di logaritmi, l'uso delle quali non esige che le cognizioni aritmetiche le più elementari. Noi vi attingeremo utili insegnamenti per il seguito di questo articolo.

21. La scelta dell' *unità* d'intervallo è, come già abbiamo accennato, del tutto arbitraria; il signor de Prony ha preso il *semitono medio* già indicato da Lambert; Eulero si era servito dell' *ottava*, e si potrebbe egualmente bene prendere il *tono medio*, sesta parte dell' ottava. Del resto basta conoscere i numeri proporzionali degl' intervalli riferiti ad una qualunque di queste unità per ottenere facilmente quelli che si riferiscono alle altre.

Infatti, col *semitono medio* per unità, gl' intervalli sono misurati dai logaritmi che hanno per base $\sqrt[12]{2}$; coll'*ottava*, dai logaritmi binarj cioè di base 2, e col *tono medio* dai logaritmi di base $\sqrt[6]{2}$. Così, indicando con m, m', m'' i logaritmi, in questi diversi sistemi, di uno stesso numero M rappresentante il rapporto costituente di un intervallo, si hanno nel tempo stesso le tre espressioni

$$\left(\sqrt[12]{2}\right)^{m}=\text{M},\quad 2^{m'}=\text{M},\left(\sqrt[6]{2}\right)^{m''}=\text{M},$$

che danno le tre eguaglianze

$$2^{\frac{m}{12}}=2^{m'},\quad 2^{\frac{m}{12}}=2^{\frac{m''}{6}},\quad 2^{m'}=2^{\frac{m''}{6}},$$

d'onde si traggono le seguenti relazioni tra i numeri m, m', m''

$$m=12m',\quad m=2m'',\quad m''=6m'.$$

Vale a dire che per esprimere in semitoni medj un intervallo espresso in parti dell' ottava, bisogna moltiplicare per 12 il numero di queste parti, e reciprocamente per avere in parti dell' ottava un intervallo espresso in semitoni medj, bisogna dividere per 12 il numero di questi semitoni. Per esempio, l' intervallo di quinta misurato in semitoni medj essendo espresso da 7,02, questo stesso intervallo riferito all' ottava come *unità* sarà rappresentato dal numero

$$\frac{7,02}{12}=0,585\,;$$

il che ci fa conoscere che la quinta è presso a poco i $\frac{6}{10}$ o i $\frac{3}{5}$ dell' ottava.

Se l' intervallo fosse espresso in toni medj e si volesse avere in parti dell' ottava, bisognerebbe dividerlo per 6; e reciprocamente moltiplicare per 6 il numero delle parti dell'ottava per ottenere il numero corrispondente dei toni medj. Prendendo per esempio il numero precedente 0,585, si avrebbe dunque per l' intervallo di quinta espresso in toni medj,

$$0,585\times 6=3,510.$$

Quest' ultima cifra fa vedere che la quinta è composta di tre toni medj e di un semitono, colla sola piccolissima differenza di un *centesimo*.

Finalmente, per passare dall' espressione in semitoni all' espressione in toni, e viceversa, bisogna dividere la prima per 2, e moltiplicare per 2 la seconda. Tutte queste particolarità sono evidenti; poichè gl' intervalli rappresentati da numeri proporzionali comportano tutte quelle operazioni che possono farsi sulle altre quantità di cui si può a piacere cambiare l' unità di misura moltiplicando i numeri che la esprimono pel rapporto della nuova unità all' antica; e nel modo medesimo, per esempio, che si riduce in *piedi* un numero di *tese* moltiplicandolo per 6, perchè vi sono 6 piedi in una tesa, così si riduce in *semitoni medj* un numero dato di *ottave* moltiplicandolo per 12, perchè ogni ottava contiene dodici semitoni, ec.

D' ora in avanti indicheremo colle caratteristiche *s*, *t*, *ot*, segni abbreviativi di *semitono*, *tono* e *ottava*, la natura dell' unità alla quale si riferisce un numero. Così avremo

$$\text{Intervallo di quinta}=0^{ot},585=3^{t},51=7^{s},02.$$

22. Prendendo per unità l' intervallo dell'ottava, gl' intervalli i più usuali non vengono espressi che da frazioni decimali senza interi; il che non lascia scorgere alle persone poco famigliarizzate coi numeri i loro rapporti con quella stessa facilità colla quale si vedono quando sono espressi in toni o in semitoni. Tuttavia, siccome è facile il passare da un' unità di misura ad un' altra, così prenderemo adesso per unità l' ottava. Il sig. de Prony, nella veduta di facilitare i calcoli, ha dato due tavole di logaritmi ch' ei chiama *acustici*, una delle quali contiene i logaritmi binarj e l' altra i logaritmi che hanno $\sqrt[12]{2}$ per base; la prima si riferisce all' ottava e la seconda al semitono medio come unità. L' una e l' altra contengono i logaritmi dei numeri da 1 fino a 320. La tavola dei logaritmi binarj essendo sufficiente per tutte le nostre determinazioni, l' abbiamo aumentata di cento logaritmi, ma non abbiamo conservato che cinque cifre decimali, il che oltrepassa ancora i bisogni della pratica.

23. L' uso di questa tavola riduce alle prime due regole dell' aritmetica tutte le operazioni relative alla valutazione degl' intervalli in parti decimali dell' ottava, del che ci possiamo d' altronde convincere rammentandoci del principio fondamentale di questa valutazione (16). Rappresentiamo con $\frac{a}{b}$ il numero costituente di un intervallo qualunque, essendo 2 quello dell' ottava; sia inoltre μ il numero di volte, intero o frazionario, che bisogna moltiplicare il numero $\frac{a}{b}$ per se stesso onde ottenere per prodotto 2; si avrà

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\mu}=2\ \ldots\ldots\ (a),$$

e per conseguenza μ darà il rapporto di grandezza tra l' intervallo $\frac{a}{b}$ e l' ottava, vale a dire che se $\mu=2$, quest' intervallo sarà la *metà* dell' ottava; non ne sarà che il *terzo* se $\mu=3$, il *quarto* se $\mu=4$, e così successivamente. In generale, qualunque sia il numero μ, il rapporto vero della grandezza dell' intervallo a quello dell' ottava sarà $\frac{1}{\mu}$. Se dunque si considera l' ottava come unità, questo numero $\frac{1}{\mu}$ sarà il numero proporzionale dell' intervallo e la sua espres-

sione in unità ciascuna delle quali è eguale ad un'otteva. Ora la relezione (a) dà la relazione reciproca

$$2^{\frac{1}{\mu}} = \frac{a}{b},$$

ossia

$$2^m = \frac{a}{b} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (b),$$

facendo per brevità $\frac{1}{\mu} = m$. Così, essendo dato un intervallo per mezzo del suo numero costituente $\frac{a}{b}$, si otterrà il suo numero proporzionale, rapporto all'ottava presa per unità, deducendo il valore di m dall'eqozione (b).

Ma, qualunque sia la base del sistema di logaritmi di cui si voglia fare uso per risolvere l'equazione (b), si ha sempre

$$\log\left(2^m\right) = \log\left(\frac{a}{b}\right), \quad \text{e} \quad m \log 2 = \log a - \log b,$$

donde

$$m = \frac{\log a - \log b}{\log 2}.$$

Così, quaudo questo sistema è quello dei logaritmi binarj, siccome allora il logaritmo della sua base 2 è l'uoità, si ha semplicemeote

$$m = log\; a - log\; b,$$

ove la earatteristica *log* indica i logaritmi bioarj, ossia quelli della tavola annessa alla fine di quest'articolo.

Dalle precedenti considerazioni risulta ehe *il numero proporzionale di un intervallo è eguale alla differenza dei logaritmi binarj dei due termini del suo numero costituente.* Applichiamo questa regola all'intervallo di terza minore $\frac{6}{5}$: prendendo nella tavola i logaritmi di 6 e di 5, si avrà

$$\textit{Terza minore} = 2,58496 - 2,32193 = 0,26303.$$

Questa differenza rappresenta immediatamente un uumero di ottave; così la terza minore è presso a poco i $\frac{26}{100}$ di un'ottava. Nella stessa guisa si avrà

$$\textit{Terza maggiore} = \log 5 - \log 4 = 2,32193 - 2,00000 = 0^{ot},32193.$$

$$\textit{Quinta} = \log 3 - \log 2 = 1,58496 - 1 = 0^{ot},58496,$$

e così di seguito.

Si osservi di passaggio che il confronto di questi numeri fa immediatamente vedere ehe la quiota è composta esattameute di uua terza maggiore e di una terza minore, perchè

$$0^{ot},32193 + 0^{ot},26303 = 0^{ot},58496.$$

24. Se ora si vogliono conoscere questi stessi intervalli espressi in *toni medj*, basta moltiplicare i numeri precedenti per 6, e si troverà

$$Terza\ minore = 6 \times 0,26303 = 1^{t},57818$$

$$Terza\ maggiore = 6 \times 0,32193 = 1^{t},93158$$

$$Quinta = 6 \times 0,58496 = 3^{t},50976$$

25. Le stesse operazioni eseguite su tutti gl' intervalli del gamma naturale, o della scala diatonica, somministrano la seguente

TAVOLA

degl' intervalli della Scala diatonica, prendendo per unità l' ottava.

Intervallo dall' *ut* al	Numeri proporzionali	Differenze parziali
ut	0^{ot},00000	0^{ot},00000
re	0 ,16992	0 ,16992
mi	0 ,32193	0 ,15201
fa	0 ,41504	0 ,09311
sol	0 ,58496	0 ,16992
la	0 ,73697	0 ,15201
si	0 ,90689	0 ,16992
ut_2	1 ,00000	0 ,09311

Le differenze parziali ci fanno conoscere che gl' intervalli detti *tono maggiore*, *tono minore*, e *semitono maggiore* hanno per valori respettivi

$$0^{ot},16992,\quad 0^{ot},15201,\quad 0^{ot},09311,$$

e bastano questi numeri per poter trattare senza difficoltà tutte le ricerche che hanno per oggetto gl' intervalli musicali.

26. Notiamo alcune particolarità. La differenza dal tono maggiore al tono minore è

$$0^{ot},16992 - 0^{ot},15201 = 0^{ot},01791.$$

Così, nel salire dall' *ut* al *re*, si sale di una parte dell' ottava maggiore della frazione di ottava $\frac{18}{1000}$, che quando si sale dal *re* al *mi*. Questa frazione, ridotta a *toni medj*, è $6 \times 0,01791 = 0^{t},10746$, o presso a poco $\frac{1}{9}$ di tono medio.

Gli scrittori di musica sono soliti di rappresentare la *differenza* tra il tono

maggiore e il tono minore col comma $\frac{81}{80}$, il che non solo non significa nulla, ma dà inoltre un senso falso alla parola differenza. La vera differenza tra questi due intervalli è, in *ottave*, $0^{ot},01791$, in *toni medj* $0^{t},10746$, e in *semitoni medj* $0^{s},21492$. Questi numeri proporzionali fanno conoscere i rapporti reali di grandezza dell' intervallo in questione coll' uno o coll' altro degl' intervalli confrontati, mentre il numero costituente $\frac{81}{80}$ indica soltanto che il tono maggiore è più grande del tono minore. I rapporti

$$\frac{0^{ot},16992}{0^{ot},01791}=9,487, \quad \frac{0^{ot},15201}{0^{ot},01791}=8,487,$$

dimostrano infatti che questo intervallo o *comma* $\frac{81}{80}$ è contenuto 8 volte e presso a poco $\frac{1}{2}$ nell' intervallo di tono minore, e 9 volte e $\frac{1}{2}$ in quello di tono maggiore.

La differenza tra il semitono maggiore e il tono minore, cioè

$$0^{ot},15201-0^{ot},09311=0^{ot},0589,$$

è ciò che si dice *semitono minore*. Questo semitono è presso a poco i $\frac{6}{100}$ dell' ottava. Un intervallo viene dunque aumentato dei $\frac{6}{100}$ dell' ottava quando si fa *diesis* il suono superiore, e vien poi diminuito di questa stessa quantità quando questo suono si fa *bimolle*. Per esempio, l' intervallo dall' *ut* al *re* essendo $0^{ot},16992$, quello dall'*ut* al *re bimolle* sarà $0^{ot},16992-0^{ot},0589=0^{ot},11102$, e quello dall' *ut* al *re diesis* $=0^{ot},16992+0^{ot},0589=0^{ot},22882$.

L' intervallo dall' *ut* al *mi bimolle* essendo per la stessa ragione

$$0^{ot},32193-0^{ot},0589=0^{ot},26303,$$

si vede che non può confondersi il *re diesis* col *mi bimolle* che costringendo l' orecchio a trascurare l' intervallo

$$0^{ot},26303-0^{ot},22882=0^{ot},03421,$$

che differisce poco da un quinto di tono medio. L' intervallo $0^{ot},03421$, differenza tra il semitono maggiore e il semitono minore, è il comma, il cui numero costituente $\frac{128}{125}$ ci ha servito nella costruzione della scala cromatica. Può adesso con facilità apprezzarsi il grado di esattezza di questa scala.

27. Tra i problemi che possono proporsi sugl' intervalli musicali, sceglieremo i seguenti che ci sembrano i più propri a far ben sentire l' utilità dei logaritmi binarj.

I. Problema. *Essendo dato un suono per mezzo del suo rapporto costituente, determinare il posto che esso occupa nella serie dei suoni ascendenti che comincia dal suono fisso o fondamentale.*

Sia $\frac{176}{33}$ il rapporto dato; questo numero significa che il suono al quale esso si riferisce fa 176 vibrazioni mentre il suono fisso ne fa 33. Si tratta primieramente di trovare l' intervallo vero di questi due suoni.

Per questo intervallo si ha (23)

$$\log 176 - \log 33 = 7{,}45943 - 5{,}04439 = 2{,}41504.$$

Così il suono di cui si tratta è distante dal suono fisso di due ottave e più della frazione $0^{ot}{,}41504$; facendo astrazione dalle due ottave, per ridurre il suono nei limiti dall' ottava del suono fisso, e cercando nella tavola del n.° 25 il suono superiore dell' intervallo $0^{ot}{,}41504$, si vede essere esso un *fa*; dunque il suono proposto è la doppia ottava del *fa* compreso nell' ottava del suono fisso.

Se il rapporto dato fosse un numero intero, per esempio 3, bisognerebbe dargli la forma frazionaria per farvi entrare il suono fondamentale; ma siccome $\log 1 = 0$, così non si ha da fare nessuna sottrazione, e il logaritmo binario di 3 è immediatamente la misura dell' intervallo. Questo logaritmo essendo 1,58496, l'intervallo del suono proposto dal suono fisso si compone di un' ottava e più dell' intervallo 0,58496, che dalla tavola del n.° 25 si scorge essere una quinta. L' intervallo $\frac{3}{1}$, o piuttosto $1^{ot}{,}58496$, si chiama una *diciassettesima*: ritenendo che il suono inferiore sia l' *ut* fondamentale, il suono superiore è il *sol* della seconda ottava, ossia sol_2.

II. Problema. *Due intervalli essendo dati per mezzo dei loro rapporti costituenti relativamente ad uno stesso suono fondamentale, determinare l' intervallo dei due suoni superiori.*

Siano in generale $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ due intervalli qualunque riferiti ad uno stesso suono fisso; l' intervallo dei suoni superiori o di quelli i cui numeri respettivi di vibrazioni sono a e c, sarà

$$\frac{c}{d} : \frac{a}{b} = \frac{cb}{ad},$$

e si avrà per la misura di quest' intervallo

$$\log c + \log b - (\log a + \log d).$$

Nel caso dei due rapporti particolari $\frac{15}{8}$ e $\frac{10}{3}$, i logaritmi presi nella tavola darebbero

$$\begin{array}{ll} \log 15 = 3{,}90689 & \log 10 = 3{,}32193 \\ \log 3 \;\, = 1{,}58496 & \log 8 \;\, = 3{,}00000 \\ \hline \quad\quad\;\; 5{,}49185 & \quad\quad\;\; 6{,}32193 \\ & \quad\quad\;\; 5{,}49185 \\ \hline \end{array}$$

$$\text{Intervallo} = 0^{ot}{,}83008$$

Si giungerebbe allo stesso resultato calcolando separatamente ciascun intervallo e calcolando quindi la loro differenza: così si avrebbe

$$\textit{Intervallo}\ \frac{15}{8} = 3,90689 - 3,00000 = 0^{ot},90689,$$

$$\textit{Intervallo}\ \frac{10}{3} = 3,32193 - 1,58496 = 1,\quad 73697,$$

$$\textit{Intervallo cercato} = 1,73697 - 0,90689 = 0,\quad 83008.$$

Per discutere più facilmente questi valori, esprimiamoli in semitoni medj, cioè moltiplichiamoli per 12, e confrontiamoli quindi con gl'intervalli della scala cromatica del n.° 18. Avremo, limitandoci ai soli centesimi,

$$\textit{Primo intervallo}\left(\frac{15}{8}\right) = 10^s,88$$

$$\textit{Secondo intervallo}\left(\frac{10}{3}\right) = 20^s,84$$

$$\textit{Differenza o intervallo parziale} = 9^s,96$$

L'ultimo numero è quello che nella tavola esprime l'intervallo dall'*ut* al *la diesis*, o al *si bimolle*; è questo dunque l'intervallo cercato. Quanto agl'intervalli proposti, si vede immediatamente che il primo è l'intervallo dall'*ut* al *si*; ma il suono superiore del secondo è posto nei limiti della seconda ottava a partire dall'*ut* fisso: ora siccome tutti i suoni di questa seconda ottava sono distanti dall'*ut* di quantità comprese tra 12^s e 24^s, bisogna sottrarre 12 dall'intervallo $20^s,84$ per portarlo nei limiti della prima ottava. E poichè il numero $8^s,84$, al quale esso si riduce con questa sottrazione, esprime l'intervallo dall'*ut* al *la*, ne viene che $20^s,84$ esprime quello dall'*ut* al la_2. I suoni superiori degl'intervalli proposti sono dunque *si* e la_2, e il loro intervallo $9^s,96$ si trova perfettamente eguale a quello dall'*ut* al *la diesis*.

La determinazione completa dei suoni che si trovano indicati di sopra col *si* e col la_2 richiederebbe che il suono fisso *ut* fosse pure determinato, il che non può essere che l'oggetto di una convenzione. Qualunque sia il grado di acutezza assoluta di questi suoni, il loro intervallo sarà sempre di dieci semitoni con una differenza di soli 4 centesimi. Vedremo altrove tutto ciò che riguarda i suoni in se stessi (*Vedi* SUONO): io quest'articolo non si tratta che della misura degl'intervalli.

28. Possiamo proporci un altro problema importante sugl'intervalli, pel quale la nostra tavola dei logaritmi binarj è insufficiente, attesa la sua limitata estensione. Eccolo:

Un intervallo essendo dato o in ottave, o in toni medj, o in semitoni medj, trovare il suo numero costituente, vale a dire il rapporto dei numeri delle vibrazioni che fanno nello stesso tempo i due suoni di cui esso esprime la distanza.

Questo problema è l'inverso di quello di cui ci siamo fin qui occupati; e se si potesse trovare nella tavola dei logaritmi binarj il numero corrispondente ad un logaritmo dato, colla stessa facilità colla quale vi si trova il logaritmo corrispondente ad un numero dato, questa tavola ne presenterebbe immediatamente

la soluzione. Ma siccome non sarebbe possibile il farla servire a quest' uso che in un ristrettissimo numero di essi e avendo riguardo a diverse circostanze che che troppo lungo sarebbe lo spiegare, così tratteremo direttamente il quesito col mezzo dei logaritmi volgari, che indicheremo colla caratteristica log conservando la caratteristica *log* pei logaritmi binarj.

Sia m il numero di ottave o di frazioni di ottava esprimente l' intervallo, ed M il suo numero costituente cercato: si avrà la relazione fondamentale

$$2^m = M\,,$$

che dà, prendendo il logaritmo volgare di ciascuno de' suoi membri,

$$m \log 2 = \log M.$$

Ora il logaritmo volgare di 2 è o, 3o1o3, donque

$$\log M = 0,30103\,.\,m\,;$$

vale a dire che moltiplicando il numero proporzionale dell' intervallo pel fattore costante o, 3o1o3, si ottiene il logaritmo volgare del numero costituente, numero che si può in seguito trovare per mezzo delle tavole ordinarie. Quanto però abbiamo detto deve intendersi esclusivamente per il caso che si tratti di un numero proporzionale riferito all' ottava come unità, poichè se l' intervallo fosse espresso in toni o in semitoni medj, bisognerebbe cominciare a ridurlo in ottave. Prendiamo per esempio l' intervallo $0^{ot},58496$: si avrà

$$\log M = 0,30103 \times 0,58496 = 0,176091.$$

Cercando il numero corrispondente a questo logaritmo nelle tavole ordinarie, si troverà

$$M = 1,5 = \frac{15}{10} = \frac{3}{2}\,;$$

l' intervallo di cui si tratta è dunque quello della quinta esatta.

Proponiamoci adesso di trovare il numero costituente dell'intervallo eguale ad *un millesimo* dell' ottava, cioè $0^{ot},001$. Il prodotto di questo numero pel fattore costante o, 3o1o3 dà

$$\log M = 0,000301\,,$$

limitandoci sempre a sole sei cifre decimali, donde si ha $M = 1,0007$. Questo numero posto sotto la forma delle frazioni ordinarie diviene $\frac{10007}{10000}$, e ci fa conoscere che di due suoni, il cui intervallo è $0^{ot},001$, il primo fa 10000 vibrazioni nel tempo che il secondo ne fa 10007. Questi due suoni sembrerebbero donque all' *unisono*, perchè non vi ha orecchio capace di accorgersi del ritardo delle prime vibrazioni sulle seconde.

È facile il persuadersi che se $\frac{1}{1000}$ di ottava è un intervallo insensibile, $\frac{1}{100}$ di semitono medio, che non è che $\frac{1}{1200}$ di ottava, lo è anco meno; cosicchè, limitandosi alle prime due cifre decimali in tutte le valutazioni degl' intervalli in semitoni medj, si oltrepassa di gran lunga tutte le esigenze dell' orecchio.

29. È questa l' occasione di menzionare un fatto vantaggiosissimo per la musica. Quando si ascolta un intervallo che poco differisca da un altro espresso da numeri più semplici, si crede di sentire realmente il più semplice, e l' illusione

è tanto più compiuta quanto minore è la differenza. Per esempio, due corde sonore vibranti simultaneamente, a di cui la prima facesse 340 vibrazioni mentre la seconda ne facesse 226, darebbero un accordo di quinta che sembrerebbe esattissimo, perchè l'orecchiò sostituirebbe al rapporto $\frac{340}{226}$ il rapporto più semplice $\frac{339}{226} = \frac{3}{2}$. Questo fenomeno non riposa unicamente, come hanno creduto alcuni autori, sui limiti della sensibilità dell'organo dell'udito, ma ancora e principalmente sull'azione che esercitano le une sulle altre le ondulazioni sonore generate nell'aria dai corpi vibranti contemporaneamente. È certo che un gran numero di leggere dissonanze dalle quali resteremmo sgradevolmente colpiti stando in vicinanza dell'orchestra svaniscono affatto se ei ritiriamo ad una certa distanza, e che i suoni si accordano tanto meglio quanto maggiore è lo spazio che debbono percorrere prima di giungere all'orecchio. Senza questa circostaza nessuna armonia sarebbe possibile.

30. Nel sistema del temperamento eguale, secondo il quale in oggi si accordano generalmente i piano forti, i dodici semitoni della scala cromatica sono, in numeri costituenti,

$$\left(\sqrt[12]{2}\right)^{1},\ \left(\sqrt[12]{2}\right)^{2},\ \left(\sqrt[12]{2}\right)^{3},\ \left(\sqrt[12]{2}\right)^{4}\ldots\ldots\left(\sqrt[12]{2}\right)^{12}$$

di cui si hanno i valori approssimativi nella seguente

Scala cromatica del temperamento eguale

NOTE	Numeri delle vibrazioni relative
ut	1,000000
ut diesis o *re bimolle*.	1,059463
re.	1,122462
re diesis o *mi bimolle*.	1,189207
mi	1,259921
fa.	1,334840
fa diesis o *sol bimolle*.	1,414213
sol.	1,498306
sol diesis o *la bimolle* .	1,587400
la.	1,681793
la diesis o *si bimolle* .	1,781796
si.	1,887745
ut_2	2,000000

Questi numeri non sono suscettibili di far conoscere le differenze della scala presente dalla scala (5); poichè confrontando per esempio la quinta espressa qui col numero 1,498306 colla quinta giusta della scala (5)$=$1,5, tutto ciò che può rilevarsi si è che la quinta giusta è più alta della quinta temperata; ma, se si volesse sapere di quanto, bisognerebbe entrare in una quantità di calcoli che lasceremo fare agli autori dei trattati di armonia, mentre noi tratteremo direttamente il quesito.

Prendendo il semitono medio per unità, gl' intervalli dei gradi successivi della scala cromatica media sono espressi dalla serie dei numeri interi

$$1^s,\ 2^s,\ 3^s,\ 4^s,\ 5^s,\ 6^s,\ 7^s,\ 8^s,\ 9^s,\ 10^s,\ 11^s,\ 12^s$$

che basta confrontare colla serie dei numeri della tavola dei n.° 18 per trovare tutte le differenze delle due scale. Così, siccome la quinta giusta è eguale a 7^s,02, e la quinta temperata a 7^s soltanto, è chiaro che quest' ultima pecca per difetto di $\frac{2}{100}$ di semitono; al contrario la terza maggiore temperata $= 4^s$ supera la terza maggiore giusta $=$ 3,86, di $\frac{14}{100}$ di semitono ec. Noi non ci fermeremo più a lungo sopra altre differenze, e ci basterà di aver fatto conoscere l' estrema facilità di tutti questi confronti quando si fa uso delle vere misure degl' intervalli. Il sig. de Prony avendo posto a fronte nella sua *Istruzione* diverse scale temperate, rimanderemo quelli tra i nostri lettori che desiderassero notizie più particolarizzate a quest' opera.

TAVOLA

dei logaritmi binarj dei numeri da 1 a 420.

NUMERI	LOGARITMI	NUMERI	LOGARITMI	NUMERI	LOGARITMI	NUMERI	LOGARITMI
1	0,00000	41	5,35755	81	6,33985	121	6,91886
2	1,00000	42	5,39232	82	6,35755	122	6,93074
3	1,58496	43	5,42626	83	6,37504	123	6.94251
4	2,00000	44	5,45943	84	6,39232	124	6,95420
5	2,32193	45	5,49185	85	6,40939	125	6,96578
6	2,58496	46	5,52356	86	6,42626	126	6,97728
7	2,80735	47	5,55459	87	6,44294	127	6,98868
8	3,00000	48	5,58496	88	6,45943	128	7,00000
9	3,16992	49	5,61471	89	6,47573	129	7,01123
10	3,32193	50	5,64386	90	6,49185	130	7,02237
11	3,45943	51	5,67243	91	6,50779	131	7,03342
12	3,58496	52	5,70044	92	6,52356	132	7,04439
13	3,70044	53	5,72792	93	6,53916	133	7,05528
14	3,80735	54	5,75489	94	6,55459	134	7,06609
15	3,90689	55	5,78136	95	6,56986	135	7,07682
16	4,00000	56	5,80735	96	6,58496	136	7,08746
17	4,08746	57	5,83289	97	6,59991	137	7,09803
18	4,16992	58	5,85798	98	6,61471	138	7,10852
19	4,24793	59	5,88264	99	6,62936	139	7,11894
20	4,32193	60	5,90689	100	6,64386	140	7,12928
21	4,39232	61	5,93074	101	6,65821	141	7,13955
22	4,45943	62	5,95420	102	6,67243	142	7,14975
23	4,52356	63	5,97728	103	6,68650	143	7,15987
24	4,58496	64	6,00000	104	6,70044	144	7,16992
25	4,64386	65	6,02237	105	6,71425	145	7,17991
26	4,70044	66	6,04439	106	6,72792	146	7,18982
27	4,75489	67	6,06609	107	6,74147	147	7,19967
28	4,80735	68	6,08746	108	6,75489	148	7,20945
29	4,85798	69	6,10852	109	6,76818	149	7,21917
30	4,90689	70	6,12928	110	6,78136	150	7,22882
31	4,95420	71	6,14975	111	6,79442	151	7,23840
32	5,00000	72	6,16992	112	6,80735	152	7,24793
33	5,04439	73	6,18982	113	6,82018	153	7,25739
34	5,08746	74	6,20945	114	6,83289	154	7,26670
35	5,12928	75	6,22882	115	6,84549	155	7,27612
36	5,16992	76	6,24793	116	6,85798	156	7,28540
37	5,20945	77	6,26679	117	6,87036	157	7,29462
38	5,24793	78	6,28540	118	6,88264	158	7,30378
39	5,28540	79	6,30378	119	6,89482	159	7,31288
40	5,32193	80	6,32193	120	6,90689	160	7,32193

SEGUITO DELLA TAVOLA

NUMERI	LOGARITMI	NUMERI	LOGARITMI	NUMERI	LOGARITMI	NUMERI	LOGARITMI
161	7, 33092	201	7, 65105	241	7, 91289	281	8, 13443
162	7, 33985	202	7, 65821	242	7, 91886	282	8, 13955
163	7, 34873	203	7, 66534	243	7, 92481	283	8, 14466
164	7, 35755	204	7, 67243	244	7, 93074	284	8, 14975
165	7, 36632	205	7, 67948	245	7, 93664	285	8, 15482
166	7, 37504	206	7, 68650	246	7, 94251	286	8, 15987
167	7, 38370	207	7, 69349	247	7, 94837	287	8, 16491
168	7, 39232	208	7, 70044	248	7, 95420	288	8, 16992
169	7, 40088	209	7, 70736	249	7, 96000	289	8, 17493
170	7, 40939	210	7, 71425	250	7, 96578	290	8, 17991
171	7, 41785	211	7, 72110	251	7, 97154	291	8, 18488
172	7, 42626	212	7, 72792	252	7, 97728	292	8, 18982
173	7, 43463	213	7, 73471	253	7, 98299	293	8, 19476
174	7, 44294	214	7, 74147	254	7, 98868	294	8, 19967
175	7, 45121	215	7, 74819	255	7, 99435	295	8, 20457
176	7, 45943	216	7, 75489	256	8, 00000	296	8, 20945
177	7, 46761	217	7, 76155	257	8, 00562	297	8, 21432
178	7, 47573	218	7, 76818	258	8, 01123	298	8, 21917
179	7, 48382	219	7, 77479	259	8, 01681	299	8, 22400
180	7, 49185	220	7, 78136	260	8, 02237	300	8, 22882
181	7, 49985	221	7, 78790	261	8, 02791	301	8, 23362
182	7, 50779	222	7, 79442	262	8, 03342	302	8, 23840
183	7, 51570	223	7, 80090	263	8, 03892	303	8, 24317
184	7, 52356	224	7, 80735	264	8, 04439	304	8, 24793
185	7, 53138	225	7, 81378	265	8, 04985	305	8, 25267
186	7, 53916	226	7, 82018	266	8, 05528	306	8, 25739
187	7, 54689	227	7, 82655	267	8, 06070	307	8, 26209
188	7, 55459	228	7, 83289	268	8, 06609	308	8, 26679
189	7, 56224	229	7, 83920	269	8, 07146	309	8, 27146
190	7, 56986	230	7, 84549	270	8, 07682	310	8, 27612
191	7, 57743	231	7, 85175	271	8, 08215	311	8, 28077
192	7, 58496	232	7, 85798	272	8, 08746	312	8, 28540
193	7, 59246	233	7, 86419	273	8, 09276	313	8, 29002
194	7, 59991	234	7, 87036	274	8, 09803	314	8, 29462
195	7, 60733	235	7, 87652	275	8, 10329	315	8, 29921
196	7, 61471	236	7, 88264	276	8, 10852	316	8, 30378
197	7, 62205	237	7, 88874	277	8, 11374	317	8, 30834
198	7, 62936	238	7, 89482	278	8, 11894	318	8, 31288
199	7, 63662	239	7, 90087	279	8, 12412	319	8, 31741
200	7, 64386	240	7, 90689	280	8, 12928	320	8, 32193

SEGUITO DELLA TAVOLA

NUMERI	LOGARITMI	NUMERI	LOGARITMI	NUMERI	LOGARITMI	NUMERI	LOGARITMI
321	8,32643	346	8,43463	371	8,53528	396	8,62936
322	8,33092	347	8,43879	372	8,53916	397	8.63300
323	8,33539	348	8,44294	373	8,54303	398	8,63662
324	8,33985	349	8,44708	374	8,54689	399	8,64024
325	8,34430	350	8,45121	375	8,55075	400	8,64386
326	8,34873	351	8,45533	376	8,55459	401	8,64746
327	8.35315	352	8,45943	377	8,55842	402	8,65105
328	8,35755	353	8,46352	378	8,56224	403	8.65464
329	8,36194	354	8,46761	379	8,56605	404	8,65821
330	8,36632	355	8,47168	380	8,56986	405	8,66178
331	8,37069	356	8,47573	381	8,57365	406	8,66534
332	8,37504	357	8,47978	382	8,57743	407	8,66889
333	8,37938	358	8,48382	383	8,58120	408	8,67243
334	8,38370	359	8,48784	384	8,58496	409	8,67596
335	8,38802	360	8,49185	385	8,58871	410	8,67948
336	8,39232	361	8,49586	386	8,59246	411	8,68299
337	8,39660	362	8,49985	387	8,59619	412	8,68650
338	8,40088	363	8,50383	388	8,59991	413	8,69000
339	8,40514	364	8,50779	389	8,60363	414	8,69349
340	8,40939	365	8,51175	390	8,60733	415	8,69697
341	8,41365	366	8,51570	391	8,61102	416	8,70044
342	8,41785	367	8,51964	392	8.61471	417	8,70390
343	8,42206	368	8,52356	393	8,61839	418	8,70736
344	8,42626	369	8,52748	394	8,62205	419	8,71081
345	8,43045	370	8,53138	395	8,62571	420	8,71425

INVERNO (*Astr.*). Quarta stagione dell' anno che comincia verso il 22 Dicembre, quando il sole entra nel segno del Capricorno, e finisce verso il 21 Marzo quando il sole esce dal segno dei Pesci per entrare in quello dell' Ariete. La sua durata è di 89 giorni e 2 ore (*Vedi* Armillare). Il primo giorno di questa stagione è il più corto dell' anno.

INVERSO (*Alg. e Arit.*). Si applica questa parola ad una certa maniera di fare la regola del tre o di proporzione, che sembra essere rovesciata o contraria alla regola del tre diretta. In questa regola, essendo collocati i termini nel loro ordine naturale, il primo termine sta al secondo come il terzo al quarto, cioè se il secondo è maggiore o minore del primo anco il quarto è maggiore o minore del terzo nello stesso rapporto: ma, nella regola *inversa*, il quarto termine sta al terzo come il primo al secondo. *Vedi* Ragione e Proporzione.

Il metodo *inverso* delle flussioni è quello che più comunemente dicesi *Calcolo Integrale*. *Vedi* Integrale.

INVERTENDO (*Alg. e Arit.*). È un' espressione di cui si fa uso per indicare il

cangiamento che si fa nell' ordine dei terminini di una proporzione, ponendo gli antecedenti in luogo dei conseguenti e i conseguenti in luogo degli antecedenti. Per esempio, nella proporzione $a : b :: c : d$, si ha, *invertendo*: $b : a :: d : c$.

IPAZIA, figlia di Teone, celebre matematico d' Alessandria, nacque in questa città verso la fine del IV secolo. La storia della scienza non ha fino a questo giorno consacrato la memoria di una donna di essa più distinta per l'elevazione dello spirito e per l' estensione delle cognizioni. Studiò sotto la direzione di suo padre, e sia che la società dei dotti che frequentavano la sua casa esercitasse sulla giovane sua mente una speciale influenza, sia che la natura dotata l' avesse di disposizioni per gli studj severi, rare nelle persone del suo sesso, essa fu di buon' ora considerata in Alessandria come uno di quei fenomeni intellettuali di cui si contemplano i progressi non meno con interesse che con stupore. Ipazia consacrò allo studio tutti gl' istanti della sua vita, fece rapidi e maravigliosi progressi nelle matematiche e nella filosofia, e con esempio unico nel periodo di parecchi secoli, occupò la cattedra illustrata in Alessandria dalla parola di tanti uomini celebri. Essa aveva preferito la dottrina di Platone a quella di Aristotile, e deve far maraviglia come quella felice disposizione delle sue idee non abbia influito sulle sue convinzioni religiose nè prevenuto la catastrofe di cui fu essa in seguito la vittima. Come i filosofi dell' antichità, di cui avea studiato gli scritti, viaggiò per istruirsi e si recò ad Atene per assistere alle lezioni dei professori più rinomati del suo tempo. Ritornò poscia ad Alessandria ove dietro l' invito dei magistrati si dedicò al pubblico insegnamento della filosofia. I suoi corsi cominciavano dalla spiegazione delle principali verità matematiche; essa si rammentava così di queste parole scritte sul portico della scuola dell' illustre suo maestro: *Niuno qui entri che non sia geometra* (*Socratis Hist. lib.* 7, *cap.* XV).

Ipazia accoppiava alle grazie dello spirito le virtù del suo sesso: la sua condotta fu sempre immune da ogni sospetto: sapeva contenere ne' limiti del rispetto i giovani che si mostravano tocchi dalle sue attrattive, ed allontanò da se costantemente qualunque idea di una relazione che distratta l' avesse dal suo gusto per lo studio. Accusata dalla voce pubblica di avere esercitato qualche influenza sopra Oreste governatore di Alessandria, che aveva voluto porre degli ostacoli allo zelo del patriarca Cirillo, venne massacrata in una sommossa popolare. Così perì sul fiore dell' età questa nobile giovinetta a cui non è mancato che di essere stata cristiana, in un' epoca specialmente in cui il politeismo cadeva da ogni parte avanti al Vangelo. Questo avvenimento deplorabile accadde nel mese di Marzo 415. Ipazia ha scritto parecchie opere che tutte sono perite colla biblioteca di Alessandria: nulla di lei ci rimane: solo si sa che aveva composto un *Comento sopra Diofanto*, un *Canone astronomico*, e un *Comento sui Conici di Apollonio di Perga*.

IPERBOLA. (*Geom.*). Una delle sezioni coniche. Essa è generata da un piano che taglia obliquamente un cono retto, in modo da poter tagliare ancora un secondo cono simile al primo, e il quale gli sarebbe opposto pel vertice. Questa curva ha sempre due rami opposti, formati dalla sezione dei due coni e del piano. Tale è la curva di cui uno dei rami è OEO, e l' altro LDO (*Tav.* LXXX, *fig.* 11).

1. Per trovare l' equazione di questa curva, la considereremo nel piano generatore, e prenderemo per asse delle ascisse la retta RR, sezione di questo piano, *col piano principale* (*Vedi* ELLISSE). Supporremo inoltre, per maggior semplicità, che il piano generatore sia perpendicolare nel medesimo tempo al piano principale e alla base del cono.

Premesso ciò, pel vertice E del ramo OEO, conduciamo, nel piano principale, la retta EE paralella alla comune sezione AB di questo piano e della base, i

triangoli simili DEE, DBR, AER daranno le due proporzioni

$$DE : EE :: DR : BR,$$

$$DE : EE :: ER : AR.$$

Moltiplicando termine a termine, otterremo

$$\overline{DE}^2 : \overline{EE}^2 :: DR \times ER : BR \times AR.$$

Indichiamo ora DE con $2a$, EE con $2b$, e prendiamo il punto E per l'origine delle ascisse. ER sarà l'ascissa del punto O della curva, e OR l'ordinata di questo punto; ma nel circolo BOAOB si ha $\overline{OR}^2 = BR \times AR$, si avrà perciò $BR \times AR = y^2$, e di più $DR = 2a + x$ ed $ER = x$. Così la proporzione di sopra si cangia in

$$4a^2 : 4b^2 :: 2ax + x^2 : y^2.$$

Donde si deduce

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}\left(2ax + x^2\right) \ldots\ldots\ldots (1).$$

Equazione che conviene evidentemente a tutti i punti del ramo OEO, poichè per ciascuno di questi punti possiamo concepire un piano paralello alla base del cono; e l'intersezioni di questo piano col piano generatore e il piano principale darebbero relazioni simili alle precedenti. Possiamo ancora assicurarci facilmente che quest' equazione conviene a tutti i punti del secondo ramo LDO, dando ad x dei valori negativi. Infatti, se cominciamo dal fare $x = -2a$, si ottiene $y = 0$; questi valori corrispondono al vertice D del secondo ramo. Tutti i valori negativi di x minori di $-2a$, rendono i valori di y immaginari, perchè non esiste alcun punto della curva tra i due vertici E e D. Se in seguito si fa $x = -2a - x'$, il valore y' di y diventerà

$$y'^2 = \frac{b^2}{a^2}\left[2a\left(-2a - x'\right) + \left(-2a - x'\right)^2\right],$$

ovvero

$$y'^2 = \frac{b^2}{a^2}\left(2ax' + x'^2\right).$$

Equazione che si otterrebbe per tutti i punti del ramo LDO, servendosi delle considerazioni con l'aiuto delle quali abbiamo ottenuto l'equazione (1), e prendendo D per l'origine delle ascisse x'.

$2a$ si chiama il *primo asse* o l'*asse traverso* dell'iperbola, e $2b$ *il secondo asse* o l'*asse non traverso*. Questi due assi si chiamano ancora *gli assi principali*.

2. Per situare l'origine delle ascisse in un modo simmetrico rapporto ai due rami dell'iperbola, si prende il punto di mezzo del grand'asse al quale si dà il nome di centro. La relazione tra le ascisse x' contate dal centro, e le ascisse precedenti x contate dal vertice, è evidentemente $x' = a + x$, donde $x = x' - a$; sostituendo questo valore nell'equazione (1), essa diventa

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}\left(x'^2 - a^2\right).$$

Ovvero, cangiando x' in x

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}\left(x^2 - a^2\right) \ldots\ldots (2).$$

Tale è l'equazione dell'iperbola, riportata al centro. L'equazione (1) è quella dell'iperbola riferita al vertice.

3. Osservando che possiamo dare all'equazione dell'ellisse riferita al centro (*Vedi* Ellisse) la forma

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2,$$

e che quella dell'iperbola può ancora diventare

$$a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2,$$

si vede che queste due equazioni non differiscono che per il segno della quantità b^2, e possiamo concluderne che, quantunque siano di forma differentissima, poichè una è limitata in tutti i sensi e l'altra illimitata, le due curve debbono godere di proprietà analoghe. Verifichiamo questa conclusione.

4. Nell'iperbola come nell'ellisse, tutte le rette che passano pel centro e vanno a terminare da una parte e dall'altra alla curva, son divise in due parti eguali da questo centro.

Sia mM, una linea qualunque (*Tav.* XLI, *fig.* 3) condotta pel centro O. La sua equazione sarà

$$y = mx,$$

m essendo la tangente trigonometrica dell'angolo mOp. (*Vedi* Applicazione dell'Algebra alla Geometria). I punti M ed m appartenendo all'iperbola, si avrà ancora per l'equazione di questi punti

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}\left(x^2 - a^2\right),$$

e, per conseguenza

$$m^2x^2 = \frac{b^2}{a^2}\left(x^2 - a^2\right),$$

donde

$$x = \pm \frac{ab}{\sqrt{b^2 - a^2m^2}}.$$

Questo valore sostituito in $y = mx$, dà

$$y = \pm \frac{abm}{\sqrt{b^2 - a^2m^2}}.$$

I valori positivi di x e di y saranno le coordinate OP e PM del punto M, e i valori negativi di queste medesime quantità, le coordinate Op e pm del punto m; e siccome questi valori sono eguali, indipendentemente dal segno, si ha

$$\text{OP} = Op, \quad \text{e} \quad \text{PM} = pm.$$

Così i triangoli rettangoli OMP, Omp sono eguali, e si ha MO $= m$O.

5. Di tutte le rette che, passando pel centro, incontrano i due rami dell'iper-

bola, la più corta è evidentemente il grand'asse. Ciò non ostante è utile l'esaminare come questa circostanza è espressa nei valori precedenti di x e di y.

Esaminando questi valori, si vede che le loro grandezze respettive dipendono interamente dal denominatore comune $\sqrt{b^2-a^2m^2}$, la cui grandezza essa stessa dipende dalla quantità variabile m, ovvero dalla tangente dell'angolo che fa la retta con l'asse delle x. Il valore di $\sqrt{b^2-a^2m^2}$ è il maggior possibile quando $m=0$, vale a dire quando l'angolo è nullo, ovvero, quando la retta si confonde con l'asse. In questo caso, i valori di x e di y si riducono a

$$x=\pm a, \quad y=\pm o.$$

Queste sono le coordinate delle due estremità *dell'asse traverso*. Facendo m continuamente più grande, i valori di $\sqrt{b^2-a^2m^2}$, diventano continuamente più piccoli; ma essi cessano di essere reali, cioè, la retta non può incontrare più la curva, quando a^2m^2 diventa maggiore di b^2. La tangente del più grand'angolo che possa fare con l'asse una retta che incontra l'iperbola da una parte e dall'altra e che passa pel centro è dunque determinata dalla relazione

$$b^2=a^2m^2,$$

la quale dà

$$m=\pm\frac{b}{a}.$$

Ma allora $b^2-a^2m^2=o$ e i valori di x e di y diventano *infiniti*, il che prova che una retta la cui tangente trigonometrica, dell'angolo che essa fa con l'asse, è eguale a $\frac{b}{a}$ non incontra l'iperbola che a *distanze infinite*. Questa retta si chiama un *asintoto*. (Vedi *questa parola*). Siccome possiamo condurre pel centro O due rette che facciano, in un senso opposto, il medesimo angolo coll'asse, l'iperbola ha due asintoti.

Quando si conosce la grandezza dei due assi, la costruzione degli asintoti non presenta alcuna difficoltà; essa si riduce a descrivere le rette, le cui equazioni sono

$$y=+\frac{b}{a}x, \quad y=-\frac{b}{a}x.$$

Così, con l'asse traverso $=2a$, e la retta $de=2b$, che formano il rettangolo $bcde$ (*Tav.* IV, *fig.* 4), le diagonali bd, ec, prolungate saranno le rette domandate. (*Vedi* Applicazione dell'Algebra alla Geometria).

6. Abbiamo veduto che l'ellisse possiede due punti degni di molta osservazione; questi sono i suoi *fuochi*. (*Vedi* Ellisse). Cerchiamo se l'iperbola ci offrirà qualche cosa di analogo.

I fuochi dell'ellisse avendo per coordinate

$$x=\pm\sqrt{a^2-b^2}, \quad y=\pm o,$$

siccome l'equazione dell'iperbola non differisce da quella dell'ellisse che per

il segno di b^2, determiniamo sull'asse delle x due punti la cui coordinate siano

$$x = \pm\sqrt{a^2+b^2}, \quad y = \pm o,$$

vale a dire determiniamo i punti F ed f (*Tav.* XLI, *fig.* 5), tali che

$$OF = +\sqrt{a^2+b^2} \quad e \quad Of = -\sqrt{a^2+b^2},$$

il che può farsi assai facilmente descrivendo dal centro O (*Tav.* XLI, *fig.* 4), e col raggio Ob due archi bf ed eF, poichè evidentemente abbiamo

$$OF = Of = Ob = \sqrt{\overline{Oa}^2 + \overline{ba}^2} = \sqrt{a^2+b^2}.$$

Premesso ciò, conduciamo due rette FM ed fM (*Tav.* XLI, *fig.* 5) da questi punti a un punto qualunque M dell'iperbola, e cerchiamo la relazione di queste rette. Avendo abbassata l'ordinata MP$=y$, i due triangoli rettangoli FPM, fPM, daranno

$$\overline{FM}^2 = \overline{FP}^2 + \overline{PM}^2,$$

$$\overline{fM}^2 = \overline{fP}^2 + \overline{PM}^2.$$

Ma $FP = OF - OP = \sqrt{a^2+b^2} + x$, $fP = fO + OP = x - \sqrt{a^2+b^2}$, e PM$=y$; così l'espressioni precedenti diventano, sostituendo

$$\overline{FM}^2 = \left(x + \sqrt{a^2+b^2}\right)^2 + \frac{b^2}{a^2}\left(x^2 - a^2\right),$$

$$\overline{fM}^2 = \left(x - \sqrt{a^2+b^2}\right)^2 + \frac{b^2}{a^2}\left(x^2 - a^2\right).$$

Sviluppando i quadrati e riducendo, avremo

$$\overline{FM}^2 = \frac{(a^2+b^2)x^2 + 2a^2x\sqrt{a^2+b^2} + a^4}{a^2} = \frac{(x\sqrt{a^2+b^2}+a^2)^2}{a^2},$$

$$\overline{fM}^2 = \frac{(a^2+b^2)x^2 - 2a^2x\sqrt{a^2+b^2} + a^4}{a^2} = \frac{(x\sqrt{a^2+b^2}-a^2)^2}{a^2};$$

il che dà, prendendo le radici quadrate

$$FM = \frac{x\sqrt{a^2+b^2}}{a} + a,$$

$$fM = \frac{x\sqrt{a^2+b^2}}{a} - a.$$

La somma di queste quantità resta variabile a motivo della quantità x che essa contiene; ma la sua differenza è:

$$FM - fM = 2a.$$

Donde segue che i due punti F ed f godono di questa proprietà degna di osservazione che: *la differenza di due rette condotte da un punto qualunque*

della curva ai punti F *ed* f *è una quantità costante eguale all'asse traverso.* Questi punti sono i *fuochi* dell'iperbola, e le rette come FM ed fM, sono i *raggi* vettori di questa curva.

7. La proprietà fondamentale della quale abbiamo ottenuto la deduzione serve a definire l'iperbola, quando si considera in un modo indipendente dalla sua generazione nel cono; si dice allora che questa è una curva la cui *differenza* delle distanze di ciascuno dei suoi punti a due punti fissi, è eguale ad una linea data. Partendo da questa definizione si trova la sua equazione e si riconosce che la linea data è l'asse traverso. Questa proprietà dà ancora i mezzi di costruire facilmente l'iperbola.

Siano, infatti, F, f i fuochi dati di posizione sopra una retta indefinita Ff, e sia $2a$ la differenza costante, ovvero, il grand'asse dell'iperbola che si vuole descrivere.

Prendiamo a cominciare dal punto O, (*Tav.* XLI, *fig.* 6) mezzo di Ff, due distanze OA, OB eguali al semi-primo asse a; i due punti A e B appartenguno alla curva.

Per ottenere altri punti si segni sopra la retta Of, un punto arbitrario L, poi dai punti F, f, come centri, con i raggi AL, BL descriviamo successivamente delle circonferenze le quali si taglieranno in M ed m; questi punti apparterranno alla curva, poichè, dalla costruzione, la differenza delle rette condotte da F e da f ad M ed m è eguale alla differenza dei raggi AL e BL, la quale è esattamente il primo asse $AB=2a$. Reciprocamente, dai due punti f ed F, come centri, con i medesimi raggi, descriviamo delle circonferenze di circolo; i punti M' ed m' ove esse si taglieranno apparterranno all'altro ramo della curva.

Operando nella medesima maniera potremo ottenere dei punti abbastanza vicini gli uni agli altri per potere inseguito descrivere i due rami dell'iperbola.

8. Dalla medesima proprietà dei raggi vettori, si deduce ancora un processo per descrivere l'iperbola per mezzo di un movimento continuo.

Siano I ed H (*Tav.* CXLVI, *fig.* 5) i due fuochi; se in I si pone l'estremità di una riga IT, mobile in I, in modo da poter girare intorno di questo punto, e che si attacchi in H il termine di un filo HBT, di cui l'altra estremità sia attaccata a quella della riga IT, e se di più la differenza delle lunghezze della riga e del filo è eguale al primo asse $2a$, è evidente che uno stile B, che scorrerà lungo del filo tendendolo e applicandolo contro la riga, descriverà col suo moto un arco d'iperbola, poichè a ciascun punto B si avrà $IB-BH=2a$.

9. Nell'Iperbola, come nell'ellisse, si chiama *parametro*, una retta terza proporzionale ai due assi. Ed è egualmente, in queste due curve, la doppia ordinata che passa per l'uno e per l'altro fuoco. (*Vedi* Ellisse). Indicando con p il parametro dell'iperbola, avremo dunque ancora

$$\frac{p}{a}=\frac{b^2}{a^2},$$

e, sostituendo questo valore nell'equazioni (1) e (2) esse diventeranno

$$\left.\begin{aligned} y^2&=\frac{p}{a}\left(2ax+y^2\right)\\ y^2&=\frac{p}{a}\left(x^2-a^2\right)\end{aligned}\right\}\ \ldots\ldots\ (3).$$

Quest'ultime si chiamano *equazioni al parametro*. La prima è riportata al vertice e la seconda al centro.

10. Quando gli assi $2a$ e $2b$ sono egnali, l'equazioni dell'iperbola diventano

$$\left.\begin{array}{l} y^2 = 2ax + x^2 \\ y^2 = x^2 - a^2 \end{array}\right\} \ldots\ldots (4),$$

e questa curva prende il nome d'iperbola eqnilatera.

L'iperbola equilatera è, rapporto a qualnnque altra iperbola, ciò che è il circolo rapporto all'ellisse.

11. Risolvendo l'equazione al centro dell'iperbola eqnilatera rapporto ad x si ottiene

$$x = \pm\sqrt{a^2 + y^2},$$

espressione dalla quale resulta nna costruzione, per punti, estremamente semplice, di qnesta cnrva.

Dividiamo (*Tav.* XLII, *fig.* 1) l'asse CM delle y, in parti egnali Ca, ab, bc, cd, ec., e da ciascuno dei punti di divisione, conduciamo delle perpendicolari indefinite a quest'asse; prendiamo sopra ciascuna di queste perpendicolari nna parte eguale alla distanza dal suo piede al vertice A, cioè, facciamo $aa' = a$A, $bb' = b$A, $cc' = c$A, ec. i pnnti a', b', c', d', ec. apparterranno tutti all'iperbola equilatera. Infatti, se da uno qualunque di questi punti, g' per esempio, si abbassi la perpendicolare g'X sull'asse delle x; si avrà $g'\text{X} = \text{C}g$; ma il triangolo rettangolo CAg dà

$$\overline{\text{C}g}^2 = \overline{\text{A}g}^2 - \overline{\text{AC}}^2,$$

ovvero

$$\overline{g\text{X}}^2 = \overline{\text{CX}}^2 - \overline{\text{AC}}^2,$$

a motivo di $\text{A}g = gg' = \text{CX}$. Ora, qnest'ultima eguaglianza è la stessa cosa di

$$\overline{g'\text{X}}^2 = x^2 - a^2;$$

così g'X è nn'ordinata, e il punto g' appartiene alla carva.

12. Tutto ciò che ha rapporto al problema di condnrre delle tangenti alle curve dovendo esporsi alla parola *Tangente*, in questo punto ci contenteremo di far conoscere un processo particolare all'iperbola, la cui rassomiglianza con quello che abbiamo dato per l'ellisse (*Vedi* Ellissa) fa ancora rilevare la grande analogia delle due curve.

Sia O il punto dell'iperbola ove si tratta di condurre nna tangente (*Tav.* XLII, *fig.* 8); dai fuochi F, f conduciamo i raggi vettori FO, fO, e prendiamo sopra fO, Om eguale ad FO. Dal punto g, mezzo della retta che unisce i punti F ed m, conduciamo TO; questa retta sarà la tangente domandata. Infatti, questa retta non può avere che il solo punto O comune con la curva, poichè per qualunque altro punto o, conducendo fo, mo, Fo, non si può avere

$$f\text{o} - \text{Fo} = 2a = \text{AA}',$$

proprietà caratteristica dei raggi vettori, poichè, se ciò fosse, si avrebbe, dalla costruzione

$$f\text{o} - \text{o}m = f\text{o} - \text{Fo} = 2a = fm,$$

donde $f\text{o} = \text{o}m + fm$, il che è assurdo. Qualunque altro punto differente da O,

preso sopra la retta TO, non può perciò appartenere alla curva e, per conseguenza, questa retta è tangente in O.

La precedente costruzione c'insegna immediatamente che *gli angoli formati dalla tangente e i due raggi vettori condotti al punto di contatto sono eguali.* Poichè il triangolo mOF essendo isoscele e TO passando pel mezzo della sua base mF, gli angoli fOT e TOF sono eguali. Proprietà comune coll'ellisse.

13. Si chiamano *iperbole coniugate* due iperbole come quelle della *fig.* 7, *Tav.* XLI, le quali hanno il medesimo centro, e di cui l'una ha per primo asse il second'asse dell'altra. Le due curve avendo necessariamente i medesimi asintoti, poichè queste rette son date per l'una e per l'altra delle diagonali dello stesso rettangolo ACBD (*Vedi* di sopra n.° 5), ne resulta che i loro rami prolungati non s'incontrano che all'infinito, poichè non è che all'infinito che esse giungono ad avere i loro asintoti comuni.

14. Tutte le rette le quali, passando pel centro, incontrano i due rami di un'iperbola si chiamano i suoi *diametri.* Abbiamo veduto n.° 4, che il centro gli divide in due parti egnali.

Quando due diametri, di cui l'uno appartiene ad un'iperbola qualunque, e l'altro alla sua coniugata, sono tali che il primo è paralello alla tangente condotta da uno dei punti ove il secondo incontra la sua curva, essi prendono il nome di *diametri coniugati.* I due assi formano un sistema di diametri coniugati.

Se si prendono due diametri coniugati per assi della coordinate, le coordinate diventano oblique, ma l'equazioni non cangiano di forma (*Vedi* Trasformazione) e possiamo riconoscere facilmente le segnenti proprietà, che dobbiamo contentarci di enunciare. 1.° *Un diametro qualunque divide in due parti eguali tutte le corde condotte paralellamente al suo coniugato.* 2.° *Il paralellogrammo costruito tra due diametri coniugati è equivalente al rettangolo dei due assi principali.* Questo paralellogrammo e questo rettangolo si dicono *inscritti* all'iperbola. 3.° *La differenza dei quadrati dei due diametri coniugati è eguale alla differenza dei quadrati degli assi*

Resulta da quest'ultima proprietà che nell'iperbola equilatera due diametri coniugati qualunque sono eguali.

15. Da quello che precede si vede che tutte le proprietà dell'ellisse si ritrovano nell'iperbola, eccettnato leggiere modificazioni tra alcune di esse; ciò non ostante ne esistono delle particolari a quest'ultima curva che debbonsi indicare; esse sono relative agli asintoti.

Per ottenere l'equazione dell'iperbola riportata ai suoi asintoti basta trasformare le coordinate rettaugolari dell'equazione

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}\left(x^2 - a^2\right),$$

in coordinate oblique con i processi conosciuti. Sostituiamo dunque invece di x e di y i valori generali (*Vedi* Trasformazione)

$$x = x \cos \alpha + y \cos \alpha',$$

$$y = x \operatorname{sen} \alpha + y \operatorname{sen} \alpha'.$$

Otterremo, dopo le riduzioni,

$$\left.\begin{array}{r}(a^2 \operatorname{sen}^2 \alpha' - b^2 \cos^2 \alpha')\, y^2 \\ +\,(2a^2 \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \alpha' - 2b^2 \cos \alpha \cos \alpha')\, xy \\ +\,(a^2 \operatorname{sen}^2 \alpha - b^2 \cos^2 \alpha)\, x^2\end{array}\right\} = -a^2 b^2 \; \ldots\ldots (a).$$

Ma gli angoli α, α' essendo in questo caso gli angoli che fanno gli asintoti col primo asse, abbiamo (*Vedi* sopra, n.° 5)

$$\tang \alpha = -\frac{b}{a}, \quad \tang \alpha' = \frac{b}{a},$$

donde

$$\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \sen \alpha = -\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

$$\cos \alpha' = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \sen \alpha' = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

abbiamo dunque ancora

$$a^2 \sen^2 \alpha' - b^2 \cos^2 \alpha' = \frac{a^2b^2 - a^2b^2}{a^2+b^2} = 0,$$

$$a^2 \sen^2 \alpha - b^2 \cos^2 \alpha = \frac{a^2b^2 - a^2b^2}{a^2+b^2} = 0,$$

$$2a^2 \sen \alpha \sen \alpha' - 2b^2 \cos \alpha \cos \alpha' = -\frac{4a^2b^2}{a^2+b^2}.$$

L' equazione generale (a) diventa dunque, sostituendo questi valori

$$xy = \frac{a^2+b^2}{4}.$$

Tale è l' equaziona dell' iperbola riportata ai suoi asintoti. Essa c' insegna che il rettangolo formato tra le coordinate è una quantità costante; questa quantità, $\frac{a^2+b^2}{4}$, che indicheremo con c^2, si chiama *potenza* dell' iperbola.

16. Se moltiplichiamo i due termini dell' equazione

$$xy = c^2,$$

per il seno dell' angolo che gli asintoti fanno tra loro, quest' angolo essendo indicato con μ, avremo

$$xy \sen \mu = c^2 \sen \mu.$$

Ora, il secondo membro di quest' equazione è ancora una quantità costante e il primo iodica il parallelogrammo costruito sopra le coordinate, dunque *tutti i parallelogrammi costruiti sopra coordinate parallele agli asintoti sono equivalenti tra loro.* Con facilità si riconosce che $c^2 \sen \mu = \frac{ab}{2}$, ovvero, che questa qoantità è la metà del rettangolo costroito sopra i semi-assi.

17. Il prodotto xy esseodo uoa quantità costante, ne resulta che l' ordinata y diminuisce a misura che x aomenta, ma che ciò non ostante essa non può mai diventare nulla; così l' asintoto si avvicina continoamente alla curva senza potere incontrarla. Questo è ciò che l' espressioni del n.° 5 ci avevano di già indicato, facendoci conoscere che queste linee non s' incontrano che all' *infinito*.

18. Nell' iperbola equilatera $a = b$, e per conseguenza

$$\tang \alpha = \frac{b}{a} = 1,$$

l' angolo α è perciò di 45° e l' angolo μ che è il doppio è un angolo retto. Si ha dunque allora semplicemente

$$xy = 2a^2,$$

e le coordinate sono rettangolari.

19. Combinando l' equazioni della tangente e della secante (*Vedi* Questa parole) con l' equazione

$$xy = c^2$$

si scuoprono le seguenti proprietà che ci contenteremo d' indicare:

La porzione di una tangente compresa tra gli asintoti è divisa in due parti eguali al punto di contatto.

Questa porzione di tangente è sempre eguale al diametro coniugato di quello che passa pel punto di contatto.

Tutti i parallellogrammi inseritti all' iperbola hanno i loro vertici situati sopra gli asintoti.

Le due parti di una secante compresa tra la curva e gli asintoti sono eguali tra loro.

20. L' ultima di queste proprietà offre un mezzo facile di descrivere un'iperbola di cui si conosce un solo punto.

Sia m il punto dato (*Tav.* XLII *fig.* 5) che si potrà sempre ottenere col processo del n.° 7; avendo costruito gli asintoti (n.° 5), si condurrà per il punto m delle rette in tutte le direzioni possibili e a partire dai punti a, b, C, d, ove queste rette incontrano l' asintoto AC, si prenderanno dalle parti an, bn', Cn'', ec., eguali alle distanze $a'm$, $b'm$, $c'm$, ec., dal punto m a quelli ove le medesime rette incontrano l' altro asintoto Aa'; i punti n, n', n'', ec. apparterranno alla curva. Ciascuno di questi punti può inseguito servire nella medesima maniera per determinarne altri.

21. Vedremo, alla parola Quadratura, altre proprietà osservabilissime sopra gli asintoti, come ancora tutto quello che comprende la superficie dell'iperbola. Vi sarà ancora questiona di questa curva in altri articoli. *Vedi* Tangente e Rettificazione. *Vedi* ancora Polare per l' *equazione polare* dell' iperbola.

Iperbola *degli ordini superiori*. Si dà questo nome a tutte le curve che sono rappresentate dall' equazione $Ay^{m+n} = B(a+x)^m x^n$. Quest' equazione generale contiene, come caso particolare, l' equazione $Ay^2 = B(ax+x^2)$, dell' iperbola conica o *apolloniana*. (*Vedi* Questa parola).

Si chiamano ancora *iperbole*, le curve la cui equazione, riportata ai loro asintoti, è della forma $x^m y^n = c^{m+n}$, la quale contiene ancora, come caso particolare, l' equazione agli asintoti, $xy = c^2$, dell' iperbola conica.

Logaritmi Iperbolici. (*Vedi* Logaritmo).

Seni Iperbolici. (*Vedi* Seno)

IPERBOLOIDE ovvero Conoide Iperbolica. (*Geom.*) Solido formato dalla rivoluzione di un ramo d' iperbola intorno del suo primo asse;

Per ottenere il volume dall' iperboloide basta sostituire nella formula generale

$$V = \int \pi y^2 dx$$

(*Vedi* Cubatura), l' ordinata y mediante il suo valore preso dall' equaziono della curva generatrice. Ora, contando le ordinate dal vertice, quest' equazione essendo $y^2 = \frac{b^2}{a^2}\left(2ax+x^2\right)$, (*Vedi* Iperbola), avremo

$$V = \pi \frac{b^2}{a^2}\int\left(2ax+x^2\right)dx,$$

il cui integrale è

$$V=\frac{\pi b^2x^2}{a}+\frac{\pi b^2x^3}{3a^2}.$$

Non vi è bisogno di aggiungere costante, perchè facendo $x=o$ il solido si annulla.

Così indicando con h l'altezza del solido ovvero facendo $x=h$ si ha, per l'espressione del volume dell' iperboloide,

$$V=\frac{\pi b^2h^2}{a}+\frac{\pi b^2h^3}{3a^2}.$$

Nel caso dell' *iperbola equilatera*, ovvero quando $a=b$, quest' espressione divente

$$V=\frac{\pi h^2}{3}\left(3a+h\right),$$

donde si vede che esiste sempre un rapporto commensurabile tra l' iperboloide equilatera e la sfera il cui raggio è eguale alla sua altezza h. Infatti, il volume della sfera che ha h per raggio è (*Vedi* SFERA)

$$V'=\frac{4\pi h^3}{3},$$

così

$$\frac{V}{V'}=\frac{3a+h}{4h}.$$

Questo rapporto prova che se $h=a$, cioè, che se l' altezza dell' iperboloide equilatera è eguale alla metà dell' asse traverso dell' iperbola generatrice, il volume di questo solido è equivalente a quello della sfera che ha quest' asse per diametro.

Vedremo alla parola QUADRATURA, come si determina la superficie dei solidi di rivoluzione.

IPOMOCLIO (*Mecc.*). Viene così talvolta chiamato il punto che sostiene la leva, e sul quale essa fa il suo sforzo sia che si alzi sia che si abbassi. Più comunemente vien detto *punto d' appoggio*.

IPOTENUSA (*Geom.*) (da ὑπο *sotto* e da τιθημι *io pongo*). Nome col quale s' indica il lato di un triangolo rettangolo opposto all' angolo retto. (*Vedi* TRIANGOLO.) L' ipotenusa gode di una proprietà molto osservabile la cui scoperta si deve a Pitagora, ed è che *il quadrato costruito sopra questo lato è equivalente alla somma dei quadrati costruito sopra i due altri lati*. Questa proprietà si chiama il *Teorema di Pitagora*.

IPOTESI. Proposizione o parte di proposizione che si pone come base, o come punto di partenza, per dedurne delle conseguenze relative ad un oggetto in questione. Per esempio, nella proposizione: *Due triangoli che hanno respettivamente i loro tre angoli eguali sono simili*; l' ipotesi da cui ci partiamo è quest' eguaglianza dagli angoli che in seguito serve a riconoscere la seconda parte della proposizione, cioè, la similitudine in questione dei due triangoli.

IPPARCO di Nicea in Bitinia, il più grande astronomo dell' antichità, viveva nel secondo secolo avanti l' era cristiana. I suoi immensi lavori segnano nella storia della scienza un' epoca affatto nuova, e che già abbiamo sufficientemente caratterizzata in un altro articolo di questo Dizionario (*Vedi* SCUOLA D' ALESSANDRIA).

Noi aggiungeremo soltanto che quando ebbe riconosciuto i deboli fondamenti delle teorie adottate al suo tempo, ed ebbe risoluto di rifare in intero tutto il lavoro de' suoi predecessori, portando nelle sue osservazioni una precisione fino allora sconosciuta, fu costretto a confrontarle soltanto con quelle dei primi astronomi di Alessandria, rigettando come incerte ed inesatte quelle antiche osservazioni tanto vantate degli Egiziani e dei Caldei. Eppure sopra queste cognizioni, rifiutate da Ipparco due secoli prima di Gesù Cristo, si è voluto ai dì nostri appoggiare la prova di una pretesa civiltà che porrebbe l'infanzia del mondo in un passato sconosciuto!

Ipparco fu il primo a fare l'osservazione fondamentale della precessione degli equinozj: primo si accorse egli come pareva che tutte le stelle avessero un movimento paralello all' ecclittica: se ne fece anzi un' idea più esatta che i suoi successori, perchè non alle stelle attribuiva un siffatto movimento, ma all'equinozio da cui si contano tutte le longitudini. Aveva esposta tale dottrina in un' opera che è perduta e che era intitolata: *Della retrogradazione dei punti equinoziali*. Onde determinare la quantità di tale movimento, non aveva che le osservazioni di Timocari e di Aristillo cui potesse confrontare con quelle fatte da lui. Ma tali osservazioni erano tuttavia troppo poco precise, e l'intervallo che le separava troppo breve, per potere sperare una certa esattezza; perciò, amante della verità, Ipparco non osò determinare la quantità precisa della precessione, che oggi si sa essere di 50 secondi per anno, e si limitò ad affermare che essa non era inferiore a 36 secondi.

Una scoperta tanto importante avrebbe bastato per immortalarne l'autore; ma egli ha ben altri titoli alla nostra ammirazione. Ei fu il vero fondatore dell' astronomia matematica. Prima di lui, l' arte di osservare era nell' infanzia; l'arte del calcolo non era nata. Euclide, Archimede ed Apollonio ignoravano i principj i più elementari della trigonometria. Ipparco fece un' opera in dodici libri in cui espose la maniera di costruire la tavola delle corde senza le quali ogni calcolo trigonometrico diviene impossibile. Noi abbiamo la prova che Ipparco ha eseguito operazioni lunghissime e complicatissime, che suppongono la trigonometria rettilinea tutta intera. Nel suo *Comento* sopra Arato dà la soluzione di un problema di astronomia che esige una trigonometria sferica assai compiuta, e soggiunge che ne ha dimostrati geometricamente i principj nella sua opera *Del levare e del tramontare delle stelle*. Tutte le sue regole ci sono state conservate da Tolomeo che rifà questi stessi calcoli secondo i metodi d'Ipparco.

Egli è altresì l' inventore della projezione che i moderni chiamano *stereografica*, cioè dell' arte che insegna a rappresentare, per mezzo di circoli e sopra un piano, tutti i circoli della sfera, e di cui ci serviamo anche al presente per disegnare i nostri mappamondi e le nostre grandi carte geografiche. Questa rappresentazione della sfera gli serviva a determinare l' ora della notte mediante l' osservazione di qualche bella stella, e a risolvere in generale senza calcolo tutti i problemi dell'astronomia sferica. Quantunque egli avesse delle regole esatte e geometriche per tutti i calcoli di questo genere, le operazioni da farsi erano di una eccessiva lunghezza, e l' invenzione di ogni metodo meccanico che le abbreviasse era un vero progresso della scienza. La scoperta moderna dei logaritmi ha però soddisfatto a un tempo stesso alla esattezza e alla brevità dei calcoli.

Ipparco fu pure il primo a riconoscere e a dare i mezzi di determinare l'ineguaglianza dei movimenti del sole, o ciò che dicesi l'eccentricità apparente dell' orbita solare e il luogo del suo apogeo. S' ei fece questa eccentricità un poco troppo grande, non ne dobbiamo accusare che la poca precisione delle osservazioni di cui fu costretto a fare uso. Egli stesso ha osservato che una di queste

osservazioni, quella del solstizio, può essere erronea di un quarto di giorno; e tanto basta per spiegare l'errore da lui commesso, che non fu rettificato che mille anni dopo dagli Arabi. Sono pure a lui dovute le prime tavole del sole e della luna. Per mezzo di tre ecclissi, scelti in circostanze favorevoli, seppe determinare l'eccentricità dell'orbita lunare con una precisione alla quale quasi nulla si è aggiunto in seguito. Ha dato le regole del calcolo degli ecclissi solari e lunari. Ha determinato con una precisione notabile pel suo tempo la distanza della luna dalla terra, o, ciò che è lo stesso, la sua parallasse. Quella del sole è troppo piccola perchè potesse determinarsi cogli strumenti che allora si avevano; ed ei riconobbe che poteva farsi piccola quanto si voleva, o affatto insensibile. Ma, per non allontanarsi da alcune idee ricevute al suo tempo, si contentò di farla diciannove volte più piccola della parallasse lunare, perchè Aristarco credeva di aver dimostrato che la distanza dal sole alla terra era circa diciannove volte più grande di quella della luna. Quest'errore sussisteva ancora al tempo di Copernico, di Ticone, ed anco di Keplero. Quest'ultimo è il solo che manifesti qualche dubbio su tale proposito, e si esprime presso a poco negli stessi termini d'Ipparco.

Questo padre dell'astronomia aveva altresì osservato che l'eccentricità della luna, indicata dagli ecclissi, diveniva insufficiente specialmente nelle quadrature, quando la luna è dicotoma, cioè mezza oscura e mezza illuminata. Egli aveva intrapresa una lunga serie di osservazioni nelle diverse posizioni della luna per cercare di scoprire le inegnaglianze del suo corso; ma queste ineguaglianze erano troppo numerose, ed ei non potè riconoscerne la legge. Tolomeo, più ardito o meno scrupoloso, stabilì la sua teoria sopra tre osservazioni d'Ipparco, e determinò, con felicità rara, la principale di queste ineguaglianze, o il doppio di ciò che dicesi oggi l'*evezione*. Ipparco aveva determinato ancora le rivoluzioni e i movimenti medj dei pianeti; ma non trovando nelle osservazioni de' suoi predecessori ciò che sarebbe stato necessario per stabilire una teoria compiuta di tutti i movimenti, o è per costruirne delle tavole, si applicò almeno ad osservarli nelle circostanze le più convenienti per facilitare questa ricerca agli astronomi che sarebbero venuti dopo di lui, e indicò i mezzi che potevano soli condurre alla soluzione del problema. Tolomeo raccolse anco questo retaggio, seguì la via additatagli da Ipparco, e calcolò le prime tavole dei cinque pianeti Soltanto fa maraviglia come egli non impieghi niuna di quelle numerose osservazioni che egli stesso racconta che Ipparco aveva fatte e disposte in un ordine metodico: egli non si serve che delle proprie osservazioni, e non ce ne trasmette che il numero strettamente necessario per fondare le sue teorie.

Da un passo di Plinio pare che possa rilevarsi che Ipparco, dopo aver costruito le tavole del sole e della luna e trovato il suo metodo degli ecclissi, scrivesse pure delle effemeridi di tali movimenti e di tali ecclissi per secento anni; il che non sarebbe improbabile, dacchè sappiamo da Teone che gli astronomi greci del suo tempo facevano degli almanacchi in cui indicavano per ciascun giorno le posizioni del sole, della luna, dei pianeti, gli ecclissi, ec. Lo stesso Plinio, che non parla dei lavori di Ipparco che col più grande entusiasmo, ci dice che questo grande astronomo scoperse una stella la quale si era formata al suo tempo, e che sospettando che se ne potessero sovente formare di simili si accinse a fare una descrizione generale delle stelle, e che a tale oggetto inventò degli strumenti per determinarne le posizioni e le grandezze e per poter sempre riconoscere se le stelle nascono e muoiono, se crescano e scemino. Ma Plinio non ci fa sapere se tale stella, nata al tempo d'Ipparco, rimanesse nel cielo o si estinguesse poco tempo dopo. La cosa è possibile e noi ne abbiamo due esempj celebri nelle stelle di Cassiopea e del Serpentario, le quali furono descritte da Ticone e da Keplero.

ed ebbero un' esistenza tanto brillante quanto passeggera. Tolomeo nun ne fa cenno ninno nemmeno nel capitolo in eui ei trasmette gli allineamenti osservati da Ipparco colla mira di provare che le posizioni delle stelle fra loro sono invariabili: era quello il luogo di dirci che se esse occupavano costantemente i medesimi siti nel cielo, il numero non n'era assolutamente determinato, e che ne apparivano talvolta delle nuove, le quali non risplendevano che per un tempo assai breve. Noi ignoriamo onninamente ove Plinio abbia attinto tale particolarità; e, supponendola vera, ne dobbiamo concludere che la stella d' Ipparco è scomparsa come quelle di Ticone e di Keplero. Infatti ella doveva essere brillantissima per attrarre l'attenzione in un tempo in cui non v'era nessuna descrizione del cielo, mentre d'altronde nel catalogo di Tolomeo, che altro non è che quello d' Ipparco, non si vede nessuna stella brillante che non fosse conosciuta anticamente, giacchè non è data per nuova. Parlando di alcuni cambiamenti fatti da Ipparco nelle costellazioni antiche, Tolomeo non avrebbe mancato d' indicarci la stella che gli fu occasione ad intraprendere un' opera così importante e così nuova. Tale lavoro era soprattutto divenuto necessario dopo la scoperta della retrogradazione dei punti equinoziali. Per siffatto moto le stelle si avvicinavano o si allontanavano dai poli del moto diurno, i fenomeni del levare e del tramonto, delle apparizioni e delle sparizioni delle stelle, cangiavano continuamente: un globo celeste disegnato per un' epoca cessava di essere esatto in meno di cento anni. Non vi era ninna regola diretta o abbastanza sicura per calcolare tali mutamenti; ma le stelle conservavano sempre la medesima posizione relativamente all' eclittica. Ne resultava la necessità di cangiar di sistema. Invece di osservare le ascensioni rette e le declinazioni, come si era fatto fino allora, e per risparmiarsi dei calcoli immensi, Ipparco osservò direttamente le longitudini e le latitudini: era di fatto questo il solo mezzo di fare un' opera durevole e comoda. A nuove osservazioni si richiedevano istrumenti nuovi, ed Ipparco immaginò l' astrolabio per riferire le posizioni delle stelle all'eclittica. Si hanno ancora delle osservazioni fatte da Ipparco con questo stromento, di cui non si trova menzione prima di lui e che fu poi imitato da' suoi successori.

Delle tante opere d' Ipparco non ci resta che il suo comento sul poema di Arato, che è la meno importante di tutte: è una produzione de' suoi primi anni, o almeno di un tempo in cui non aveva ancora cangiato il suo modo di osservare, perchè ignorava il movimento dell' equatore e dei punti equinoziali. Arato era già stato più di una volta comentato, ma da scrittori che per la maggior parte non erano nè geometri nè astronomi. Ipparco, vedendo che le sue osservazioni non si accordavano nè coi versi del poeta nè colle note degli scoliasti, credè utile di rilevare gli errori degli uni e delle altre. Ma in tale critica, ebbenchè abbiano voluto dirne alcuni, non si allontanò mai dalla urbanità e dalla moderazione. Egli protesta fin da principio che non ha la debolezza di cercare di convincere gli altri di errori che possano aver commesso, ma che ha in mira soltanto l' interesse della scienza e quello della verità. Ci fa sapere che Arato non aveva fatto che porre in versi due opere di Eudosso e che perciò non può esser fatto responsabile degli errori della sua guida. Sovente difende Arato ed Eudosso contro i loro critici; e quando hanno ragione impiega a dimostrare la loro esattezza la stessa cura che pone a provare i loro errori quando si sono ingannati.

Dopo aver creato la vera astronomia, Ipparco diede la prima idea di un sistema esatto e compiuto di geografia. Dimostrò che non potevano determinarsi le posizioni respettive delle città, delle provincie, dei regni e dei loro limiti, che dividendo il globo della terra in circoli simili e corrispondenti a quelli della sfera celeste, che per mezzo delle distanze dal polo o dall' equatore, e per le differenze dei meridiani. Si avevano di già delle idee confuse di queste divisioni.

Pitea si era servito dello gnomone per determinare l'altezza del polo nei diversi luoghi che aveva visitato; ma lo gnomone dava tutte le latitudini troppo piccole di un quarto di grado: per averle più esatte, bisognava fare uso dei circoli che servono in astronomia per misurare le declinazioni delle stelle. Si era per verità osservato che gli ecclissi della luna non accadono percisamente alle medesime ore a Babilonia, in Grecia o in Egitto; ma non si aveva mezzo nessuno per misurare tali differenze. La trigonometria d'Ipparco somministrò metodi più sicuri per determinare l'ora nei luoghi diversi ove fosse osservato lo stesso ecclisse. Le sue tavole della luna e del sole potevano supplire all'osservazione che non si fosse potuta fare in un luogo conosciuto. Un viaggiatore che avesse riferito un ecclissi di luna ed un'altezza meridiana del sole con un'altezza di un astro nell'istante della massima oscurazione, poteva consegnare questi elementi ad un astronomo che ne avrebbe dedotta la vera posizione del luego dell'osservazione; ed è appunto per tal via che la geografia doveva acquistare col tempo qualche certezza. Tali mezzi per vero dire erano assai lungi da quella precisione che hanno acquistato dopo l'invenzione dei canocchiali e degli orologi, ma erano i più esatti o piuttosto i soli che allora si possedessero.

Il *Comento* d'Ipparco sopra Arato comparve in greco colla traduzione latina di Ilderico a Firenze presso i Giunti nel 1567 in-fol.; e fu ristampato da Petavio nel suo *Uranologion*, nel 1630 e 1705. I titoli delle sue opere perdute sono: *Descrizione del cielo stellato*; *Della grandezza e della distanza del sole e della luna*; *Delle ascensioni dei dodici segni*; *Del movimento della luna in latitudine*; *Del mese lunare*; *Della lunghezza dell'anno*; *Della retrogradazione dei punti equinoziali e solstiziali*; *Critica della geografia di Eratostene* (Plinio ne parla con molta stima); *Rappresentazione della sfera sopra un piano* (Si può dubitare che il *Planisfero* di Tolomeo non ne sia che una copia o una nuova edizione); *Tavole delle corde del circolo in dodici libri*; *Trattato del levare e del tramontare delle stelle*. In quest' ultima opera, Ipparco aveva dimostrato i suoi principj di trigonometria sferica, scienza allora interamente nuova e senza la quale non può esservi vera astronomia.

IPPOCRATE di Chio, uno dei più antichi geometri i di cui lavori facciano epoca nella storia della scienza. Nella sua gioventù erasi dedicato al commercio; ma disgustato di tale professione per alcune traversie incontratevi, si diede allo studio delle matematiche. I suoi progressi furono rapidi, e in breve tempo fu in grado di dare pubbliche lezioni. Questo geometra, che fioriva nel quinto secolo avanti l'era cristiana, si è particolarmente reso celebre per la scoperta della quadratura delle *lunule*, che portano tuttora il suo nome (*Vedi* LUNULE). Tale primo passo gli fece sperare di trovare la quadratura del circolo medesimo; ed ei ne dimostrava la possibilità con argomenti molto speciosi. Si distinse pure tra i geometri dell'antichità che si occuparono nel problema della duplicazione del cubo, e fu il primo a dimostrare che la soluzione di tale famoso problema dipendeva dall'invenzione di due medie proporzionali tra due linee date. G. Fil. Heine, accademico di Berlino, sostenne sull'appoggio di un passo di Proclo che la scoperta della quadratura delle lunule doveva essere attribuita ad Enopide di Chio, se *Enopide* (parola che significa *mercante di vino*) non era un soprannome di Ippocrate; ma Castilhon confutò una tale opinione, provando che Enopide era anteriore ad Ippocrate, e che vi era un'alterazione nel passo in cui Proclo attribuisce la medesima invenzione ai prefati due geometri. Ippocrate aveva scritto un trattato elementare di geometria, che quello di Euclide ha fatto però cadere nell'oblio. Le scoperte di questo geometra si trovano esaminate con molta esattezza da Montucla nella sua *Storia delle matematiche*, Tom. I, pag. 152 e segg.

IPSICLE d'Alessandria viveva sotto Tolomeo Fiscone, verso l'anno 146 avanti l'era cristiana. Egli scrisse i libri 14° e 15°, cui pose in seguito agli *Elementi* di Euclide. Le opinioni dei dotti non sono molti unanimi su tale punto, ma nessuno gli contende un breve trattato cui denominò *Anaforico* o delle *Ascensioni*. Egli v' insegna un metodo assai inesatto per calcolare in quanto tempo si levi ciascun segno o ciascuna porzione dell' eclittica. L' autore era presso che contemporaneo d' Ipparco, che il primo diede la soluzione esatta di questo problema. Egli potè ignorare le scoperte d' Ipparco, e tale circostanza lo scusa; ma ciò che non si sa comprendere è che il suo *Anaforico* sia stato inserito nella raccolta detta *Il Piccolo Astronomo*, in una raccolta cioè di alcuni brevi trattati che s' insegnavano nella scuola di Alessandria, onde preparare i giovani alla lettura dell' *Astronomia* di Tolomeo. Era per lo meno inutile il mostrare agli allievi una soluzione viziosa di un problema sommamente facile, che si doveva poi trovare sciolto rigorosamente nel libro di Tolomeo.

IRIDE (*Ott.*). *Vedi* Arcobaleno.

IRRADIAZIONE (*Ott.*). Espansione o allargamento di luce che circonda gli astri, e che gli fa comparire più grandi di quello che sono. L' effetto di questa irradiazione è talvolta tanto grande, che Ticone Brabé stimava il diametro di Venere dodici volte più grande di quel che sembra nei canocchiali, e Keplero lo stimava setta volte maggiore. Dopo l' invenzione dei canocchiali, e soprattutto dopo l' invenzione del micrometro di Huygens, si hanno sulla grandezza apparente degli astri nozioni assai più esatte. I canocchiali presentando all' occhio gli oggetti meglio limitati diminuiscono considerabilmente la quantità dell' irradiazione.

IRRAZIONALE. (*Alg.*) Si chiamano *numeri irrazionali*, i numeri generati dal secondo ramo dell' algoritmo delle potenze $\sqrt[B]{C}=A$ (*Vedi* Algebra n° 28), quando questi numeri sono incommensurabili coll' unità (*Vedi* Incommensurabile.) *Vedi* Radice.

IRREGOLARE. (*Geom.*) I solidi *irregolari* sono quelli che non sono terminati da superficie eguali e simili. (*Vedi* Solidi.) Si chiamano ancora *Figure irregolari* quelle i cui angoli e lati non sono respettivamente eguali tra loro. (*Vedi* Poligono).

IRRIDUCIBILE. (*Alg.*) *Vedi* Caso irriducibile.

ISOCRONO (*Mecc. e Geom.*). Epiteto che deriva dalle voci greche ισος *eguale* e χρονος *tempo*, e che si dà a tutto ciò che si effettua in tempi eguali. Per esempio, le vibrazioni di un pendolo sono *isocrone*, se questo pendolo si conserva sempre della stessa lunghezza e se descrive sempre archi eguali, perchè allora le sue vibrazioni si effettuano tutte in tempi eguali. Se le vibrazioni si facessero nella cicloide, tali vibrazioni continuerebbero ad essere eguali ancorchè il pendolo descrivesse ora degli archi piccoli, ora degli archi grandi. *Vedi* Pendolo e Tautocrona.

Si dice *linea isocrona* quella per la quale un corpo discende senza accelerazione, in modo cioè che in tempi eguali si avvicini sempre di una eguale distanza all' orizzonte; mentre quando cade in linea retta, in forza del proprio peso, percorre, per esempio, 15 piedi nel primo secondo, 45 nel secondo ec., talchè in tempi eguali non percorre porzioni eguali della linea verticale. La linea isocrona si dice ancora di *linea di equabile accesso*. *Vedi* Accesso.

ISOMERIA (*Alg.*) Termine impiegato un tempo per indicare l' operazione con la quale si libera un' equazione dalle frazioni che si trovano nei suoi termini. (*Vedi* Trasformazione).

ISOPERIMETRO. (*Geom.*) Si chiamano *figure isoperimetre* quelle i cui contorni o perimetri sono eguali.

Di tutte le figure isoperimetre regolari la più grande è quella che ha il più gran numero di lati o di angoli. Ed è questo il motivo perchè il circolo, che può considerarsi come un poligono regolare di un numero infinito di lati, ha un' area maggiore di quella di tutte le altre figure che hanno un contorno eguale al suo. Per la medesima ragione la sfera ha un volume maggiore di quello di tutti gli altri solidi che hanno una superficie eguale alla sua.

Se alcune figure isoperimetre hanno un medesimo numero di lati, la maggiore in superficie è quella di cui tutti gli angoli sono eguali. Consideriamo per esempio un rettangolo il cui perimetro è a, se indichiamo con x la sua altezza, la sua base sarà $\frac{1}{2}a-x$ e la sua area sarà espressa con $\left(\frac{1}{2}a-x\right)x$, (*Vedi* Area). Quest' area variando di grandezza mediante quella di x, troveremo il suo maximum eguagliando a zero la differenziale di $\left(\frac{1}{2}a-x\right)x$ (*Vedi Maxima*).

Ora

$$d\left[\frac{1}{2}ax-x^2\right]=\frac{1}{2}adx-2xdx,$$

donde

$$\frac{1}{2}a-2x=0, \quad e \quad x=\frac{1}{2}a.$$

Ma il rettangolo la cui altezza è eguale al quarto del suo perimetro è un quadrato, così di tutti i rettangoli isoperimetri il quadrato è il maggiore.

La teoria delle figure isoperimetre, trattata in primo luogo da Giacomo Bernoulli, fu l' oggetto di una grande discussione, tra esso e il suo fratello Giovanni, di cui si troveranno le particolarità agli articoli biografici di questi illustri geometri. Questa teoria, sviluppata inseguito dall' Eulero in molte memorie inserite tra quelle dell' *Accademia di S.*[t] *Pietroburgo* e soprattutto nella sua bell' opera intitolata *Methodus inveniendi lineas curvas* ec., è stata la causa della scoperta del *Calcolo delle Variazioni*. *Vedi* Variazione.

ISOSCELE. (*Geom.*) Un triangolo prende il nome di *isoscele*, quando due dei suoi lati sono eguali.

in qualunque triangolo isoscele ABD, (*Tav.* CLVI, *fig.* 1) gli angoli B e D, opposti ai lati eguali, sono eguali, e la perpendicolare AC, abbassata dal vertice A sulla base BD, divide questa base in due parti eguali, come pure l' angolo al vertice A.

Jacquier fu richiamato a Roma per coprire la cattedra di matematiche nel Collegio Romano. Tale dotto religioso, non meno stimabile per le sue virtù che per le sue cognizioni, morì a Roma il 3 Luglio 1788: egli era membro delle Accademie di Parigi, di Pietroburgo, di Berlino, della Società Reale di Londra, dell'Istituto di Bologna e di molte altre Società d'Italia. Le opere sue principali sono: I *Isaaci Newtoni philosophiae naturalis Principia mathematica, perpetuis commentariis illustrata communi studio pp. Th. Leseur et Fr. Jacquier*, 1739-40-42, 4 parti in tre tomi in-4; il libro fu stampato a Ginevra per cura del professore G. L. Calandrini, che l'arricchì di alcune note contrassegnate con un asterisco, e l'accrebbe di diverse memorie. L'opera de' pp. Leseur e Jacquier pubblicata venne di nuovo a Praga nel 1780 con nuovi comenti di G. Tessaneck; II *Parere e Riflessioni sopra i danni della cupola di S. Pietro*, Roma, 1743, in-4; III *Elementi di prospettiva secondo i principj di Taylor*, Roma, 1755, in-8: « Libro stimato, dice Montucla, e che appaga del pari il dotto geometra e » il geometra mediocre »; IV *De vetere quodam solari horologio nuper invento Epistola*, nell' *Antiquorum monumentorum Sylloge* di G. E. Martini, Lipsia, 1783, in-8, pag. 93-110, con fig.; V *Élémens de calcul intégral*, Parma, 1768, 2 vol. in-4. Opera stimata e la più compiuta che fosse ancora venuta in luce su tale materia. VI *Trattato intorno alla sfera*, ivi, 1755, fatto per servire d'introduzione ad una traduzione italiana della geografia di Buffier, cui arricchì pure di una *Geografia sacra*. Il p. Jacquier ha lasciato ancora un gran numero di memorie, dissertazioni, opuscoli sopra diversi argomenti.

JANTET (Antonio Francesco Saverio), matematico francese, nato nel 1747 a Biefdu-Fourg, nelle montagne del Jura, si rese oltremodo distinto nell'arringo dell'insegnamento, il che è attestato pure dal numero prodigioso di eccellenti allievi usciti dalla sua scuola. La sola opera che abbia stampato è un *Traité élémentaire de mécanique*, Dole, 1785, in-8, il merito della quale fa rincrescere che non ne abbia pubblicate altre. Ei morì a Besanzone nel 1805.

JEAURAT (Edmo Sebastiano), astronomo, nato a Parigi nel 1724. Applicatosi di buon'ora allo studio del disegno e delle matematiche, venne nel 1749 impiegato come ingegnere geografo nella formazione della gran carta della Francia, detta di Cassini, dal nome dell'astronomo che presedè a tale grande operazione e che più di tutti vi lavorò. Nel 1750, Jeaurat pubblicò un'opera di prospettiva intitolata: *Perspective à l'usage des artistes*, Parigi, in-4, che fu per lungo tempo utilissima, e nel 1753 ottenne l'impiego di professore di matematiche nella scuola militare. Colà avendo avuto occasione di conoscere il celebre Lalande, strinse con esso amicizia, e d'allora in poi attese unicamente allo studio dell'astronomia. Nel 1763 fu eletto insieme con Bailly a succedere all'abate La Caille nell'Accademia delle Scienze, e nel 1775 fu sostituito a Lalande per calcolare l'almanacco della *Connaissance des temps*. Ne pubblicò successivamente dodici volumi nei quali ha inserito un gran numero d'interessanti memorie, di calcoli e di tavole utilissime pei navigatori. È sua l'idea del canocchiale diplantidiano, lavorato dall'ottico Navarre, il quale avendo la proprietà di dare due immagini, l'una diretta e l'altra rovesciata, permette di osservare direttamente l'istante in cui il centro di un pianeta passa sotto un filo orario. All'epoca della fondazione dell'Istituto, Jeaurat ne fu nominato membro; dalla scuola militare era passato all'Osservatorio Reale, ove osservava ancora quando morì il 7 Marzo 1803. La maggior parte delle sue memorie si legge nella raccolta dell'Accademia delle Scienze di Parigi.

JUAN-Y-SANTACILIA (Don Giorgio), chiamato comunemente *Don Jorge Juan*, dotto matematico spagnuolo, nato nel 1712 ad Orihuela, nel regno di Valenza. Dopo aver fatto eccellenti studj nelle scienze esatte, entrò nella marineria, e si tro-

vava nel 1735 al Perù, dove i suoi talenti riuscirono utilissimi a Bouguer, la Condamine e agli altri dotti francesi che erano occupati a misurare il grado del meridiano sull'equatore. Tra le altre cose si riuscì per le sue cure a misurarsi l'altezza delle montagne per mezzo del barometro. Al suo ritorno in Spagna fu elevato successivamente a diversi impieghi, e finalmente gli venne affidata la direzione dei cantieri di costruzione. A tale ufficio ei dedicò i suoi talenti e le sue estese cognizioni, e fu unicamente per le sue cure se la marina spagnuola, decaduta affatto sotto Ferdinando VI, riacquistò il suo splendore sotto Carlo III. Colmo di onori, rispettato dai dotti ed amato dal popolo, D. Jorge Juan morì a Cadice il 21 Giugno 1774. Delle molte opere da lui pubblicate quella che gli fa più onore delle altre è intitolata: *Esame marittimo teorico-pratico*, Madrid, 1761, 2 vol. in-4. Don Gabriele Ciscar ne pubblicò a Madrid, nel 1793, il primo volume di una nuova edizione molto aumentata, la quale doveva contenere quattro volumi. Tale opera, che è un trattato compiuto della costruzione dei vascelli, venne tradotta immediatamente in inglese. Lévêque, professore d'idrografia, la tradusse in francese sulla prima edizione, per ordine del ministro della marina, e la pubblicò con note ed aggiunte a Nantes, 1785, 2 vol. in-4, sotto il seguente titolo: *Examen maritime, ou Traité de mécanique applicable à la construction et manoeuvre des vaisseaux*. » Si troveranno nell'opera di questo dotto, così » esprimevasi il suo traduttore, tutti i soccorsi che desiderare si possono per la » cognizione perfetta delle molte cose che occorrono nella costruzione e per le » mosse dei vascelli. Nessuna delle teorie insegnate finora somministrò resultati » tanto conformi all'esperienza. » D. Jorge Juan era membro della Società Reale di Londra, dell'Accademia delle Scienze di Berlino e corrispondente di quella di Parigi.

K

KAESTNER (Abramo Gotthelf), dotto matematico, professore nell' università di Gottinga, nacque a Lipsia nel 1719. Quantunque destinato in principio alla giurisprudenza, il suo gusto per le matematiche lo indusse a studiare più particolarmente queste scienze, nelle quali fece rapidi e notabili progressi. Dotato dalla natura di una facilità straordinaria ad ogni maniera di disciplina, si applicò pure con frutto alla letteratura, alla poesia e allo studio delle lingue antiche. Coltivò altresì con passione l'astronomia, e fino dal 1744 osservò sul disco del sole quella specie di macchie bianche e luminose, che Schroeter di Lilienthal vi ha poscia osservato coi telescopj i più perfezionati. Dopo avere per varj anni insegnato le matematiche a Lipsia, fu nel 1756 chiamato a Gottinga a coprirvi la cattedra di questa medesima scienza, e in tale ufizio acquistossi egli la principale sua riputazione. La chiarezza con cui insegnava attirava alle sue lezioni allievi dalle più lontane parti del settentrione; ed i numerosi libri elementari cui pubblicò su tale scienza contribuirono molto a rendere pressochè popolare in Germania lo studio delle matematiche. Il suo nome non è celebre per nessuna teoria nuova, per nessuna scoperta di prim' ordine; ma i punti sui quali il suo metodo d'istruzione ha prodotto una specie di rivoluzione in Germania sono soprattutto la teoria del binomio, quella delle equazioni di un grado superiore, e quella dell'equilibrio delle forze nelle leve. Del resto non dobbiamo occultare che le sue opere elementari, dopo aver fatto in certo modo dimenticare quelle di Wolf, sono state alla loro volta oscurate da quelle di Karsten. Tale dotto infaticabile ne' suoi lavori, dopo essere stato per quarant'anni uno dei principali ornamenti della prima università della Germania, morì più che ottuagenario il 20 Giugno 1800. L'elenco delle sue opere, memorie, dissertazioni, traduzioni, ec. occupa non meno di dodici pagine nel Dizionario bibliografico di Meusel. Noi ci contenteremo di accennare le principali. I *Prima quae post inventam typographiam prodiit Euclidis editio*, Lipsia, 1750, in-4; II *Elementi di aritmetica, di geometria, di trigonometria e di prospettiva* (in tedesco), Gottinga, 1758, in-8; ivi, 6ª ediz. 1800, in-8; III *Storia delle matematiche* (in tedesco), dalla rinnovazione delle scienze fino alla fine del secolo XVIII, Gottinga, 1796-1800, 4, vol. in-8, che fa parte della storia generale delle scienze composta dai professori di Gottinga. Tale dotta opera non è terminata; ed il quarto volume arriva soltanto alla metà del secolo XVII. Non è propriamente, nè un libro di matematiche come l'opera grande di Montucla, nè una storia tampoco come quella dell'abate Bossut, ma una storia letteraria e bibliografica delle scienze matematiche, in cui si trova non, come in Murhard, il catalogo di tutte le edizioni, ma una descrizione ragionata dei libri più rari. Questo dotto ha somministrato ancora alla raccolta delle *Memorie* dell'Accademia di Gottinga dal 1756 al 1766 non meno di quarantasette memorie sopra ogni sorta di argomenti. Si consulti l'elogio che ne ha scritto Heyne, e che si legge nel tomo XV della citata raccolta.

KEILL (Giovanni), dotto matematico, che l'accusa audace, che egli sostenne con-

tro l'illustre Leibnitz, ha reso celebre, nacque a Edimburgo nel 1671. Pubblicò fino dall'anno 1698 un *Esame della Teoria della terra* di Burnet, opera nella quale confutò pienamente e corresse gli errori di quello scrittore, ammirandone tuttavia la maravigliosa ricchezza d'immaginazione. Gli venne opposto peraltro che avesse trattato con soverchia asprezza un uomo che meritava tutto il rispetto per l'età sua e per le sue virtù. Keill aggiunto aveva al suo esame delle osservazioni sulla *Teoria della terra* di Whiston. Burnet e Whiston risposero ciascuno dal canto loro, e Keill replicò dal suo. Questa produzione, che ebbe molto successo, procurò a Keill il difficile onore del professorato all'università di Oxford, dove occupò con gran lustro, come supplente, la cattedra di filosofia naturale nel 1700. Nel corso dello stesso anno diede alla luce la sua opera principale, *Introductio ad verum physicam*, divisa in quattordici lezioni, ristampata poi nel 1705, ed aumentata di due nuove lezioni. Pochi anni dopo, la Società Reale di Londra lo chiamò nel suo seno. Nel 1709 Keill accompagnò in qualità di tesoriere i Palatini che passarono alla Nuova Inghilterra. Ritornato nel 1710, ottenne la cattedra di astronomia ad Oxford.

Keill aveva dato principio in maniera luminosa alla sua reputazione, insegnando il primo ad Oxford in lezioni particolari gli *Elementi* di Newton; e la portò al grado il più elevato assumendo in alcuni scritti la difesa del metodo delle flussioni, ed entrando in lotta coll'ingegno il più potente del suo tempo (*Vedi* LEIBNITZ). Inserito egli aveva nel 1708, nelle *Transazioni filosofiche*, uno scritto intorno alle leggi dell'attrazione ed ai suoi principj fisici, ed in seguito un altro scritto in risposta ad un passo degli *Acta eruditorum* di Lipsia, in cui si supponeva che venisse contesa a Newton l'invenzione del metodo delle *flussioni*. Tali due scritti irritarono giustamente Leibnitz, il quale volle obbligarlo a dargli soddisfazione per averlo tacciato di volersi attribuire la scoperta di detto metodo. Keill pretese di discolparsi; la Società Reale approvò la sua giustificazione, di cui mandata venne una copia a Leibnitz: questi si mostrò più irritato ancora, accusò il suo avversario di mala fede, aggiungendo che non si addiceva ad un uomo dell'età sua e della sua esperienza di venire a discussione con un uomo nuovo. Egli persuadeva la Società Reale ad imporgli silenzio; ma una giunta eletta per giudicare tale contesa sentenziò che, essendo Newton veramente l'autore delle *flussioni*, Keill non aveva potuto offendere Leibnitz, affermando tal verità; ma Leibnitz si teneva accusato che rubato avesse a Newton il calcolo delle *flussioni*, pubblicandolo col nome di calcolo delle *differenze*.

Keill fu eletto dalla regina Anna decifratore, ufficio al quale era singolarmente adatto. Giudicare si può della sua sagacità dal racconto che si fa come egli una volta decifrasse una carta scritta in isvedese, quantunque non conoscesse una parola di tal lingua. Oltre la sua *Introductio ad veram physicam*, Keill pubblicò nel 1718 l'*Introductio ad veram astronomiam*, che quindi tradusse in inglese, facendola stampare con molte aggiunte e correzioni nel 1721 col titolo d'*Introduzione alla vera astronomia, o lezioni astronomiche lette nelle scuole di Oxford*. Tale opera è stata ristampata più volte e venne tradotta in francese da Lemonnier figlio. L'autore morì nel 1721, in età di appena cinquant'anni. Di lui si ha pure un'edizione dell'*Euclide* di Commandino con addizioni e note, Oxford, 1715, a un gran numero di memorie inserite nelle *Transazioni filosofiche*, fra le quali meritano attenzione le seguenti: 1.° *Ricerche sulle leggi dell'attrazione e dei suoi principj fisici*, 2° *Risposta ad un passo degli Acta Eruditorum di Lipsia*, 3° *Ricerche sulla rarità della materia e sulla tenuità della sua composizione*. Quest'ultima fu scritta in risposta ad alcune obiezioni contro la filosofia di Newton, in favore di quella del pieno di Cartesio. La più celebre delle sue opere è l'*Introductio ad veram physicam*. Allorchè la filosofia

newtoniana cominciò ad introdursi in Francia, tale opera ebbe molta voga, e fu considerata come la migliore introduzione al libro dei *Principj*: una nuova edizione in inglese, intitolata: *Introduzione alla nuova filosofia*, stampata venne a Londra nel 1729, ad istanza di Maupertuis, che era allora in Inghilterra.

KEPPLERO (Giovanni). Questo illustre astronomo, le cui immortali scoperte hanno stabilito sopra salde basi il vero sistema del mondo, nacque a Weil nel ducato di Wittemberg il 27 Dicembre 1571. Quelli tra i suoi lavori che maggiormente eccitarono l'ammirazione della posterità furono pubblicati nei primi anni del secolo XVII, ed aprono per così dire il cammino maestoso del progresso che distingue quell'epoca memorabile della storia della scienza. Noi non potremo però considerarli che nel loro insieme, rilasciando ad altri il seguire in tutti i suoi sviluppi il pensiero che gli produsse e di esporre io tutte le sue più minute particolarità la vita gloriosa di Giovanni Kepplero, piena non meno di crudeli vicissitudini che di religiosa rassegnazione.

Disgrazie di famiglia avevano lasciato Kepplero senza appoggio nessuno fino dalla sua più tenera giovinezza; ma l'interesse, che le felici disposizioni di cui era dotato inspirarono ad alcune persone benefiche, lo fece ammettere nel numero degli alunni del convento di Maulbrunn, ove incominciò i suoi studj, che andò poscia a terminare all'università di Tubinga. Il celebre Moestlin, uno dei più dotti professori di quello stabilimento, seppe riconoscere l'ingegno del giovine Kepplero, e lo dissuase dal dedicarsi allo studio della teologia, scienza che conduceva allora alla gloria e alla fortuna, e che egli aveva incominciato a coltivare con tutto l'ardore di uno spirito inclinato alla solitudine e alla malinconia. Nel 1594 successe a Stadt nella cattedra di matematiche a Gratz, e d'allora in poi si dedicò alla scienza di cui le sue scoperte hanno immensamente ampliato il campo. Non staremo a seguitare Kepplero in tutte le agitazioni che hanno amareggiato la sua esistenza: esiliato in Ungheria, richiamato in Stiria, di cui dovè successivamente abbandonare la capitale a motivo delle turbolenze, si refugiò a Praga ove trovò Ticone Brahé che gli fece conferire il titolo di matematico imperiale. Ma la meschina pensione annessa a questa denominazione fastosa non gli fu nemmeno pagata con esattezza, ed i bisogni i più urgenti vennero ad assalire Kepplero, già sopraccaricato di numerosa famiglia. Il celebre osservatore che l'aveva accolto gli ricusò duramente, per quanto vien narrato, i soccorsi ch'ei ne attendeva; ciò non ostante lo presentò all'imperatore Rodolfo, che glielo associò per aiutarlo ne' suoi calcoli, con assegnamenti che non gli furono sempre pagati con maggiore esattezza di quelli di matematico imperiale. La morte di Ticone sopraggiunse ad aumentare i terribili imbarazzi in preda ai quali trovavasi Kepplero, e non fu che nel 1613 che potè ritirare una porzione de' suoi appuntamenti arretrati. In tale epoca gli fu data la cattedra di matematiche a Lintz, e passò quindi, col permesso dell'imperatore, al servizio di Alberto, duca di Frislandia: ei si ritirò in seguito a Sagan, ove occupò pure una cattedra di matematiche.

In mezzo a tale lotta penosa contro la miseria, l'illustre Kepplero potè nonostante condurre a termine la sua opera di sommo geometra. Egli aveva adottato il sistema di Copernico, ed è noto come nel suo entusiasmo per esso domandasse costantemente a Dio la grazia di fare una scoperta che potesse esser la la conferma del moto della terra; la sua preghiera era accompagnata dal voto di pubblicare immediatamente l'opera in cui potesse esporre questa nuova prova della sapienza del Creatore. Questo voto venne finalmente esaudito, e la gioja di Kepplero fu indescrivibile quando ebbe realizzato la speranza dell'intera sua vita ed ebbe assegnato le leggi matematiche di tutti i movimenti celesti. Egli

aveva già annunziato questo gran pensiero nel primo suo scritto pubblicato nel 1597 sotto il titolo di *Prodromo* o *Mistero cosmografico*. Invano allora Ticone, a cui inviato aveva la sua opera, lo consigliò ad abbandonare le *vane sue speculazioni* per applicarsi più indefessamente al calcolo delle osservazioni. Certamente le idee di relazione, di armonia, di proporzionalità dalle quali mostravasi dominato Kepplero avevano un' apparenza di vago, d' incerto, di misterioso, e molto si assomigliavano a quanto avevano pensato i pitagorici sulle proprietà dei numeri. In questo aspetto il consiglio di Ticone non aveva nulla di irragionevole; eppure quale danno per la scienza se fosse stato seguito! Kepplero persistè nello scopo ammirabile che la sua mente si era prefisso, e la sua perseveranza fu coronata dal più maraviglioso successo. Dopo ventidue anni di studj, di osservazioni e di calcoli, potè annunziare in una nuova edizione del suo *Prodromo* il teorema importante che *i quadrati delle rivoluzioni dei pianeti stanno tra loro come i cubi delle respettive distanze dal sole*. Ecco come egli stesso rende conto della sua grande scoperta. » Da otto mesi ho veduto il primo raggio di luce; da tre mesi ho veduto il giorno; finalmente da pochi giorni ho veduto il sole colla più ammirabile contemplazione. Mi abbandono al mio entusiasmo; voglio bravare i mortali coll' ingenua confessione che ho involato i vasi d' oro degli Egiziani, per formarne al mio Dio un tabernacolo lungi dai confini dell' Egitto. Se mi perdonate, me ne godrà l' animo; se me ne fate un rimprovero, lo sopporterò; » la sorte è gettata; io pubblico il mio libro: ch' esso sia letto dall' età presente » o dalla posterità, poco m' importa; potrà attendere chi lo legga. Iddio non ha » atteso forse 6000 anni un contemplatore delle sue opere? » Egli aveva ragione; attese lungamente un degno lettore. Le sue scoperte furono capite ed apprezzate soltanto dopo che Newton, dimostrandole, ne fece vedere la verità, l' importanza e l' intimo legame. » Terminiamo, ei soggiunge, terminiamo la scoperta » fatta ventidue anni sono:

Sera quidem respexit inertem.
Respexit tamen, et longo post tempore venit.

» Se volete conoscerne l' istante, è il dì 8 di Marzo 1618. Concepita, ma male » calcolata; rigettata come falsa, ritornata il 15 Maggio con una nuova vivacità, » ha essa dissipate le tenebre del mio intelletto: ella è tanto pienamente confer- » mata dalle osservazioni che io credei di sognare o di fare una petiziona di » principio. »

Così si esprimeva Kepplero nell' *Armonia del mondo*, opera molto somigliante al suo *Prodromo*, e nella quale cerca di applicare all' astronomia le sue idee pitagoriche sui numeri e sugl' intervalli musicali. Espose e sviluppò in seguito in altri scritti questa scoperta che eccitava in lui quell' entusiasmo artistico, troppo conforme alla sua indole; ma non fu che nella sua *Astronomia nuova* ch' egli stabilì le famose leggi del moto dei pianeti, di cui la teoria e l' osservazione dimostrano sì evidentemente la verità. Passeremo a vedere coll' illustre e dotto Laplace, sì degno di spiegare l' opera di Kepplero, come questi giungesse a tale importante resultato, sul quale più specialmente dobbiamo fermarci.

Fu una opposizione di Marte che determinò Kepplero ad occuparsi a preferenza dei movimenti di questo pianeta. La sua scelta fu felice, in quanto che l' orbita di Marte essendo una delle più eccentriche del sistema planetario, ed il pianeta approssimandosi molto alla terra nelle sue opposizioni, le ineguaglianze del suo moto sono più grandi di quelle degli altri pianeti, e debbono per conseguenza farne scoprire più facilmente le leggi. Quantunque la teoria del moto della terra avesse fatto scomparire la maggior parte dei circoli, coi quali To-

lomeo aveva imbarazzato l'astronomia, pure Copernico ne aveva lasciati sussistere alcuni per ispiegare le ineguaglianze reali dei corpi celesti. Kepplero, ingannato come lui dall'opinione che i loro movimenti dovessero essere circolari ed uniformi, tentò per lungo tempo di rappresentare quelli di Marte in questa ipotesi. Finalmente dopo un gran numero di tentativi che egli ha minutamente riportati nella sua opera: *De stella Martis*, superò l'ostacolo che gli opponeva un errore accreditato dal suffragio di tutti i secoli: riconobbe che l'orbita di Marte è un'ellisse di cui il sole occupa uno dei fuochi, e che il pianeta vi si muove in modo che il raggio vettore condotto dal suo centro al centro del sole descrive aree proporzionali al tempo. Kepplero estese questi resultati a tutti i pianeti, e dietro questa teoria pubblicò, nel 1626, le *Tavole Rodolfine* eternamente memorabili nell'astronomia, per essere state le prime fondate sulle vere leggi del sistema del mondo, e sbarazzate da tutti i circoli che rendevano complicate le tavole anteriori.

Se dalle ricerche astronomiche di Kepplero si separano le idee chimeriche che sovente vi ha accompagnato, si scorge che pervenne a queste leggi nel modo seguente: si assicurò dapprima che l'eguaglianza del moto angolare di Marte non aveva luogo sensibilmente che intorno ad un punto situato al di là del centro della sua orbita rapporto al sole. Riconobbe la stessa cosa per la terra, confrontando tra loro alcune osservazioni di Marte, la cui orbita per la grandezza della sua parallasse annua è adattatissima a far conoscere le dimensioni respettive dell'orbita terrestre. Da questi resultati Kepplero concluse che i movimenti reali dei pianeti sono variabili, e che nei due punti della massima e della minima velocità le aree descritte in un giorno dal raggio vettore di un pianeta intorno al sole sono le stesse. Egli estese questa eguaglianza dell'area a tutti i punti dell'orbita; il che lo portò alla legge delle aree proporzionali ai tempi. Continuando le osservazioni di Marte verso le quadrature, potè conoscere che l'orbita di questo pianeta è un'ovale allungata nel senso del diametro che unisce i punti delle velocità estreme; e questo lo condusse finalmente al moto ellittico.

Senza le speculazioni dei Greci sulle curve che forma la sezione del cono per mezzo di un piano, queste belle leggi sarebbero forse ancora ignote. L'ellisse essendo una di queste curve, la sua figura allungata fece nascere nello spirito di Kepplero il pensiero di mettervi in moto il pianeta di Marte; e ben presto, per mezzo delle numerose proprietà che gli antichi geometri avevano trovate nelle sezioni coniche, si assicurò della verità di questa ipotesi. La storia delle scienze ci offre molti esempi di tali applicazioni della geometria pura e dei suoi vantaggi: imperocchè nella catena immensa delle verità tutto è collegato, e spesso una sola osservazione è stata sufficiente per fecondare le più sterili in apparenza, trasportandole alla natura i cui fenomeni non sono che i resultati matematici di un limitato numero di leggi immutabili.

Il sentimento di questa verità diede forse origine alle analogie misteriose dei pitagorici: esse avevano sedotto Kepplero, ed egli fu a loro debitore di una delle sue più belle scoperte. Persuaso che la distanza media dei pianeti dal sole e le loro rivoluzioni dovessero esser regolate in conformità di queste analogie, le confrontò per lungo tempo tanto coi corpi regolari della geometria quanto con gl'intervalli del tempo. Finalmente, dopo ventidue anni di inutili tentativi, essendogli venuta l'idea di confrontare le potenze delle distanze con quelle del tempo delle rivoluzioni siderali, trovò che i quadrati di questi tempi stanno tra loro come i cubi degli assi maggiori delle orbite; legge importantissima ch'egli ebbe la fortuna di scoprire nel sistema dei satelliti di Giove, e che si estende a tutti i pianeti.

Dopo aver determinato la curva che i pianeti descrivono intorno al sole e sco-

perto la legge dei loro movimenti, Kepplero era troppo vicino al principio da cui queste leggi derivano per non presentirlo. La ricerca di questo principio esercitò sovente l'attività della sua immaginazione; ma il momento non era ancora venuto di fare quest'ultimo passo, che supponeva l'invenzione della dinamica e del calcolo infinitesimale. Lungi dall'approssimarsi al suo scopo, Kepplero se ne allontanò, ma nelle numerose sue aberrazioni fu sempre guidato da vedute sanissime sulla gravitazione universale, nell'opera in cui presentò le principali sue scoperte.

» Ogni sostanza corporea, dice egli, è atta a restare in quiete in qualunque
» luogo in cui fosse solitaria e fuori della sfera di un altro corpo. La gravità è
» un'affezione corporea e reciproca tra due corpi, in forza della quale tendono
» essi ad unirsi siccome si scorge nella calamita; in guisa che la terra attira una
» pietra molto più che ella non n'è attirata. Se la forza della luna si stende fino
» alla terra, a più forte ragione quella della terra si stende fino alla luna e molto
» più lungi; nulla di quanto è analogo alla natura della terra può sfuggire a
» tale forza di trazione; nulla è leggero assolutamente, se è materiale; non può
» esser leggero che comparativamente. — Il peso dei corpi non è diretto verso
» il centro del mondo, ma verso il centro del corpo sferico di cui fanno parte; e
» se la terra non fosse sferica, i gravi posti ai diversi punti della sua superficie
» non cadrebbero verso uno stesso centro. — Due corpi isolati si moverebbero
» avvicinandosi l'uno verso l'altro come due calamite, percorrendo, per unirsi,
» degli spazi reciproci alle loro masse. Se la terra e la luna non fossero ritenute
» alla distanza che le separa da una forza animale, o da qualunque altra forza
» equivalente, cadrebbero l'una sull'altra; la luna farebbe $\frac{53}{54}$ del cammino, e
» la terra farebbe il resto, supponendole egualmente dense. — Se la terra cessasse
» di attirare le acque dell'oceano, queste si dirigerebbero verso la luna in
» virtù della forza attrattiva di quest'astro. Questa forza che si stende fino alla
» terra vi produce i fenomeni del flusso e del riflusso del mare. »

Il miscuglio di tali grande idee con una moltitudine di errori e di speculazioni chimeriche distingue in modo particolare tutte le opere di Kepplero, l'ardente immaginazione del quale si compiaceva di spaziare nelle congetture le più ardite e le più arbitrarie. Tutto sembra bizzarro e inaspettato nelle ispirazioni irregolari di quell'ingegno originale e profondo. Condotto dall'analogia alle scoperte più sublimi, questa via si chiude ad un tratto per lui, e fa veramente meraviglia ch'ei non abbia applicato alle comete le leggi del moto ellittico: secondo lui questi corpi celesti non sono che meteore generate nell'etere. Tali bizzarre contradizioni furono senza dubbio la causa per la quale gli astronomi del tempo di Kepplero, non escluso Cartesio e lo stesso Galileo, che potevano trarre il maggior partito dalle sue leggi, non sembra che ne abbiano sentita l'importanza.

L'astronomia e gli altri rami delle scienze matematiche debbono nonostante a Kepplero lavori di un ordine superiore, che avrebbero ancora formato la sua gloria senza le grandi scoperte sulle quali abbiamo dovuto trattenerci. Le sue opere sull'ottica sono, tra le altre, piene di cose nuove e interessanti. Vi perfeziona il telescopio e la sua teoria; vi spiega il meccanismo della visione, ignoto prima di lui; vi dà la vera causa della luce cenerina della luna. L'invenzione importante dei logaritmi attirò pure la sua attenzione, e l'onore di averla fatta conoscere alla Germania appartiene interamente a lui. Ma noi apprezzeremo meglio questo carattere notabilissimo di universalità nella vita scientifica di Kepplero percorrendo rapidamente la lista delle principali sue opere. La più importante di tutte è senza contrasto: I *Astronomia nova, seu physica coelestis*

tradita commentoriis de motibus stelloe Martis ex observationibus G. V. Tychonis Brahe, Praga, 1609, in-fol. In questo scritto memorabile Kepplero ha spiegato le soe leggi dei movimenti dei pianeti. II *Ad Vitellionem paralipomena, quibus astronomiae pars optica traditur*, Augusta, 1604, in-4; III *De stello nova in pede Serpentorii*, ivi, 1606, in-4; a questa osservazione della stella che comparve improvvisamenta nel 1604 nel piede del Serpentario, egli aggiunse una dissertazione sul vero anno della nascita di Gesù Cristo, che comparve separatamente in tedesco a Strasborgo, 1613, in-4; e tradotta in latino a Francfort, 1614, in-4; IV *Phaenomenon singulare, seu Mercurius in sole*, Lipsia, 1609, in-4.

Kepplero pretendeva in questo scritto di aver veduto nel 1608 il pianeta di Mercurio sul disco del sole, ma riconobbe in seguito l'errore da lui commesso preodendo ona macchia del sole, per questo pianeta. V *Narratio de observatis a se quatuor Jovis satellitibus*, Francfort, 1611, Kepplero conferma in questo scritto la scoperta cha Galileo aveva fatta recentemente di quei piccoli astri. VI *Dioptrice*, Augusta, 1611, in-4; ristampata in segoito all' *Institutio astronomica* di Gassendi, Londra, 1655, in-8; VII *Nova stereometria doliorum vinariorum*, Lintz, 1615, in-fol. Tale trattato di stazatura è dotto ma alquanto confuso. Kepplero vi fa uso della velta o staza trasversale di una sola scala cubica: egli vi ha inserito sull'iofinito alcune vedute che debbooo avere infloito sulla rivoluzione che la geometria ha provato alla fine del decimosettimo secolo, e sopra di esse probabilmente ha fondato Fermat il bellissimo suo metodo dei *massimi* e dei *minimi*; VIII *Epitome astronomiae copernicanae*, Francfort, 1618, 1621, 1622, in-8. Quest' opera, dice Montucla, contiene l' esposizione del sistema dell' universo, le ragioni sulle quali lo stabilisce, ed una gran quantità di congetture ardite, delle quali alcune sono state verificate in seguito, ed altre sono il prodotto di una immaginazione ardente ed esaltata. Egli infatti era sempre attaccatissimo alle prime sue idee arcbetipe ed armoniche: nè diede una nuova prova nell' opera seguente: IX *Hormonices mundi libri V, geometricus, architectorius, hormonicus, psycologicus, et ostronomicus*, Lintz, 1619, in-fol. Quest' opera è infatti un seguito e uno sviluppo del soo *Misterium cosmographicum*, che è il soo primo scritto e che contiene ipotesi egualmente insussistenti. Ma se le aberrazioni di uoa mente ardita e ricca di una moltitudioe di cognizioni profonde in ogni ramo di sapere possono formare uno spettacolo interessante e curioso, tale libro non va dimenticato. X *De cometis libri III*, Augusta, 1619, in-4; XI *Hyperaspistes Tychonis contro Scipionem Claramontium*, Francfort, 1625, in-4. Questo scritto presenta la difesa di Ticone e di Galileo contro gli attacchi del peripatetico Chiaramonti di Padova. XII *Joh. Keppleri et Jocobi Bartschii Tabulae monuoles ad calculum ostronomicum, in specie tabularum Rudolphinarum, compendiose troctondum mire utiles*, Strasburgo, 1700, in-12. XIII *Epistolae od Joh. Kepplerum scriptoe, insertis ad easdem responsionibus Kepplerionis*, Lipsia, 1718, in-fol., pubblicate da T. Hansch. XIV *Tabulae Rudolphinae*, Ulma, 1627, in-fol. Kepplero credè di dover dare alle sue tavole astronomiche il nome dell' imperatore Rodolfo suo protettore. Noi non abbiamo bisogno di rammentare di quale importanza e di quale utilità questo gran lavoro è stato per l'astronomia. Kepplero ha pubblicato un gran numero di altre opere, di cui si trova l'elenco nel supplemento del Dizionario di Joecher; abbiamo creduto di doverle passare sotto silenzio insieme con quelle nelle quali sembra che egli si cooformi ai pregiudizj del suo tempo relativamente all' astrologia giudiziaria. Dobbiamo però fare osservare cha in questo rapporto la debolezza di Kepplero non ha almeno un carattere sistematico, egli era troppo illuminato per annettere qualche im-

portanza alle vane speculazioni di questa falsa scienza. Infatti, nelle *Effemeridi* ch' ei pubblicò dal 1616 al 1630, l'illustre Kepplero ha preso cura di porre la sua memoria al coperto di una tale accusa, ridendosi egli stesso delle predizioni di astrologia, che secondo l'uso non potè dispensarsi dell' inserirvi. Bisogna, diceva egli, che la sorella bastarda nutrisca la sorella legittima.

Kepplero visse nell' indigenza; sopportava con una sublime rassegnazione le miserie di questa vita, ma le privazioni della sua famiglia laceravano il suo cuore. Il sentimento di profonda tristezza che gl' ispirava la sua posizione trasparisce nella maggior parte dei suoi scritti; ma questa gran voce che domandava del pane agli uomini, in ricambio delle verità che loro annunziava, non trovò eco nel mondo, e ad una circostanza appunto occasionata dalla trista situazione in cui viveva deve attribuirsi la sua morte. Era stato a Ratisbona per sollecitare il pagamento di ciò che gli era dovuto, aveva fatto il viaggio a cavallo ed era arrivato malato, estenuato dalla fatica, consumato dalle angosce: morì in questa città il 15 Novembre 1630, in un' età poco avanzata. Fu sotterrato nel cimitero di S. Pietro, e fu soltanto nel 1808 che venne innalzato un monumento che rammenti il suo ingegno e la sua gloria per le cure del principe Carlo Teodoro Dalberg. È posto nel giardino botanico di Ratisbona, a poca distanza dalla terra in cui riposano le sue ceneri.

KEULEN (Ludolfo Van), celebre geometra olandese, nacque a Hildesheim verso il 1550. La sua famiglia era originaria di Colonia, e a tal circostanza appunto deve egli il soprannome neerlandese di Ceulen o Keulen sotto il quale è più generalmente conosciuto nella storia della scienza. Professore di matematiche a Breda, e quindi ad Amsterdam, van Keulen si era acquistato qualche reputazione mediante la pubblicazione di alcuni scritti e per l' abilità colla quale sapeva facilitare ai numerosi suoi uditori la soluzione dei problemi più difficili, quando si rese improvvisamente celebre per l' approssimazione che diede del rapporto del diametro del circolo alla circonferenza. Il resultato, al quale dopo immensi calcoli egli giunse, supera di gran lunga quelli cui erano pervenuti Archimede, Mezio, Vieta e Adriano Romano, che si erano logorati a ristringere i limiti di tale rapporto. Da qualche tempo infatti Adriano Romano aveva spinto questa approssimazione fino a 17 decimali. Van Keulen la portò ad una esattezza assai più soddisfacente; dimostrò che, rappresentando il diametro del circolo coll' unità seguita da trentacinque zeri, la circonferenza è maggiore di 3,14159265358979323846264338327950288, ed è minore dello stesso numero aumentato di un' unità; così l' errore è minore di una frazione che abbia l' unità per numeratore e un numero di trentasei cifre per denominatore. L' immaginazione si confonde, dice Snellio citato dai biografi di Keulen, quando cerca di rappresentarsi la piccolezza di tale frazione: essa è assai più piccola, rapporto all' unità, di quello che sarebbe la grossezza di un capello sulla circonferenza di un circolo, che avesse per raggio la distanza che esiste tra la terra e le stelle fisse più vicine. Van Keulen espose questa approssimazione nel suo libro: *De circulo et adscriptis*, ch' ei pubblicò in olandese a Delft nel 1596, in-fol., e che Snellio tradusse in latino, 1619, in-4. È stato con ragione osservato che questo lavoro del geometra olandese annunzia più coraggio e pazienza che ingegno. Ei seguì semplicemente il metodo indicato da Archimede, raddoppiando continuamente il numero dei lati dei poligoni inscritti e circoscritti fino a giungere a due poligoni tra cui fosse compresa la circonferenza, e i contorni dei quali differissero di meno di un' unità in un numero composto di trentacinque cifre. Nulladimeno van Keulen rimase maravigliato della scoperta della sua approssimazione, che la scienza determina oggi in altro modo (*Vedi* Circolo); e sull' esempio di Archimede volle che questi numeri

fossero scolpiti sulla sua tomba. Le ultime sue volontà furono rispettate: ei morì a Leida nel 1610 e fu sepolto nella chiesa di San Pietro di questa città, ove anch' oggi si vede la sua tomba coll' iscrizione che rammenta la sua principale scoperta. Ludolfo van Keulen è del piccolo numero di quei geometri distinti che comparvero nei Paesi Bassi sul principio del XVII secolo. Delle altre sue opere citeremo soltanto le due seguenti: *Fundamenta arithmetica et geometrica*, tradotta in latino da Snellio, Leida, 1615, in-4. L' originale olandese è stato ristampato a Leida, 1716, in-fol. *Zetemata seu problemata geometrica*, Leida. In quest' ultimo scritto Keulen si è innalzato a considerazioni algebriche che attestano la sua abilità nel servirsi dell' analisi matematica.

KEXLER (Simone), dotto matematico svedese, nato nel 1602 nella provincia di Nericia e morto il 22 Marzo 1669. Ei fu per molti anni professore di matematiche nella università di Abo, e si rese celebre non meno per l'accellenza del suo modo d' insegnare che per le molte opere elementari che pubblicò, e che per lungo tempo furono riguardate in Svezia come classiche. Le sue opere sono: *Arithmetica geodetica denaria*, Abo, 1649; *Arithmetica astronomica sexagenaria*, ivi, 1649; *Trigonometriae liber I*, ivi, 1649; *De planorum triangulorum constructione*, ivi, 1649; *De sphaericorum triangulorum solutione*, ivi, 1649; *Arithmetica triplex*, ivi, 1658; *Tractatus brevis de tempore*; *item de calendario chirometrico*, *Juliano atque Runico*, ivi, 1661; *Arithmetica vulgaris*, ivi, 1666.

KHOWAREZMI (Mohammed ben Moussa-Alkhowarezmi), astronomo arabo così chiamato dal nome del paese da cui traeva origine, viveva nella prima metà del secolo nono, sotto il regno di Almamoun, celebre per le sue cognizioni e per la protezione cui accordava alle scienze. Khowarezmi contribuì efficacemente a diffondere il gusto dell' astronomia tra gli Arabi; compilò delle tavole astronomiche, di cui si fece uso fino al tempo di Ulug Beg, che ne fece fare delle nuove dal celebre Nassireddyn. Khowarezmi corresse non pochi errori dei suoi predecessori, e tolse da Tolomeo quanto egli dice dell' inclinazione dell' ecclittica. Quanto alle equazioni, si tenne al sistema dei Persiani. Egli il primo, secondo ciò che narra Hazwini, fece conoscere agli Arabi l' algebra; perciò Cardano (*De subtilitate*, *lib. XIV*) il mette nel numero de' più belli ingegni che siano apparsi; e gli attribuisce l' invenzione della soluzione delle equazioni di secondo grado, ma senza fondamento, perocchè Montucla dimostra come tale soluzione era già conosciuta da Diofanto ed' anco da Euclide, *Storia delle matematiche*, Tom. I, pag. 383.

KILIAN (Giacomo), dotto astronomo, nato a Praga nel 1714, e morto nel 1774 a Kaunitz, ove erasi ritirato dopo la soppressione dei gesuiti, all'ordine dei quali egli apparteneva. Delle molte sue opere citeremo soltanto: I *Causa efficiens motus astrorum ex principiis pyrotechnicae naturalis*, Danzica, 1769, in-8; II *Prodromus physico-astronomicus pyrotechnici systematis vorticum*, ivi, 1770, in-8.

KIRCH (Gotofredo), abile astronomo tedesco, nato il 18 Dicembre 1639 a Guben nella Lusazia inferiore. Studiò sotto il celebre Evelio, e si acquistò reputazione per le effemeridi che pubblicò a Lipsia dal 1681 al 1702. Morì il 25 Luglio 1710 a Berlino, ove era stato fatto direttore dell' osservatorio col titolo di astronomo reale. Egli aveva formato di alcune stelle informi tre nuove costellazioni, chiamate il *Globo universale*, le *Spade elettorali di Sassonia*, e lo *Scettro di Brandeburgo*, di cui peraltro gli astronomi hanno fatto poco conto. Un gran numero di osservazioni interessanti di Kirch sono inserite nella raccolta intitolata: *Miscellanea Berolinensia*.

KIRCH (Christfried), figlio del precedente, nato a Guben il 24 Dicembre 1694,

superò suo padre nella scienza dell' astronomia. Nel 1717 fu chiamato a Berlino per succedere a G. E. Hofmann negli impieghi di accademico e di direttore dell' osservatorio, e morì in questa città il 9 Marzo 1740. Era membro delle accademie delle scienze di Parigi e di Pietroburgo. Le sue opere sono: I *Transitus Mercurii per solem ad anni proximi 1720 diem 8 Maii, ex variis tabulis supputatus, et necessaria commentatione illustratus*, Berlino, 1719, in-4; II *Observationes astronomicae selectiores*, ivi, 1730, in-4; raccolta sommamente stimata; III Ha pubblicato pure un gran numero di *Memorie*, che si leggono nella raccolta intitolata: *Miscellanea Berolinensia*, nelle *Transazioni filosofiche* e negli *Atti* dell' Accademia di Pietroburgo.

KIRCHER (IL P. ATANASIO), uno dei più dotti religiosi che abbiano illustrato l' ordine dei gesuiti, nacque il 2 Maggio 1602 a Geysen, piccolo borgo della Germania. Ei professava la filosofia e le lingue orientali nel collegio di Wurtzburgo, quando gli avvenimenti della guerra dei trent' anni vennero a turbare la sua tranquillità. Si ritirò dapprima in Avignone, ove strinse amicizia col dotto Peiresc, e quindi passò a Roma ad occupare la cattedra di matematiche nel Collegio Romano. Esercitò tale incarico per otto anni, indi i suoi superiori gli accordarono di rinunziarvi per attendere agli altri suoi lavori. Egli morì a Roma il 28 Novembre 1680. Pochi uomini hanno accoppiato, come il p. Kircher, a cognizioni estesissime in matematiche, in fisica, in storia naturale, in archeologia, nelle lingue antiche ed orientali, uno spirito tanto credulo e tanto ardente a tener dietro ai resultati chimerici di esperienze maravigliose. Quest' uomo celebre sembra appartenere, non meno per la sua erudizione prodigiosa che per la semplicità dei suoi pregiudizj, a quel venerabile stuolo di dotti del 15° e 16° secolo i cui strani errori e sapere profondo formano nei loro scritti un contrasto bizzarro che in oggi ci sembra inesplicabile. Tuttavia la critica moderna è stata per avventura troppo severa verso il p. Kircher: i suoi scritti formano una bibliografia immensa, e anco in quelli che sono i meno stimati s' incontrano sempre vedute nuove, concepimenti arditi, e soprattutto un sapere che non è stato comune in nessun tempo. Le cognizioni matematiche costituiscono la base dei principali, e in tutti tengono un posto distinto. Noi ci limiteremo a citare i titoli dei più notabili, che hanno avuto i loro giorni di gloria e di successo.

I *Ars magna lucis et umbrae in X libros digesta*, Roma, 1645, 1646; Amsterdam, 1671, in-fol. È questo un trattato di ottica e di gnomonica che contiene cose estremamente interessanti. L' autore vi descrive una riunione di specchi piani cui avea costrutti secondo quello di Archimede, e rende conto della prova che ne aveva fatta e che spinse soltanto fino a produrre un calore considerabile: vi parla altresì di un numero grande di sue invenzioni, in generale più curiose che utili, e tra le quali vi è la *lanterna magica*, di cui è riguardato generalmente come l' inventore. II *Musurgia universalis, sive ars magna consoni et dissoni, in X libros digesta*, Roma, 1650, 2 vol. in-fol.; Amsterdam; 1662, in-fol. III *Phonurgia nova de prodigiosis sonorum effectibus et sermocinatione per machinas sono animatas*, 1673, in-fol. In queste due opere si trovano molte cose curiose e singolari sulla natura del suono, sulla sua propagazione, e sugli strumenti che hanno tale oggetto. IV *Mundus subterraneus, in quo universae naturae majestas ed divitiae demonstrantur*, Amsterdam, 1664, 1668, 2 vol. in-fol.; V *Primitiae gnomonicae catoptricae, hoc est horologiographiae novae specularis*, Avignone, 1633, 1635, in-4. Sembra che Kircher ignorasse come esistesse già un' opera del p. Schoenbergher sullo stesso argomento (*V.* Montucla, *Storia delle Matematiche*, tom. I, pag. 734). VI *Specula Melitensis encyclica, sive syntagma novorum instrumentorum physico-mathematicorum*, Messina, 1638, in-12. È la più rara di tutte le opere di Kircher: la pub-

blicò sotto il nome di *F. Salvatore Imbrollio*; Schott l'ha unita al libro VI della sua *Technica curiosa* (pag. 429-77). È la descrizione di una macchina, cui Kircher nomina *Specula*, col mezzo della quale potevano risolversi i principali problemi della sfera e del calendario. Il p. Kircher si è altresì applicato a perfezionare la geometria pratica, ed è l'inventore di un pantometro, strumento destinato a tener luogo di tutti gli altri, e cui il p. Schott ha descritto in un opuscolo intitolato: *Pantometrum Kircherianum*, Wurtzburgo, 1660, in-4. Circa al suo *Organo matematico*, del quale lo stesso p. Schott ha fatto una descrizione sommamente particolarizzata col titolo d'*Organum mathematicum*, Wurtzburgo, 1668, in-4, è una cassa contenente diversi strumenti atti ad agevolare le operazioni matematiche di ogni genere. VII *Arithmologia, sive de occultis numerorum mysteriis*, Roma, 1665, in-4. VIII *Tariffa Kircheriana, sive mensa Pythagorica expansa*, Roma, 1679, in-12, di 400 pag. È una tavola di moltiplicazioni dall'1 fino al 100: ognuno dei cento moltiplicandi presenta in quattro pagine dirimpetto a ciascuno dei cento moltiplicatori (a venticinque per pagina), 1.° il prodotto semplice, o la superficie del rettangolo; 2.° la superficie del triangolo di cui il moltiplicando è la base; 3.° la solidità del prisma, e 4.° quella della piramide che hanno per base il quadrato del moltiplicando, mentre il moltiplicatore esprime sempre l'altezza. Tale libro non avendo nè prefazione nè descrizione che ne spiegasse l'uso, il p. Benedetti ne compose una col seguente titolo: *Tariffa mira arte, cambinata methodo, universalem geometriae et arithmeticae practicae summam continens*, Roma, 1679, in 8: vi si trova pure una breve descrizione del *Pantometro*. Più minute notizie e più estese indicazioni sulle opere di questo dotto si troveranno nell'articolo che lo riguarda nella *Biografia universale*.

KLINGENSTIERNA (Samuele), matematico e filosofo svedese, nato nel 1689 a Tolefors presso Linkoeping, manifestò di buon'ora il suo gusto per le matematiche abbandonando per dedicarsi a questa scienza lo studio della giurisprudenza, alla quale era stato destinato dalla sua famiglia ed in cui sperare poteva non pochi vantaggi. Viaggiò per la Germania, la Francia e l'Inghilterra, ed ebbe occasione così di conoscere e stringere amicizia coi dotti più celebri del suo tempo, tra i quali citeremo Eulero, Clairaut, Wolf, Mairan, Fontenelle. Al suo ritorno in patria, nel 1730, Klingenstierna fu fatto professore di matematiche, e dalla sua scuola uscirono i matematici più distinti della Svezia. Ascritto fino dalla sua prima comparsa nell'arringo della scienza alla Società Reale di Upsal e poco dopo all'Accademia di Stockholm, arricchì gli *Atti* di questi dotti corpi di parecchie memorie, nelle quali tutte si scorge l'impronta di un ingegno creatore. L'ottica soprattutto fu l'oggetto delle sue ricerche e meditazioni. Formò il valente ottico svedese Carlo Lebnberg, aiutò co' suoi consigli il famoso Dollond, e rettificò diversi calcoli del grande Eulero. Si legge pure di lui, nelle *Transazioni filosofiche* per l'anno 1731, una dotta memoria sulla *quadratura generale delle curve iperboliche comprese in equazioni trinomie*: pubblicò ancora un'edizione latina degli *Elementi* di Euclide e una traduzione svedese della *Fisica* di Muschenbroek. Questo dotto stimabile morì il 28 Ottobre 1785.

KNUTZEN (Martino), professore di matematiche, nato a Koenigsberg nel 1713 e morto nel 1751, ha pubblicato: I *Arithmetica mechanica*, o *Descrizione di una macchina da calcolare in forma di cassetta*, Koenigsberg, 1744, in-8; II *Dissertazione storico-matematica sugli specchi ustorj, e particolarmente su quello di Archimede*.

KRAFT (Giorgio Volfgango), fisico, matematico e naturalista tedesco, nato nel 1701, si fece di buon'ora distinguere per gran talento ed assiduità allo studio.

Non appena ebbe egli conseguito a Tubinga i gradi accademici, che gli venne nel 1728 conferita la cattedra di matematiche nel collegio di Pietroburgo. Nel 1738 fu fatto membro dell' Accademia di Berlino, e sei anni dopo, nel 1744, ritornò, dietro le istanze del re di Wortemberg, a Tubinga a prendervi possesso della cattedra di matematica e di fisica, cui occupò con pari zelo e lode fino alla sua morte avvenuta nel 1754. Le principali sue opere sono: I *Brevis introductio ad geometriam theoreticam*, Pietroburgo, 1740, in-8; II *De atmosphaera solis dissertationes duae*, Tubinga, 1746, in-4; III *Institutiones geometriae sublimioris*, ivi, 1753, in-4; IV Un numero grande di *Memorie* inserite nella raccolta dell' Accademia di Pietroburgo di cui era socio.

KRAFT (Wolfgango Luigi), figlio del precedente, nato a Pietroburgo nel 1743, morì nella stessa città nel 1814, dopo avervi occupato varie cattedre, ed essere stato maestro di matematiche del granduca Costantino. Nel 1767 fu mandato ad Oremburgo onde osservasse il passaggio di Venere sul disco del sole; e molto lavorò con Eulero sulle tavole della luna. Ha scritto: I *Dissertatio de ratione ponderum sub polo et aequatore*, Tubinga, 1764, in-4; II Parecchie *Memorie* di aritmetica politica nella Raccolta dell' Accademia di Pietroburgo.

L

LACHAPELLE (L'Abate De), matematico francese, nato a Parigi verso il 1710 e morto nel 1792. Le principali sue opere sono: I *Discours sur l'étude des mathématiques*, Parigi, 1743, in-12; II *Institutions de géométrie*, ivi, 1746, 2 vol. in-8; III *Traité des sections coniques et autres courbes anciennes, appliquées et applicables à la pratique des différents arts*, ivi, 1750, in-8.

LAGNY (Tommaso Fantet de), valente matematico, nacque a Lione nel 1660. Dai suoi genitori era destinato al foro, ma la lettura dell'*Euclide* del p. Fournier, e dell'*Algebra* di Giacomo Peletier avendogli inspirato una passione invincibile per le matematiche, a queste rivolse unicamente i suoi studj. Il suo amore per la scienza, e le sue speranze di gloria, fondate sui suoi lavori, lo condussero di diciotto anni a Parigi. Al pari di molti uomini stimabili che perdono nel fondo delle provincie un tempo prezioso a inventar cose da lungo tempo già note, il giovine Lagny recava a Parigi il piano di parecchi metodi che dovevano niente meno che farli aprire le porte dell'Accademia delle scienze. Sfortunatamente trovò che le sue scoperte erano già state fatte: ma il merito suo reale il fece ben presto distinguere ed entrò nell' Accademia nel 1695. Fu in seguito nominato professore reale d'idrografia a Rochefort. Nel 1716 il duca d'Orleans, reggente, lo nominò sotto-direttore della banca generale. Dopo la soppressione di quella istituzione, riprese con ardore i suoi lavori accademici, e morì a Parigi il 12 Aprile 1734. Fontenelle racconta che negli ultimi suoi momenti, e quando già non poteva conoscere più quelli che circondavano il suo letto, Maupertuis si avvisò di domandargli quale fosse il quadrato di dodici, e che egli rispose subito 144. Si era molto applicato alla rifusione dell'aritmetica, dell'algebra e della geometria elementare, ed ebbe la sorte d'incontrarsi più volte con Leibnitz: la sua fama sarebbe più alto salita se non si fosse occupato con troppa esclusiva delle fondamenta del grande edifizio della geometria, quando già si pensava a costruirne il colmo. Al suo titolo di accademico, Lagny riuniva quello di membro della Società Reale di Londra, e di conservatore della biblioteca del re. Oltre un gran numero di memorie inserite nella raccolta dell'Accademia delle Scienze, abbiamo di lui: I *Méthodes nouvelles et abrégées pour l'extraction et l'approximation des racines carrées, cubiques, ec.* Parigi, 1691-92, in-4: vi si rinvengono diversi metodi per la risoluzione dei problemi indeterminati, genere di analisi in cui era particolarmente versato; II *Nouveaux élémens d'arithmétique et d'algèbre*, ivi, 1697, in-12; III *La cubature de la sphère*, La Rochella, 1702, in-12. Parlando di quest'opera nell'elogio di Lagny, Fontenelle dice che è uno scritto nuovo, singolare, e che solo basterebbe a palesare nel suo autore un gran geometra. IV *Arithmétique nouvelle* (binaria), Rochefort, 1703, in-4; V *Analyse générale des méthodes nouvelles pour résoudre les problèmes*, Prigi, 1733, in-4. Tale opera, che forma il tomo XI della raccolta dell'Accademia, è stata riveduta e perfezionata dall'abate Richer, intimo amico di Lagny. I lavori di que-

sto dotto e modesto matematico si trovano esaminati e benissimo apprezzati da Montucla, *Storia delle matematiche*, Tom. III, pag. 26.

LAGRANGE (Giuseppe Luigi). Non abbiamo nè la pretensione nè i mezzi di esporre in questo Dizionario la storia della vita e delle opere di questo geometra, il più illustre dei tempi moderni: lo spazio ci mancherebbe per innalzare un tal monumento alla sua memoria: esso esigerebbe un' opera separata e la mano di un dotto più valente assai di quella a cui è confidata la compilazione di queste brevi notizie storiche: ci sarà dunque permesso di riassumere, nel sistema medesimo che fin qui abbiamo tenuto, i principali avvenimenti della sua lunga e brillante carriera, e di rammentare soltanto i principali dei suoi titoli all' ammirazione del mondo.

Lagrange nacque a Torino il 25 Gennajo 1736. Suo padre, tesoriere di guerra in quella città, era nipote di un ufiziale francese passato al servizio di Emanuele II nel 1672, e Maria Teresa Gros, sua madre, era figlia di un medico di Cambiano che aveva la stessa origine. Le sue rare disposizioni per la scienza non si manifestarono immediatamente ne' primi studj che fece nel collegio di Torino. Soltanto nel suo secondo anno di filosofia cominciò ad applicarsi allo studio dei geometri antichi e dei loro metodi; ma una lettura di una memoria di Halley, in cui questi faceva risaltare la superiorità dei metodi analitici, svelò in lui il suo vero destino. Fino da quell' istante i suoi studj cangiarono direzione, e si applicò solo e senz' altra guida che il suo ingegno, e con quella passione generosa che trionfa delle più grandi difficoltà, allo studio delle migliori opere di analisi. Aveva allora 17 anni, e in meno di due anni giunse a possedere talmente la scienza nel suo passato come nei suoi progressi più recenti da entrare in corrispondenza coi primi geometri del tempo. Non aveva che diciotto anni, quando pubblicò nel Luglio 1754 una lettera indirizzata a Fagnano, nella quale esponeva una serie di sua invenzione per i differenziali e gl' integrali di un ordine qualunque, analoga a quella di Newton per le potenze e le radici. L' anno seguente comunicò ad Eulero i primi saggi del *Metodo delle variazioni*, in risposta al desiderio manifestato da quell' illustre geometra nella sua opera: *Methodus inveniendi*, ec., di trovare, per la soluzione delle questioni difficili che presenta il problema degli *isoperimetri*, un metodo di calcolo indipendente da ogni considerazione geometrica. Da dieci anni Eulero aveva fatto invano questo invito ai dotti dell' Europa, e con sua somma maraviglia fu un giovane sconosciuto che gli rispose. Lagrange era allora professore di matematiche nella scuola di artiglieria di Torino, quantunque avesse appena diciannove anni, e già aveva gettato i fondamenti dell' alta reputazione a cui giunse ben presto. In un' appendice all' opera che di sopra abbiamo citato, Eulero aveva presentato la scoperta di una proprietà notabile del moto nei corpi isolati, che impropriamente si dice in meccanica *principio della minima azione*. Nel 1756 Lagrange gl' inviò una nuova applicazione del suo metodo, che permetteva di generalizzare un tal principio, e per conseguenza di estenderlo al moto dei corpi che agiscono gli uni sugli altri in un modo qualunque, estensione importante del suo teorema che quel gran geometra medesimo disperava di poter trovare.

A questo bel lavoro di Lagrange Eulero diede in seguito il nome di *Metodo delle variazioni*, facendo brillare la gloria dell' inventore di questo nuovo ramo della scienza dei numeri.

In questo tempo, Lagrange fondò insieme col medico Cigna e il cavalier di Saluzzo, una dotta società in Torino, che ottenne l'approvazione del re di Sardegna e l' autorizzazione di pubblicare delle memorie come le altre accademie d' Europa. Il primo volume di tali memorie comparve nel 1759, ed ebbe un successo prodigioso, che fu dovuto alla parte considerabile che vi occupavano i la-

vori di Lagrange. Egli vi trattava i punti i più importanti e i più difficili dell' analisi e della meccanica. Vi aveva soprattutto inserito varie ricerche sulla propagazione del suono, argomento spinoso, sul quale lo stesso Newton si era ingannato, e di cui non si aveva par anche niuna buona teoria: vi si trovava altresì una dotta discussione del quesito delle corde vibranti, in cui le opinioni sommamente discrepanti fra loro dei più grandi geometri di quell' epoca; Eulero, d' Alembert e Daniele Bernoulli, si trovavano giudicate con molta sagacità, mentre il quesito stesso era trattato con un' analisi non meno nuova che profonda. Le porte dell' Accademia di Berlino non tardarono a dischiudersi per un uomo che si annunciava con tanta superiorità. Eulero, direttore della classe di matematiche di quell' accademia, gliene diede la nuova con una lettera sommamente lusinghiera del dì 2 Ottobre 1759. Nel 1762, comparve un secondo volume della Società di Torino, che non fece meno onore a Lagrange: vi estendava le sue ricerche precedenti rapporto alle corde vibranti e alla teoria del suono; e soprattutto vi pubblicava i suoi primi lavori sul metodo delle variazioni, e sulle numerose applicazioni che aveva saputo fare di tal nuovo ramo di calcolo. Lagrange riportò nel 1764 il premio proposto dall' Accademia di Parigi per la teoria della librazione della luna. La sua memoria, che presentava una soluzione compiuta del quesito proposto, conteneva inoltre i primi germi del gran concetto che servì in seguito di base alla *Meccanica analitica*. Tale memoria fu accolta con ammirazione, perchè, dice uno de' suoi biografi, mostrava già ai geometri tutta la generalità del principio fecondo delle celerità virtuali, e il suo stretto legame con gli altri principj della dinamica.

Nell' età in cui si comincia appena a prodursi nel mondo senz' altro appoggio che quello di speranze bene spesso deluse, Lagrange aveva in Europa la reputazione di un dotto di primo ordine. Ebbe egli allora il vivissimo desiderio di conoscere gli uomini eminenti, che con tanta premura avevano accolto ciò che egli chiamava modestamente i suoi *saggi*; ma soprattutto verso la Francia erano rivolti i suoi sguardi. Finalmente gli ardenti suoi voti furono soddisfatti: ei si recò a Parigi, ove Clairaut, d' Alembert e i loro principali confratelli lo accolsero con le più lusinghiere attenzioni. Una malattia pericolosa lo costrinse a ristringere il suo soggiorno, e, di ritorno a Torino, si applicò con nuovo ardore ai lavori che sopra di lui avevano attirato l' attenzione dell' Europa dotta.

Lagrange si diede allora a nuove e profonde ricerche sul calcolo integrale, sulle differenze parziali, sul moto dei fluidi e sui metodi di approssimazione, nei quali introdusse notabili perfezionamenti. Nello stesso lavoro ne fece un' applicazione importantissima ai movimenti di Saturno e di Giove, e vi diede il primo le espressioni esatte delle variazioni di tre elementi planetarj, applicazione che può considerarsi come uno dei fondamenti della bella teoria alla quale è il suo nome inseparabilmente associato. Nel 1766 ottenne pure il premio proposto dall' Accademia delle Scienze per una teoria dei satelliti di Giove, problema eminentemente difficile, e che si potrebbe chiamare de' sei corpi. In progresso ottenne un simile onore in tre altri concorsi, e forse non si valuterebbe giustamente quanto siffatti trionfi hanno in sè di onorevole, ove non si aggiungesse che erano i punti i più importanti della scienza, sui quali si chiamavano gli sforzi dei geometri, e che i grandi progressi dell' astronomia fisica nel secolo scorso, sono dovuti per la maggior parte ai quesiti che furono in tal guisa proposti e risoluti. Fu in quel tempo ch' ei lasciò Torino per non più ritornarvi. Il 6 Novembre del 1766 prese possesso del posto di direttore dell' Accademia di Berlino, posto offertogli da Federico, quando Eulero, che disimpegnava per l' avanti tale ufficio, tornò a Pietroburgo, ove lo richiamavano gravi interessi di famiglia. Egli non tardò a provare quanto fosse degno di occupare quel posto importante. Ri-

cerche piene di originalità sulle tautocrone, e sul modo di concludere la parallasse del sole dietro il passaggio di Venere, a cui tutte le menti erano allora rivolte, resero segnalato il suo arrivo, non che un gran lavoro sulle equazioni numeriche, che è la base del trattato cui pubblicò in progresso su tale argomento, e la memoria sulle equazioni letterali, in cui si trova l'utile e famoso teorema che porta il suo nome. Poco dopo, pubblicò le sue riflessioni sulla risoluzione algebrica delle equazioni, che serviranno lungo tempo di faro ai geometri in tale spinosa materia, ed il saggio sì ingegnoso sui principj del calcolo differenziale e integrale, prima sorgente della sua *Teoria delle funzioni analitiche*, nel quale un uso felice ed ardito dell'induzione e dell'analogia lo mise in possesso di un numero grande di teoremi non meno nuovi che importanti. A tali lavori tennero dietro infiniti altri: poichè in più di venti anni che fu direttore dell'Accademia di Berlino, pubblicò nella sua raccolta da sessanta dissertazioni su tutte le parti delle matematiche, e principalmente sulle differenze parziali, sugl'integrali particolari, sulle differenze finite, sulle probabilità, sulla teoria dei numeri, e sulle questioni più alte dell'astronomia generale e della meccanica celeste; il che non gl'impediva d'inviare anche memorie all'Accademia di Torino, superba di essere stata il teatro de' suoi primi successi, ed a quella di Parigi che sino dal 1772 si era fatta sollecita di crearlo uno de' suoi otto socj stranieri. « Non vi voleva meno, è stato detto con ragione, di una sì grande estensione d'ingegno » e di una fecondità sì prodigiosa per succedere ad un uomo come Eulero; ma » fu d'uopo altresì convenire che Eulero aveva un degno successore ».

La perdita di una sposa che adorava inspirò a Lagrange alcun disgusto pel soggiorno di Berlino; e tale disgusto si accrebbe in seguito per la morte di Federico che addusse rilevanti mutamenti in Prussia. I dotti stranieri, che avevano dato all'accademia di Berlino il lustro di cui aveva brillato momentaneamente, non vi godevano più la stessa considerazione, e Lagrange ricevè le più vantaggiose esibizioni dai ministri delle corti di Napoli, di Toscana e di Sardegna che avrebbero ambito di possedere un uomo del suo merito. Il celebre Mirabeau, che allora trovavasi a Berlino, era riuscito a penetrare nella società intima di questo gran geometra, e l'aveva veduto l'oggetto del più tenero rispetto per parte dello scarso numero di persone che potevano apprezzarlo. Adescato dai vantaggi che riusciti sarebbero per l'onore dell'Accademia di Parigi dal possedere un sì raro ingegno, scoperse senza fatica la segreta tendenza che Lagrange avea sempre avuto per la Francia, e si adoprò perchè dal ministro di Luigi XVI gli venisse profferta una pensione di 6000 franchi, l'alloggio nel Louvre e il titolo di *Pensionario veterano* col diritto del voto in tutte le deliberazioni dell'Accademia. Con premura accettò Lagrange tali proposizioni, e venne nel 1787 a stabilirsi nella capitale della Francia, ove i suoi nuovi confratelli si mostrarono fortunati e gloriosi di possederlo. La *Meccanica analitica* comparve nel 1788, e quest'opera di genio, opera che sola basterebbe alla gloria di Lagrange, fu pubblicata in un'epoca in cui pareva che la più strana rivoluzione si effettuasse nella sua mente. Per lungo tempo, dice Delambre nell'elogio di questo grande geometra, ei comparve distratto e malinconico. Sovente, in una compagnia che doveva essere perfettamente conforme al suo gusto, in mezzo ai dotti che era venuto a cercare sì di lontano, fra gli uomini i più distinti di tutti i paesi che ogni settimana si adunavano in casa dell'illustre Lavoisier, vedevasi pensoso, appoggiato ad una finestra ove nulla richiamava i suoi sguardi, restando estraneo affatto a quanto si diceva intorno a lui. Egli stesso confessava di aver perduto il gusto delle ricerche matematiche, e di non provar più quell'entusiasmo che si riaccese in seguito con tanto calore. Quale è dunque la causa di questa malinconia profonda nella quale il genio ama talvolta d'isolarsi?

Cominciò frattanto il gran dramma della rivoluzione francese, e Lagrange si trovò ben presto esposto alle crudeli vicissitudini che ne segnalarono le diverse peripezie. Strano accecamento delle fazioni che abbandonò al ferro dei carnefici gli uomini della scienza e del progresso in nome di una rivoluzione che si vantava di volere incoraggire il progresso! Il carattere pacifico di Lagrange lo allontanò dalla scena procellosa delle passioni di quel tempo, quantunque l'attiva sua curiosità fosse stata eccitata da quella terribile commozione. Ei credeva poco ai pretesi miglioramenti che i riformatori promettevano al popolo, pure prese parte ad una delle innovazioni le più felici di quell'epoca, vale a dire allo stabilimento d'un sistema metrico, generale ed uniforme, la cui base era presa nella natura. Nel 1791, l'assemblea nazionale, sulla proposizione del deputato Duséjour, membro dell'accademia, gli conservò con un decreto la pensione che gli aveva accordata Luigi XVI. La stessa assemblea lo nominò successivamente membro di una commissione incaricata di ricompensare le invenzioni riconosciute utili ed uno dei tre amministratori della zecca. Ma ei non volle occupare quest'ultimo impiego che per sei mesi, e nel Maggio 1792 sposò madamigella Lemonnier, e visse nella ritiratezza fino al 1793, epoca in cui un decreto del 16 Ottobre obbligava tutti gli stranieri ad uscire dalla Francia. Ad onta delle disgrazie che opprimevano questo paese, Lagrange temeva il momento di una separazione che avrebbe considerata come un esilio. Ma Guyton-de-Morveau ottenne dal comitato di salute pubblica un ordine che poneva l'illustre autore della *Meccanica analitica* in *requisizione* per continuare dei calcoli sulla teoria dei projetti, e lo conservò così alla Francia che tanto amava. Prima che giorni migliori sorgessero nel nostro desolato paese, Lagrange ebbe il dolore di vedere immolare i suoi migliori amici, Bailly e Lavoisier. La morte di quest'ultimo soprattutto lo immerse nell'afflizione. » Un solo momento, diceva egli a » Delambre, è bastato loro per far cadere quella testa; e cento anni forse non » basteranno per riprodurne una simile! »

Tuttavia uscì finalmente l'ordine dal caos rivoluzionario, e gli atti del governo regolare e sociale vennero a rassicurare la società, sì a lungo e sì profondamente lacerata. La scuola normale e la scuola politecnica furono create, e questi stabilimenti, di cui l'ultimo specialmente sì nazionale e sì grande ha brillato di tanta luce fra le glorie nuove della Francia, annoverarono Lagrange nel numero dei loro professori. Fu per gli alunni della scuola politecnica che Lagrange, riprendendo le antiche sue meditazioni sui fondamenti del calcolo differenziale, diede loro quell'aspetto che sviluppò nella sua *Teoria delle funzioni analitiche.* È difficile il farsi un'idea dell'entusiasmo col quale gli uditori di Lagrange ascoltavano le sue lezioni e del loro religioso silenzio quando un'interruzione improvvisa indicava nell'illustre geometra una di quelle distrazioni profonde in cui talvolta l'immergeva qualche idea improvvisa. Quei giovani ardenti e consacrati al servizio del loro paese portavano lungi nella Francia, e nei campi, e nei paesi stranieri, ove gli chiamava il loro dovere, la memoria del loro illustre maestro, e il tenero affetto con cui lo amavano. Il nome di Lagrange era allora uno dei più popolari della Francia. In quell'epoca fu creato l'Istituto nazionale, e Lagrange fu il primo scritto sulla lista de'suoi membri. Pochi anni dopo, un'utile imitazione di un paese vicino fece che in Francia fosse istituito un ufizio delle longitudini, e Lagrange vi fu pure il primo nominato. Tali onori non erano sterili: rianimavano il suo ardore come se avesse avuto bisogno di provare quanto erano legittimi, e di mostrare al mondo dotto i suoi diritti ad ottenerli. Ristampando allora le sue memorie sulle equazioni numeriche, vi aggiunse col titolo di *Note* un ristretto ammirabile delle teorie più profonde sulla loro risoluzione. Vi si osservarono soprattutto le dotte analisi di tutti i metodi che

avevano preceduto i suoi: analisi che faranno la disperazione di chi vorrà un giorno scrivere la storia della scienza, e che egli solo ha potuto eguagliare in alcuni altri luoghi delle sue opere. Il direttorio, commosso dal lustro che i lavori di quest'uomo sommo recavano alla Francia, lustro che refluiva sulla sua amministrazione, gli decretò una di quelle ricompense che rammentano l'eroismo e la nobile semplicità delle antiche repubbliche. Nel momento in cui il Piemonte in seguito delle vittorie delle armi repubblicane restò sottoposto al governo francese, non si dimenticò che era quello il paese nativo di Lagrange, e che suo padre, in età di 90 anni, viveva ancora a Torino. Il ministro degli affari esteri ricevè allora l'ordine di scrivere al commissario civile del direttorio in quella città: » Vi recherete dal venerabile padre dell'illustre Lagrange, e gli direte che » nei recenti avvenimenti politici, i primi sguardi del governo francese si sono » rivolti verso di lui, e che vi ha incaricato di recargli la testimonianza del vi- » vissimo interesse che gl'inspira, ec. ».

Il commissario del direttorio rispose che appena ricevuta tal lettera si era trasferito alla casa del padre di Lagrange, seguito dai generali dell'armata e da parecchi cittadini distinti delle due nazioni, ed ivi dopo averli letto il dispaccio officiale: » Felice padre, gli aveva soggiunto, godete della riconoscenza di tutti » gli amici della verità; io sono in questo istante l'interpetre dei loro senti- » menti. Godete della fortuna di aver dato la nascita ad un uomo che col suo » sublime ingegno onora l'uman genere, che il Piemonte va orgoglioso di » aver veduto nascere, e che la Francia si vanta ora di annoverare tra i suoi » cittadini. » Ecco la risposta del rispettabile vecchio: » Questo è il più felice » giorno della mia vita, e lo debbo a mio figlio. Testificate al governo francese » la mia riconoscenza. E mio figlio! sono 32 anni che non l'ho veduto . . . ! » Ei non doveva più rivederlo. In tal tempo nuovi onori sopraggiunsero a rendere un luminoso omaggio all'ingegno di Lagrange. I destini della Francia erano cangiati, e il capo dello stato, che era stato suo collega nell'Istituto, lo nominò membro del senato, grande ufficiale della legione d'onore, e poco dopo conte dell'impero e gran croce dell'ordine della riunione. Lavori dell'ordine il più elevato segnano questo periodo della sua vita. Gauss aveva pubblicato nel 1801 le sue dotte *Disquisitiones arithmeticae*; esse terminavano con un metodo sommamente originale per la risoluzione delle equazioni a due termini, di un grado espresso da un numero primo. Lagrange, colpito dalla bellezza di tale scoperta, fece un'applicazione sì felice dei principj che aveva altra volta stabiliti per la risoluzione generale delle equazioni, che seppe rendere la teoria di Gauss affatto indipendente dalle equazioni ausiliari che bisognava considerarvi, e liberarla dall'inconveniente che nasceva dall'ambiguità delle radici. Tale importante lavoro pei progressi all'analisi algebrica, formò la materia di due profonde memorie, di cui arricchì una nuova edizione delle sue *Equazioni numeriche*, pubblicata nel 1808. Nello stesso anno inventò la celebre teoria della variazione delle costanti arbitrarie, e ne fece l'applicazione alle più grandi questioni di dinamica e di meccanica celeste. Deliberò fin d'allora di ripubblicare la *Meccanica analitica*, alla quale divisava da molti anni di fare importanti aggiunte, riferibili principalmente al sistema del mondo. Voleva trattarne i grandi fenomeni coi metodi di una rara eleganza che gli erano proprj, e ripubblicare con nuova diligenza le belle applicazioni contenute nelle memorie di Berlino per gli anni 1780-84. Il primo volume di tale grande opera comparve nel 1811, e, fra le numerose aggiunte che vi si facevano osservare, i geometri distinsero parecchie importanti ricerche sull'attrazione delle sferoidi e sulla figura dei pianeti tratta dalle leggi dell'idrostatica, non meno che un'analisi profondissima dei moti oscillatorj di un sistema di piccoli corpi, in cui perfezionava ancora le antiche sue soluzioni

del problema delle corde vibranti. Attendeva con somma attività agli altri volumi, quando con più ardore che prudenza intraprese in pari tempo a rivedere ed aumentare la sua *Teoria delle funzioni analitiche*, di cui pubblicò una seconda edizione nel principio del 1813. Tale eccesso di fatica aveva esauste le sue forze, e frequenti deliquj cominciarono ad assalirlo; ei però non cessò di attendere alla revisione della sua *Meccanica*: tale applicazione aggravò il male da cui era attaccato, e non tardarono a manifestarsi i sintomi i più allarmanti. Conobbe il pericolo in cui trovavasi; ma, dice Delambre, conservando la sua imperturbabile serenità studiava ciò che accadeva in lui; e, come se non avesse fatto che assistere ad una grande e rara esperienza, vi dava tutta la sua attenzione. Spirò in mezzo ai suoi amici il 10 Aprile 1813: tre giorni dopo, le sue spoglie mortali furono deposte nel Panteon.

Questo sarebbe il luogo conveniente per esaminare ed esporre nel loro insieme i gloriosi suoi lavori e le scoperte memorande delle quali per tanto tempo ha arricchito la scienza. Ma tale rivista oltrepasserebbe i limiti del nostro piano, perciò ci ristringeremo a dar qui la lista di quelli tra i suoi scritti che sono stati pubblicati separatamente, e percorrendo i quali si risale alla sorgente di un gran fiume del quale abbiamo fin qui ammirato il corso maestoso. I *Additions à l'Algèbre d'Euler*; tali addizioni occupano trecento pagine del secondo volume di quest' opera, che è stata stampata a Lione nel 1774 in due volumi in-8; ristampata nel 1796, e riprodotta da Garnier nel 1807 a Parigi. II *Mécanique analytique*, Parigi, 1787. La seconda edizione ha due volumi: il primo comparve nel 1811, ed il secondo nel 1815, dopo la morte dell' autore, per le cure dei sigg. Prony, Garnier e Binet. III *Théorie des fonctions analytiques*, Parigi, anno V (1797), in-4; 2ª ediz., 1813; IV *Résolution des équations numériques*, Parigi, anno VI (1798), in-4; 2ª ediz. 1808; 3ª ediz., 1826; V *Leçons sur le calcul des fonctions*, Parigi, 1806, in-8; VI *Leçons d'arithmétique et d'algèbre, données à l'École normale*: esse comparvero diverse volte in differenti raccolte: la migliore edizione si trova nei fascicoli 7 e 8 del Giornale della scuola politecnica. VII *Essai d'arithmétique politique*, nella raccolta pubblicata da Roederer l'anno IV (1796). Esistono inoltre di Lagrange cento e più memorie nelle collezioni accademiche di Torino, di Parigi e di Berlino, nell' *Effemeridi* di quest' ultima città, nella *Connaissance des tems*, e nel *Giornale* della scuola politennica. Egli ha lasciato pure una gran quantità di manoscritti che Carnot, ministro dell' interno nel 1815, fece acquistare dal governo e donò all' Istituto.

LAHIRE (Filippo di), distinto geometra, ed uno dei membri più laboriosi e più utili dell' Accademia delle Scienze di Parigi, nacque in questa città il 18 Marzo 1640. All' età di 17 anni perdè suo padre, Lorenzo di Lahire, pittore ordinario del re, il quale lo destinava a rimpiazzarlo nell' arte sua, di cui gl' insegnò i primi elementi. Ma altre disposizioni attiravano il giovane Lahire ad un diverso arringo; e, secondo Fontenelle, si potè di buon' ora prevedere che il giovane pittore sarebbesi presto cangiato in un gran geometra. Il dolore che ebbe a provare per la perdita crudele da lui sofferta ed una gravissima affezione fisica lo condussero in Italia, ove con successo si applicò allo studio della geometria. Al suo ritorno a Parigi, Desargues lo incaricò di condurre a termine la seconda parte del suo *Trattato del taglio delle pietre*. Tale lavoro fu stampato separatamente, e fece conoscere vantaggiosamente ai dotti il suo autore. Nel 1673 e 1676, Lahire pubblicò diversi trattati sulle sezioni coniche e sulla cicloide, curva allora in moda, i quali posero il suggello alla sua riputazione e lo fecero entrare nell' Accademia delle Scienze nel 1678. Il titolo di accademico non rallentò punto il suo zelo per la scienza, e nell' anno che tenne dietro al suo ricevi-

mento pubblicò in uno stesso volume tre trattati che sembrano avere avuto per oggetto lo sviluppo di alcuni passi oscuri della geometria di Descartes: il primo è consacrato alle sezioni coniche, il secondo ai luoghi geometrici, e il terzo alla costruzione delle equazioni. Fu in tale epoca che l' illustre Colbert concepì il piano di una carta generale del regno di Francia. Picard e Lahire furono scelti per andare in Bretagna onde farvi delle osservazioni che dovevano servire di riprova all' esattezza di questo bel lavoro; i due geometri percorsero in seguito il littorale della Guascogna di cui rettificarono la forma, dimostrando che era pressochè diritto invece che curvo come era stato supposto. Nel 1681, Lahire ebbe ordine di separarsi da Picard e di andare a determinare la posizione di Calais e di Dunkerque. Misurò in pari tempo la larghezza del passo della Manica dalla punta del bastione del Risban fino al castello di Douvres, e la trovò di 21360 tese. Lahire misurò quindi sulla spiaggia del mare una base di 2500 tese, che fu il fondamento de' suoi triangoli, e visitò nel 1682 le coste della Provenza per terminare la grande intrapresa di Colbert. In tutti questi viaggi, dice Fontenelle, ei non si limitava alle operazioni che erano lo scopo suo principale; faceva ancora delle osservazioni sulle variazioni dell' ago magnetico, sulle refrazioni, sull' altezza delle montagne, sul barometro, ec. Ei non seguiva solamente gli ordini del re, ma anco il suo gusto e la sua ardente passione di apprendere.

Nel 1682, questo laborioso geometra pubblicò un trattato di gnomonica, che è stato ristampato con aggiunte nel 1698. La morte di Colbert interruppe ad un tratto i lavori per suo ordine intrapresi all' oggetto di ultimare la meridiana cominciata da Picard, che Lahire continuava dalla parte di settentrione, mentre Cassini la proseguiva dalla parte di mezzogiorno. Allora Lahire fu impiegato da Louvois, successore del gran ministro che la Francia avea di recente perduto, nei lavori di livellamento che avevano per oggetto di condurre a Versailles le acque dell' Eure. Nel 1685, l' infaticabile Lahire pubblicò in un sol corpo di opera il resultato di tutti i suoi studj sulle sezioni coniche. Questa teoria compariva allora per la prima volta nel suo insieme dedotta da principj semplici e nuovi; così l' opera di Lahire ottenne in tutta l' Europa un immenso successo. Due anni dopo, pubblicò le tavole del sole e della luna, ed un metodo per facilitare il calcolo degli ecclissi. Tutti i rami delle matematiche finalmente sono stati l'oggetto dei lavori di Lahire, dei quali meglio si comprenderà l'importante complesso dalla nota delle opere che ha pubblicate sulle diverse materie che ne sono l' oggetto.

Lahire ha fatto poco per la teoria della scienza, ma le operazioni che ha condotte a termine danno un' alta idea della sua sagacità, del suo amore pel lavoro e de' suoi talenti. Non possono troppo onorarsi i nomi dei più grandi geometri che sacrificano la gloria delle sublimi speculazioni alla felicità di rendersi utili al loro paese per mezzo di pratiche applicazioni. Quegli di cui abbiamo rapidamente esposto i lavori ebbe una vita pacifica di cui lo studio occupò tutti gl' istanti. Alieno da ogni ambizione, di costumi dolci e puri, Lahire morì a Parigi il 21 Aprile 1719, senza aver provato le infermità che opprimono la vecchiaja, amato e rispettato da tutte quelle persone in mezzo alle quali era vissuto. » Tutte le sue giornate, soggiunge Fontenelle nel terminare il suo elogio, » erano interamente dedicate allo studio, e le sue notti spesso interrotte dalle » osservazioni astronomiche. Niun divertimento fuori che quello di cangiar di » lavoro; niun altro esercizio corporale che quello di andare all'Osservatorio, al- » l' Accademia delle Scienze, a quella di architettura, e al Collegio Reale di cui » era professore. Ha avuto la fortuna che l' età non l' ha consunto lentamente, nè » gli ha fatto soffrire una lunga e languente vecchiaja. Quantunque carico di anni, » non è stato vecchio che per un mese, almeno da non potersi recare all' acca- » demia; in quanto alla sua mente, non ha mai invecchiato.

Ecco i titoli e l' elenco, per ordine di data, delle opere di Lahire. I *Nouvelle méthode de géométrie, pour la section des superficies coniques et cylindriques*, Parigi, 1673, in-4; II *De Cycloide, opusculum*, ivi, 1676, in-4; III *Nouveaux élémens des sections coniques; les Lieux géométriques; la Construction ou effection des équations*, ivi, 1679, in-12; gli *Elementi delle sezioni coniche* vennero rifusi ne' suoi da Mauduit: gli altri due trattati sviluppano la geometria di Cartesio; IV *La Gnomonique, ou l'art de tracer des cadrans*, ivi, 1682, in-12; nuova edizione sommamente aumentata, ivi, 1698. Quest' opera utilissima, che sembrò eccellente nel tempo in cui fu pubblicata, è stata ecclissata da quella di D. Bedos de Celles, sullo stesso argomento; V *Sectiones conicae in IX libros distributae*, ivi, 1685, in-fol.: è un'opera preziosa per quelli cui è famigliare il linguaggio degli antichi geometri. Si veda ciò che ne dice Montucla nella sua *Storia delle Matematiche*, Tom. III, pag. 7. VI *Tabulae astronomicae, Ludovici magni jussu et munificentia exaratae*, ivi, 1702, in-4. La prima parte di queste tavole, come abbiamo detto di sopra, era già comparsa nel 1687. Lahire vi aveva aggiunto la descrizione di una macchina di sua invenzione che indicava tutti gli ecclissi passati e futuri, non meno che i mesi e gli anni lunari con le epatte. Questa macchina era di una costruzione semplicissima, e poteva mettersi nella cassa di un pendolo. Fontenelle soggiunge che vennero costruite parecchie di queste macchine, una delle quali destò il massimo stupore all' imperatore della China a cui era stata inviata insieme con parecchie altre curiosità di Europa. Quanto alle *tavole astronomiche*, ebbero un gran successo, quantunque un tale Lefèvre ne disputasse la proprietà a Lahire: questi le tradusse in francese, ma non furono stampate in questa lingua che nel 1735. Furono pure tradotte in tutte le lingue di Europa; ma le tavole di Halley le hanno fatte dimenticare affatto. VII *L' École des arpenteurs, avec un abrégé du nivellement*, Parigi, 1689, in-8; ed ivi, 1692, 1728; VIII *Traité de mécanique où l'on explique tout ce qui est nécessaire dans la pratique des arts*, ivi, 1675, in-12. Tale opera che aveva il merito di esser compiuta, e che d'altronde era un trattato di questo ramo della scienza notabilissimo per quel tempo, era accompagnata da una dissertazione sulle epicicloidi, e sul loro uso nella meccanica. Fa maraviglia che tale lavoro abbia somministrato a Bossut l' occasione di denigrare il carattere e il talento di Lahire nella sua *Storia delle matematiche*. Questo scrittore pretende che Lahire era conosciuto per un geometra assai mediocre: tale asserzione è affatto gratuita, ed è poi smentita dai lavori pregevoli dell' autore del *Trattato di meccanica* che adesso abbiamo rammentato. Si trovano pure, nella raccolta dell' Accademia delle Scienze, moltissime memorie di Lahire, che è stato inoltre l' editore del *Traité du nivellement* di Picard, e del *Traité du mouvement des eaux* di Mariotte, ed ebbe gran parte con Boivin e Thevenot nell' edizione dei *Veteres mathematici*, Parigi, 1693, in-fol.

LALANDE (Giuseppe Girolamo Le-Français de), uno degli osservatori moderni i più rinomati, nacque a Bourg in Bresse il dì 11 Luglio 1732. Pochi uomini di talento sono giunti al grado di celebrità al quale è pervenuto quest' astronomo, celebrità popolare anche oggigiorno in Francia, ove il nome del modesto ed illustre abate La Caille non è conosciuto che dalle persone che si occupano della scienza. Se Lalande non ha fatto veruna grande scoperta che giustifichi la sua reputazione, i suoi numerosi e pregevoli lavori non meritano meno di esser rammentati, quando ancora non avessero avuto altro resultato che quello di render popolari le cognizioni astronomiche e diffonderne il gusto in Francia.

Lalande fu allevato da genitori religiosissimi, ed ebbe a Lione per professore di matematiche il p. Beraud. Sottoposto fino dalla sua infanzia alle pratiche più minuziose della devozione, e componendo nei suoi primi anni dei romanzi mi-

atiei, ed anco dei sermoni cui recitava in pulpito in veste di gesuita, è divenuto in seguito uno dei più veementi e audaci apostoli della setta enciclopedica. Quantunque avesse di buon'ora palesato un talento non comune, la sua inclinazione pareva che lo traesse piuttosto agli studj letterarj che verso le alte speculazioni della scienza, quando il grand' ecclisse del 25 Luglio 1748, ch'ei vide osservare a Lione dal p. Berand, determinò la sua vocazione per l'astronomia. I suoi genitori poco lusingati dalle speranze di gloria che già concepiva il giovane Lalande, credettero di poter distorglierlo da una inclinazione che essi consideravano come funesta inviandolo a Parigi, ove fu messo a dozzina presso un procuratore. Ma questo procuratore abitava nel palazzo di Cluni, ove Delisle aveva eretto un osservatorio che i lavori di Messier avevano reso celebre. Lalande assistè ai corsi di diritto e divenne avvocato per compiacere i suoi genitori che amava moltissimo; nel tempo stesso assistè alle lezioni che Messier dava nel collegio di Francia e divenne astronomo per soddisfare alla propria inclinazione. Pare che il corso di Messier si trovasse spesso deserto, e che Lalande fosse presso a poco il solo suo uditore: perciò il vecchio professore gli si affezionò e cercò di sviluppare le felici disposizioni che in lui aveva scorte. Quasi nello stesso tempo, Lemonnier, a cui è dovuta la misura di un grado al circolo polare, aprì un corso di fisica matematica, e distinse Lalande tra' suoi alunni. Questi non tardò a realizzare tutte le speranze che aveva fatto concepire ai suoi due maestri che fecero a gara per affezionarselo esclusivamente. Lemonnier ebbe il eredito di farsi rimpiazzare dal suo protetto per la determinazione della parallasse della luna che doveva eseguirsi nell'osservatorio di Berlino, dietro l'opinione di La Caille che desiderava che delle osservazioni fatte in Europa stabilissero una concordanza utile ai progressi della scienza con quelle che era per fare al Capo di Buona Speranza. Il giovane Lalande, lieto di essere stato incaricato di questa commissione, partì per Berlino, munito di tutte le istruzioni non meno che delle raccomandazioni e degli strumenti necessarj; fu presentato a Federico, che lo accolse benissimo. Poco tempo dopo, Lalande, cui la sua giovinezza impedito non avea di essere incaricato di una missione importante, e che veniva considerato come un prodigio, fu ricevuto membro dell'Accademia di Berlino. Tale circostanza lo pose in relazione con Eulero, da cui ebbe la fortuna di ricevere delle lezioni; ma nel tempo medesimo strinse amicizia con tutti i *filosofi* di Federico, e in mezzo ad essi perdè i sentimenti di religione nei quali era stato allevato. Prima di tornare in Francia, pubblicò, negli *Acta eruditorum*, le particolarità della sua missione sotto questo titolo: *D. Delalande astronomi regii, de observationibus suis berolinensibus, ad parallaxin lunae definiendam, epistola* (1752). Nel 1753, Lalande in età appena di venti anni fu ammesso all'Accademia delle Scienze di Parigi. Il suo lavoro sulla luna gli somministrò occasione di stringere amicizia con La Caille; ma tale amicizia dispiacque al suo maestro Lemonnier, e da quel tempo divennero nemici.

Accenniamo ora rapidamente i lavori di Lalande giunto sì giovane agli onori accademici. Per trarre dalle osservazioni fatte a Berlino e al Capo di Buona Speranza il partito più sicuro e più vantaggioso, era necessario conoscere con estrema precisione il diametro della luna. Lalande fece costruire un eliometro di 18 piedi, il più grande che sia stato mai fatto; lo verificò diligentemente nell'osservatorio del Lussemburgo, e per una lunga serie di osservazioni precise determinò tale diametro, e la sua relazione costante colla parallasse orizzontale. Una delle occupazioni sue più costanti fu la teoria dei pianeti che in tutta la sua vita cercò di complatare mediante l'osservazione. Due passaggi di Mercurio sul sole, che osservò mediante il suo eliometro, gli fecero immaginare nuovi metodi per ispogliare tali osservazioni dagli effetti della parallasse. All'occasione

dei due passaggi di Venere, che erano di ben altra importanza, e dei quali avvicinavasi l'epoca, sviluppò il metodo di Delisle per rappresentare sopra una carta geografica l'ora del principio e quella della fine del passaggio per tutti i differenti paesi della terra, e porre gli astronomi in grado di scegliere su tutto il globo le stazioni più vantaggiose. Per tale scelta potevasi per varità usare di un altro metodo del pari sicuro e più speditivo, ma una prova della stima che si fece allora della soluzione di Lalande, è che Lagrange, alcuni anni dopo, ne fece il soggetto di una grande memoria, in cui l'analisi più profonda lo conduceva agli stessi metodi che Delisle e Lalande avevano indicato i primi, poichè è difficile l'assegnare quanto è dovuto all'uno e all'altro di questi due astronomi. Halley, che lungo tempo prima aveva raccomandato tali passaggi all'attenzione degli astronomi, si era ingannato nel calcolo dei luoghi più favorevoli, e tale errore si trova con somma chiarezza dimostrato in una memoria di Lalande. Questi si occupò pure moltissimo di gnomonica, ed espose tutti i metodi relativi all'arte di costruire gli orologi solari nell'articolo dell'*Enciclopedia metodica* consacrato a tale argomento. Successore di Maraldi nella compilazione della *Connaissance des temps*, Lalande introdusse in quest'opera un gran numero di miglioramenti, vi fece uso delle migliori tavole che allora si conoscessero, cioè di quelle di La Caille pel sole e per le stelle, di quelle di Mayer per la luna, e di quelle di Halley pei pianeti, e vi espose dei metodi nuovi di cui dà la spiegazione nella sua *Esposizione del calcolo astronomico*. Verso il 1762, Delisle, pressochè ottuagenario, gli renunziò il suo impiego di professore di astronomia nel collegio di Francia: Lalande seppe dare a tale cattedra un lustro tutto nuovo, e ne adempì le funzioni con uno zelo ed una assiduità straordinaria fino agli ultimi suoi giorni, cioè per 46 anni. Nel 1764, pubblicò la prima edizione del suo gran *Trattato di astronomia*, opera utilissima e la più compiuta che fosse comparsa nella lingua francese, e che era degna sotto molti aspetti del successo prodigioso che ottenne. Fu Lalande che somministrò a Clairaut gli elementi che servirono a questo geometra, per determinare il ritorno della cometa del 1759. In quell'epoca, un terror panico s'impadronì di tutte le menti. Lalande aveva esaminato la questione di sapere se le perturbazioni che le attrazioni planetarie imprimevano al cammino delle comete potessero alterare le orbite di questi astri in modo da tagliare in qualche punto quella della terra. Ei doveva leggere all'Accademia la sua memoria intitolata: *Riflessioni sulle comete che possono avvicinarsi alla terra.* Questa lettura non ebbe luogo, e la voce subito si sparse nel pubblico che Lalande prediceva positivamente in questo scritto lo scontro della cometa colla terra o qualche altro terribile cataclismà. Il terrore giunse al colmo, e il luogotenente di polizia fu obbligato a fare stampare la memoria per disingannare il popolo di Parigi. Tale circostanza e molte altre presso a poco simili hanno non poco contribuito a render popolare il nome di Lalande.

Nel 1778 Lalande pubblicò le sue *Riflessioni sugli ecclissi del sole*, che contengono alcune osservazioni nuove ed importanti sulle circostanze di questo fenomeno. Nel 1780, si fece editore delle *Lezioni elementari d'astronomia* di La Caille, e pubblicò successivamente un numero grande di opere e di articoli nelle raccolte scientifiche fino al 1793, epoca in cui comparve il suo *Ristretto di navigazione, storico, teorico e pratico, con tavole orarie* calcolate dalla signora Lalande sua nipote.

La vita di Lalande, dopo la sua ammissione all'Accademia delle Scienze di Parigi, è troppo nota perchè noi ci accingiamo a rammentarne tutte le particolarità. Il suo amore per la celebrità lo spinse sovente a idee stranissime. Ei voleva ad ogni costo che tutti si occupassero di lui, e nessuno trascurava dei mezzi che possono attirare sopra un uomo l'attenzione del pubblico, più di-

sposto a maravigliarsi di qualche curiosa bizzarria che ad onorare il vero ialento. Ad onta dei gravi errori in che lo trassero e il suo carattere e i tristi principj che attinse nella società degli enciclopedisti, Lalande si conservò senza macchia, e si mostrò sempre virtuoso nella vita sua privata. Non cessò mai di venerare i suoi genitori, e di amare la città sua nativa, ove la sua memoria sarà per lungo tempo onorata. Morì a Parigi con una calma degna di più nobili convinzioni filosofiche, il 4 Aprile 1807, dopo aver ascoltato la lettura che abitualmente si faceva fare dei giornali, e regolato a sangue freddo tutte le disposizioni necessarie pei suoi funerali.

Se, dice Delambre autore del suo elogio accademico e della sua biografia, Lalande non ha rinnovato la scienza astronomica fino dai suoi fondamenti come Copernico e Keplero, se non si è reso immortale come Bradley per due scoperte brillanti, se non è stato al pari di La Caille un osservatore ed un calcolatore esatto, se finalmente, sotto ogni aspetto voglia considerarsi, non è stato che un astronomo di second' ordine, è d'uopo confessare che fu il primo di tutti come professore. Più di alcun altro ha saputo diffondere l' istruzione e il gusto per la scienza. Tale fu infatti Lalande, e la posterità non esagerà tale giudizio benevolo, ma giusto.

Gli scritti principali di Lalande sono i seguenti: I *Traité d' astronomie*, Parigi, 1764, 2 vol. in-4; ivi, 3.ª ediz. 1792, 3 vol., in-4; II *Abrégé d' astronomie*, Amsterdam, 1774, in-4; 2.ª ediz., Parigi, 1795, in-8; III *Astronomie des dames*, Parigi, 1795, in-18; IV *Exposition du calcul astronômique*, ivi, 1761; tale scritto, che ha per oggetto di spiegare agli astronomi e ai navigatori l' uso delle tavole contenute nella *Connaissance des tems*, è affatto dimenticato dopo la pubblicazione dell' *Astronomia pratica* di Francoeur, che sotto forma più semplice presenta il complesso di tutte le regole e di tutti i calcoli necessarj per l' uso e per la formazione di quel celebre almanacco. V *Abrégé de navigation, historique, théorique et pratique, avec des tables horaires*, Parigi, 1793, in-4; VI *Catalogue de mille étoiles circumpolaires*, ivi, 1796, in-4; VII *Bibliographie astronomique*, ivi, 1802, in-4, opera piena di erudizione e di una utilità incontestabile per la scienza; VIII *Histoire céleste française comprenant les observations de plusieurs astronomes français*, ivi, in-4; IX *Traité des canaux de navigation*, ivi 1778, in-fol.; X Centocinquanta e più memorie nella raccolta dell' Accademia di Parigi, ed un numero grande di articoli inseriti nel *Dizionario di matematiche* formante parte dell' *Enciclopedia metodica*. XI Lalande ha inoltre pubblicato la *Connaissance des tems* dal 1760 al 1775 inclusive, occupazione che riprese poi nel 1794, e continuò fino al 1807. Dal 1776 al 1788 n' era stato incaricato Jeaurat, ed a questi era poi succeduto Méchain, che nel 1793 dovè abbandonarla per attendere insieme con Delambre alla misura del meridiano. Lalande è stato pure editore: 1° della quarta edizione delle *Lezioni elementari di astronomia* di La Caille, 1780; 2° del *Trattato di navigazione* di Bouguer, 1793; 3° del *Trattato della sfera e del calendario* di Rivard; 4° degli ultimi due volumi della *Storia delle matematiche* di Montucla, ec. In questa succinta enumerazione degli scritti di Lalande abbiamo omesso quelli di minor conto, non meno che le opere estranee all' astronomia delle quali ha pubblicato un numero grandissimo. La maggior parte di esse porta disgraziatamente la manifesta impronta della cattiva direzione delle sue pretese idee filosofiche, e i progressi della ragione le hanno fatte cadere in un oblio dal quale non vogliamo contribuire a trarle.

LAMA ELASTICA. (*Geom. e Mec.*) La curva formata da una lama di molla fissata orizzontalmente per una delle sue estremità ad un piano verticale e caricata all' altra estremità da un peso che la fa piegare, fu per la prima volta considerata

da Giacomo Bernoulli, che gli diede il nome di *curva elastica*. (*Vedi* Memoire de l'Acad. des Sciences, 1703). Dopo, molti geometri si sono occupati di questo problema, e se ne trovano diverse soluzioni nel *tomo* 3, *delle Memorie di San Pietroburgo*.

Giovanni Bernoulli, ha dimostrato, nel suo *Essai sur une nouvelle théorie de la maneuvre des vaisseaux*, che questa curva è la stessa di quella che formerebbe una linea perfettamente flessibile, fissata orizzontalmente per le sue due estremità, e caricata di un fluido pesante. Per trovare la sua equazione, comincia da stabilire: 1° che il peso tendente esercita sopra ciascun punto della lama una forza proporzionale alla sua distanza; 2° che la curvatura in ciascuno punto sta in ragione inversa della forza che tende. Così prendendo la linea di direzione del peso tendente per l'asse delle y, e il punto di applicazione di questo peso per l'origine; se indichiamo con P, il peso o la forza che fa curvare la lama, il momento di questa forza sarà Px, e questo momento deve fare equilibrio all'elasticità della lama al punto x, y; dunque indicando l'elasticità assoluta della lama con b, siccome essa è in ragione inversa del raggio di curvatura a questo punto, e conseguentemente proporzionale a

$$\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

(*vedi* Curvatura) avremo l'equazione

$$Px=\frac{b\frac{d^2y}{dx^2}}{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{bdx^4d^2y}{\left(dx^2+dy^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

moltiplicando i due membri per dx, e in seguito integrando, prendendo dx per una quantità costante, otterremo

$$P\left(c+\frac{x^2}{2}\right)=\frac{bdy}{\sqrt{[dx^2+dy^2]}},$$

c essendo una costante arbitraria.

Finalmente ricavando il valore di dy da quest'equazione, viene

$$dy=\frac{P\left(c+\frac{x^2}{2}\right)dx}{\sqrt{\left[b^2-P^2\left(c+\frac{x^2}{2}\right)^2\right]}}$$

Tale è l'equazione della *lama elastica*. Non possiamo integrarla che sviluppando in serie il suo secondo membro. Per tutte le ulteriori particolarità, rimandiamo alla Meccanica del Poisson, ove la curva elastica è trattata con molta chiarezza e grandi sviluppi.

LAMBERT (Giovanni Enrico), matematico distinto ed uno dei più dotti scrittori del XVIII secolo, nacque a Mulhausen il 29 Agosto 1728. Fu uno di quegli uomini semplici e modesti che con talenti superiori passano sconosciuti nel mondo,

ma che dopo di sè lasciano una lunga striscia di luce, che perpetua la loro memoria, per la quale la posterità prende un generoso e giusto interesse. Gli storici moderni delle matematiche rammentano appena il nome di Lambert, e tale nome, sì celebre in Germania, sarebbe presso a poco ignoto in Francia, alla quale non è peraltro straniero, se un dotto lessicografo non avesse di recente vendicato questo inconcepibile oblio in una interessante notizia biografica. Noi siamo perciò fortunati di poter prendere da questo lavoro ragguardevole i tratti principali del rapido cenno che siamo per esporre.

La famiglia di Lambert era del numero di quelle che la funesta revoca dell' editto di Nantes costrinse ad uscire dalla Francia. Suo padre era un povero sarto sopraccaricato da una numerosa famiglia, che a stento poteva nutrire. Il giovine Lambert, che palesò di buon' ora le più felici disposizioni, potè appena profittare dei mezzi d' istruzione gratuita che offriva il collegio municipale di Mulhausen per farvi gli studj elementari sui principj della lingua latina e francese. Non ostante, Lambert si destinava da sè stesso all' insegnamento all' oggetto d' imporsi come un obbligo lo studio che tanto amava; e fu a tutto rigore da sè solo che giunse ad acquistare in breve tempo cognizioni abbastanza elevate per potere entrare a Basilea in qualità di segretario del dottore Iselin consigliere del Margravio di Baden. Ei non aveva allora che diciassette anni. Tale circostanza e la semplicità di carattere che lo distingueva hanno dato qualche verisimiglianza a diversi aneddoti raccolti dai suoi biografi, e dei quali è egli il soggetto. Si racconta che presentato a Federico, questo principe gli domandò con quel tuono brusco che gli era abituale: Che sapete voi? — Tutto, rispose Lambert. — Come l' avete imparato? — Da me stesso. — Siete dunque un altro Pascal? — Sì.

Comunque sia, Lambert potè almeno nella sua nuova posizione disporre di di una biblioteca, e con ardore si diede allo studio della filosofia, del diritto pubblico e soprattutto delle scienze matematiche, nelle quali un felice istinto gli fece trovare quegli esempj chiari e sicuri di cui aveva bisogno per l' applicazione delle regole del ragionamento e del metodo di procedere nella ricerca della verità che imparato aveva in Volfio, Mallebranche e Locke, sue prime guide. Ma gli mancava di poter conferire a viva voce con persone istrutte sugli oggetti delle sue letture e di trovare finalmente dei contraddittori e dei consigli illuminati nelle materie difficili delle quali si occupava. Una felice circostanza lo pose finalmente in tale posizione favorevole: nel 1748, il conte Pietro de Salis, uomo di stato, distinto per la sua istruzione, lo chiamò da Basilea a Coira per affidargli l' educazione de' suoi nipoti. Si applicò allora con nuovo ardore allo studio, e nel tempo stesso attese alla fisica, alla meccanica, all' astronomia, e alla letteratura, dovendo in tali cognizioni istruire i suoi alunni. Fu in tale epoca che cominciò a scoprire la sua vocazione di scrittore: ei si fece ben presto conoscere vantaggiosamente colla pubblicazione di alcuni articoli scientifici nei giornali del tempo, e preparò due dei suoi principali trattati: la *Logica algebrica* e l' *Organon.* Gli onori accademici cominciarono a ricompensare tale incredibile attività di spirito e i talenti che essa rivelava. Nel 1756, Lambert intraprese co' suoi alunni diversi viaggi per l' Europa; così potè far conoscenza coi dotti più illustri del suo tempo, e mantenne in seguito con essi un' attiva corrispondenza. Dopo i suoi viaggi, Lambert rimase alcun tempo a Coira presso i signori de Salis, cui non lasciò che nel 1759. Essendo stato aggregato all' Accademia elettorale di Baviera, col titolo di professore onorario, con uno stipendio e colla permissione di dimorare nei dintorni di Monaco, si stabilì ad Augusta. Ritornato a Coira nel 1761, venne utilmente impiegato nella determinazione dei confini tra il territorio dei Grigioni e il Milanese. Si recò finalmente a Berlino nel 1764. La sua

reputazione in averè preceduto in tale città, e verso la fine di quell'anno vi fu nominato membro delle celebre accademia fondata da Federico. Ricevè da questo principe frequenti attestati di stima e di affetto, e i suoi benefizj gli procurarono una esistenza onorevole fino al 1777, poichè il 25 Settembre di tale anno Lambert morì a Berlino, in età di 49 anni, con un nome illustre che è divenuto popolare in Germania.

Nel corso di questa vita sventuratamente troppo corta e di cui ci rincresce che le esigenze del nostro piano non ci permettano di far meglio conoscere tutti i particolari, Lambert ha composto un numero considerabile di opere; ma noi non parleremo qui che dei suoi lavori riguardanti le matematiche, di cui la teoria e l'applicazione furono del pari l'oggetto dei suoi studj. In tutti i suoi scritti si scorge sempre l'idea dominatrice che le matematiche sono suscettibili di applicazioni più numerose di quello che comunemente si crede: perciò Lambert si fa distinguere come uno dei più universali tra i geometri che si sono occupati delle applicazioni della scienza.

Nel campo della teoria, Lambert ha prodotto profonde ricerche sui divisori dei numeri, sulle frazioni continue, sulla teoria delle parallele, sulla trigonometria: ha dato lo sviluppo del *binomio* che porta il suo nome e che ha ottenuto il doppio onore, e di essere stato preso per tema da Eulero in quattro memorie, e di essere stato reso generale da Lagrange, che vi trovò il germe di una delle sue più belle scoperte analitiche, la serie conosciuta sotto il nome di *Serie di Lagrange*; un metodo particolarizzato di tetragonometria; i principj estesi o se si vuole gli elementi di un nuovo ramo di geometria, in cui la riga è il solo strumento permesso, e che venne in seguito chiamata *Geometria della riga*; la celebre dimostrazione dell'incommensurabilità del rapporto della circonferenza al diametro, dimostrazione che acquistò molto in eleganza e soprattutto in facilità passando nelle mani di Legendre che l'ha inserita nella sua *Geometria*. Nel campo delle applicazioni, ei perfeziona i metodi di geodesia, propone nuove idee per la projezione delle carte geografiche, e semplifica le pratiche della prospettiva; quest'ultimo lavoro è il solo che venga menzionato da Montucla. In astronomia, le ricerche di Lambert non sono meno notabili: occupandosi delle orbite delle comete, scopre il rapporto che esiste tra il tempo che impiega un astro a percorrere un arco della sua orbita, la corda di quest'arco e i due raggi vettori estremi, rapporto la cui espressione semplice ed elegante ha ricevuto nella scienza il nome di *teorema di Lambert*. In meccanica poi ha trattato gli argomenti i più importanti e i più spinosi; il problema dei tre corpi, quello delle corde vibranti, il problema balistico, gli attriti, le ruote idrauliche fermarono successivamente la sua attenzione e formano il soggetto di molte belle memorie. Il calcolo dell'intensità e delle leggi matematiche che regolano la luce, il fuoco e l'aria lo tenne pure occupato e diede origine alle sue opere intitolate: *Fotometria*, *Pirometria e Igrometria*: ei rivolse pure le sue meditazioni alle tavole di mortalità e alle tavole vitalizie, pel calcolo delle quali immaginò formule semplici ed eleganti.

Ci occorre ora di ripetere che qui non dobbiamo fare altro che enunciare i lavori principali di Lambert che sono esposti nelle opere seguenti: I *Prospettiva libera* (in tedesco), Zurigo, 1759, in-8; ed ivi, 1773, 2 vol. in-8 con molte aggiunte; II *Photometria, sive de gradibus luminis, colorum et umbrae*, Augusta, 1760, in-8; III *Insigniores orbitae cometarum proprietates*, ivi, 1761, in-8; IV *Lettere cosmologiche* (in tedesco), ivi, 1761, in-8: ne esiste una traduzione francese fatta da d'Arquier, e pubblicata ad Amsterdam, 1801, in-8; V *Scale logaritmiche* (in tedesco), ivi, 1761, in-12; VI *Supplemento al trat-*

tato di livellazione di Picard (in tedesco), ivi, 1761, in-12: questi due opuscoli sono destinati a spiegare i perfezionamenti cui Brander aveva introdotti nella livella di Picard e nelle scale inglesi (*Vedi* Gunthera); VII *Novum organon* (in tedesco), Lipsia, 1763, 2 vol., in-8; VIII *Supplementa tabularum logarithmicarum et trigonometricarum*, Berlino, 1770, in-8; IX *Igrometria* (in tedesco), Augusta, 1770, in-4; X *Beytraege zur mathematik*, Berlino, 1765 al 1772, 2 vol., in-8: raccolta di memorie interessanti su tutte le parti delle matematiche, ed in cui si trova ancora la sua *Logica algebrica*; XI *Pirometria* (in tedesco), opera postuma, Berlino, 1779, in-4. Noi omettiamo un gran numero di scritti di Lambert meno importanti e che appartengono più alle scienze fisiche che alle scienze matematiche. Questo illustre dotto ha somministrato pure una gran quantità di memorie interessanti agli *Acta eruditorum* di Lipsia, agli *Archivi* di Hindinbourg, alla Raccolta dell' Accademia di Berlino, a quella di Baviera, agli *Acta helvetica*, ec. Dal 1781 al 1787, è stata pubblicata a Berlino, in cinque volumi in-8, la corrispondenza scientifica di Lambert, col titolo di *J. H. Lambert Deutscher-Gelehr-ter-Briefwechsel.*

LAMI (Bernardo), dotto matematico, nacque a Mans nel 1645 e morì a Rouen nel 1715. Le sue opere matematiche, che utilissime riuscirono nell' epoca in cui furono pubblicate, sono: I *Traité de méchanique, de l' equilibre des solides et des liqueurs*, Parigi, 1679, in-12; II *Traité de la grandeur en général, qui comprend l' arithmétique, l' algèbre, l' analyse, ec.*, ivi, 1680, in-12; nel 1691 ne comparve una nuova edizione sotto il titolo di *Éléments de mathématiques*: si ammira in tale libro il talento dell' autore nel facilitare ai giovani lo studio di una scienza astratta come l' algebra; III *Éléments de géométrie*, ivi, 1684, in-12; ed ivi, 7.ª ediz. 1758; IV *Traité de perspective*, ivi, 1701, in-8.

LAMINATOIO. (*Mec.*). Nome generico dato alle macchine metallurgiche, composte di due cilindri, che sono destinati a schiacciare i metalli e a distenderli.

L' invenzione dei laminatoi, fatta da Oliviero Aubry circa l' anno 1540, è l' origine della superiorità incontestabile che hanno i moderni sopra gli antichi per il lavoro dei metalli. L' uso di queste macchine eminentemente semplici non è non ostante divenuto generale che molto dopo averle scoperte, poichè non è più di circa a quaranta anni che esse sono state sostituite in Inghilterra, all' uso dei martelli e dei mazzi, dei quali ci serviamo ancora nelle nostre fucine per battere il ferro a caldo, e distendere il ferro. Questo cangiamento di processi, dicono: i signori Elia di Beaumont e Dufrénoy, nella loro descrizione delle fucine dell' Inghilterra, ha prodotto un' economia considerabile nella mano d' opera, ed ha permesso di fabbricare una quantità molto maggiore di ferro, a motivo della prodigiosa rapidità delle nuove operazioni. Così, nel mentre che altre volte una ferriera, adoprando un martello, produceva appena 10 migliaia di ferro in barre per settimana, al giorno di oggi una ferriera di media grandezza, lavorando con cilindri, ne produce 150 migliaia nel medesimo tempo, senz' altro motore che una macchina a vapore. La consumazione del ferro non potendo che aumentarsi continuamente, poichè questo metallo prezioso deve sostituirsi al legno, la cui penuria si fa di già sentire, è essenziale di occuparsi seriamente di perfezionare le fucine, e specialmente quelle di Francia, sopratutto quando in quest' ultima vi sia l' intenzione di eseguire tutte le grandi linee di strade ferrate ideate, sorgenti di ricchezza nazionale e del ben essere particolare, per quello che ne dicono i prospetti degli appaltatori di Francia.

I Laminatoi sono impiegati nelle diverse fabbricazioni; essi servono agli orefici, ai Giojellieri, ai fabbricanti di oggetti incrostati di argento, alle manifatture di galloni, ec., ec. Con l' aiuto di cilindri uniti o scanalati, secondo i bisogni, si forma, con una celerità degna di osservazione delle foglie di rame, di

piombo e di stagno di tutte le grossezze; un gran numero di oggetti utili, come coltelli, chiodi, barre guarnite di ornamenti e di modanature, i quali sembrerebbero esigere un lavoro lungo e minuzioso, sono eseguite con la maggiore facilità da questi apparecchi, dei quali possiamo vedere la descrizione nel tomo VI *de la Mécanique appliquée aux Arts*, del signor Borgnis.

LANA-TERZI (P. Francesco), celebre fisico e matematico italiano, nato a Brescia il 13 Dicembre 1631, entrò giovanissimo nell' ordine dei gesuiti. Quantunque coltivasse le belle lettere, e con successo insegnasse la rettorica in varie città d' Italia, la sua inclinazione lo portava più particolarmente allo studio della chimica, della fisica e della meccanica, nelle quali scienze ebbe a maestro il celebre Kircher. Dopo che ebbe professato alcun tempo con molta reputazione le matematiche a Ferrara, si ritirò nella città sua nativa, ove morì il 26 Febbrajo 1687, dopo avervi fondato un' accademia scientifica, che peraltro poco sussistè dopo la morte del suo fondatore. Le opere che hanno acquistato celebrità al p. Lana sono le seguenti: I *Prodromo, ovvero saggio di alcune invenzioni nuove, premesso all' arte maestra, opera che prepara il p. Francesco Lana*, Brescia, 1670, in-fol. Fra gl' innumerabili segreti che intorno a tutte le scienze e a tutte le arti il p. Lana insegna in quest' opera, trovasene uno che lo ha fatto considerare siccome il primo autore di una scoperta, la quale iterata verso la fine del secolo decimottavo ne formò lo stupore, nè serve più che pei divertimenti del decimonono, quella dei palloni aereostatici. Egli infatti vi descrive una barca volante di sua invenzione, sospesa a quattro globi composti di lastre di metallo, dai quali sia estratta l' aria per renderli più leggeri di un egual volume di aria atmosferica. Ne fu parlato in quel tempo con molto calore nel *Collegium physicum experimentale* di Sturmio. Leibnitz fece intorno a ciò dei calcoli che si possono vedere nella sua *Hypothesis physica nova*: egli approvava i fondamenti di quelli del p. Lana, ma dubitava che l' esperimento potesse corrispondervi. Intorno alla parte che è dovuta al p. Lana nella invenzione dei globi aereostatici si potranno consultare: *La descrizione degli esperimenti della macchina aereostatica* di Faujas de Saint-Fond, 1783; *La storia dell' aereostatica* di Cavallo; ed altre opere citate all'articolo Aerostazione. II *Magisterium naturae et artis, Opus physico-mathematicum P. Fr. Tertii de Lanis in quo occultiora naturalis philosophiae principia manifestantur*, Brescia, 1684, 1686, e Parma, 1692, 3 vol. in-fol. È la spiegazione del *Prodromo*, e doveva comprendere nove volumi: gli ultimi sei però non vennero mai in luce, e il terzo, pubblicato dopo la morte dell' autore, è rarissimo.

LANDEN (Giovanni), celebre geometra inglese, nato nel Gennajo 1719 a Peakirk, presso Peterborough, e morto il 15 Gennajo 1790 a Milton. La pubblicazione di un' opera avente per titolo: *Mathematical Lucubrations* cominciò la reputazione europea di questo dotto, già vantaggiosamente conosciuto in Inghilterra per una memoria sopra diverse proprietà del circolo e delle curve coniche, inserita nelle *Transazioni filosofiche* per l' anno 1754. Quest' opera, che contiene una moltitudine di bellissimi teoremi relativi alla rettificazione delle linee curve, alla sommazione delle serie, alla integrazione delle equazioni differenziali e ad altri argomenti di matematiche sublimi, fu a breve intervallo seguita da altri lavori importanti, nel numero dei quali dobbiamo particolarmente distinguere una memoria intitolata: *Specimen of a new method of comparing curvilineal areas*, nelle *Transazioni filosofiche* per il 1767. Eletto nel Gennajo 1766 membro della Società Reale di Londra, Landen non si addormentò sul seggio accademico, e le sue ricerche posteriori sulla sommazione delle serie convergenti, e sulle leggi del moto di rotazione gli assegnano un posto distinto tra i matematici del XVIII secolo sì fertile in sommi geometri.

Landen non è noto in Francia che per una scoperta geometrica assai singolare e inaspettata: consiste essa nell'aver trovato che un arco iperbolico qualunque è sempre eguale a due archi ellittici assegnabili; verità dimostrata in seguito in un modo molto più semplice da Legendre nella sua *Teoria delle funzioni ellittiche*. Ha menato altresì gran rumore il suo tentativo di sostituire al metodo delle flussioni, fino allora seguito scrupolosamente dai geometri inglesi, un altro metodo puramente algebrico o elementare, cui chiama *analisi residuale*. Secondo questo metodo, invece di fare uso delle differenze infinitamente piccole delle quantità variabili, Landen considera i valori differenti di queste quantità, che egli eguaglia in seguito, dopo aver fatto svanire il fattore che tale eguaglianza rende nullo: si consulti la sua memoria intitolata: *The residual analysis, a new branch of the algebric art*, nelle *Transazioni filosofiche* del 1764. Quest'analisi residuale, i di cui metodi imbarazzanti e complicati fanno perdere al calcolo differenziale i suoi principali vantaggi matematici, cioè la semplicità e l'estrema facilità delle operazioni, deve oggi a riporsi nel numero di tutti quei metodi indiretti che in questi ultimi tempi hanno voluto usurpare il posto del calcolo infinitesimale, e il cui valore riposa tutto su quanto essi tolgono implicitamente e a loro insaputa dai principj superiori di questo calcolo.

L'ultima opera di Landen stampata in una raccolta di varie sue memorie pubblicate in due volumi poco prima della sua morte, contiene tra gli altri oggetti importanti la spiegazione e la causa di un errore commesso da Newton nella soluzione del celebre problema del movimento degli equinozj. Si sa che d'Alembert ha dato il primo la soluzione rigorosa e completa di questo problema.

LANGE (Guglielmo), professore di matematiche a Copenaghen, nato nel 1622 e morto nel 1682, ha pubblicato: I *De annis Christi libri duo*, Leida, 1649, in-4: opera profonda, dalla quale Grevio ha estratto il frammento, *De vetere anno Romanorum*, inserito nel Tomo VIII del suo *Thesaurus antiquitatum romanarum*; II *Exercitationes mathematicae VII*, *de annua emendatione et motu apogaei solis*, Copenaghen, 1650, in-4; III *De veritatibus geometricis*, ivi, 1656, in-4.

LANSBERG (Filippo), matematico ed astronomo nato nella Zelanda nel 1561, morì a Middelburgo nel 1632, dopo aver pubblicato parecchie opere, delle quali le più importanti sono: I *Geometria triangulorum*, 1591; 2.ª ediz. aumentata, Amsterdam, 1631, in-4; II *Progymnasmata astronomiae restitutae*, Middelburgo, 1619, in-4; III *Progymnasmatum astronomiae institutae liber I, de motu solis*, ivi, 1628, in-4; IV *Commentationes in motum terrae diurnum et annuum, et in verum adspectabilis coeli typum*, ivi, 1630, in-4; V *Uranometriae libri tres*, ivi, 1631, in-4; VI *Tabulae motuum coelestium perpetuae*, ivi; 1632, in-fol.; VII *Cyclometriae novae libri II*, ivi, 1628, in-4; VIII *In quadrantem tum astronomicum, tum geometricum, nec non in astrolabium introductio*, Harlem, 1636, in fol. IX *Observationum astronomicarum thesaurus*. La raccolta di tutte le opere di Lansberg, ad eccezione di quella indicata di sopra al numero II, è stata pubblicata a Middelburgo, 1663, in-fol. Nella *Storia delle matematiche* di Montucla, Tom. II, pag 334, si legge un esame giudizioso degli scritti di tale astronomo.

LANTERNA. (*Mec.*) Pezzo d'ingranaggio il quale serve a trasmettere il moto da un albero che gira ad un altro albero.

Una lanterna si compone di cilindri in legno o in metallo inseriti circolarmente, a distanze eguali, in due piatti paralelli; questi piatti portano il nome di *torte*, e i cilindri quello di *fusi*. Il movimento è impresso alla lanterna per mezzo di una ruota i cui denti ingranano con i fusi (*Vedi* Ruota dentata.)

LANTERNA MAGICA (*Ott*). Strumento d'ottica conosciutissimo, per mezzo del

quale si fanno apparire in grande sopra un muro bianco delle figore dipinte in piccolo con colori trasparenti sopra sottili lastre di vetro. Questa macchioa è stata inventata dal p. Kircher gesoita.

Questo strumento si compone di una laoterna ordinaria, alla qoale si aggiunge on tubo armato di due lenti che hanno la proprietà di allontanare i raggi che partono dall' oggetto, di renderli divergenti, e per conseguenza di projettare sul muro opposto delle immagini molto più grandi degli oggetti. Questo tubo è adattato io modo da potervi iotrodurre i vetri dipinti tra le due lenti e il lome rinchiuso oella lanterna. La figura 1 della Tavola CLVI renda seosibile questa costruzione. Muscheobroeck uei suoi *Saggi di fisica*, e Nollet nelle sue *Lezioni di fisica* si sono occupati di tutti i dettagli della lanterna magica, il cui perfezionamento oon è sembrato ad Eulero iodegno della sua attenziooe. Si coosulti il tom. III dei *Novi commentarii* dell' Accademia di Pietroburgo.

LAPLACE (Pietro Simone), uno dei più illustri geometri moderni, nacqoe il 23 Marzo 1749 a Beaumont-en-Auge da ona famiglia di poveri e laboriosi agricoltori. Al solo suo ingegno egli è perciò debitore e dei suoi successi nella scienza, e dell' elevato grado sociale al quale è perveouto. I lavori immortali, che hanno segnalato la sua carriera, haono fatto ricercare con premura la sorgente a cui attiose egli le alte cognizioni, mediante le quali potè effettoarli. Ad onta dell' oscurità che oascoode i suoi primi anni, oscurità che quest' oomo celebre aveva la debolezza di ooo voler dissipare, lo vediamo di buon' ora primeggiare tra i suoi condiscepoli per on' attitudine particolare ad ogni ramo di sapere, e per uoa memoria prodigiosa che facile gli rendeva ogni studio. Pore i sooi primi successi furono negli studj teologici. Ei trattava coo on talento e coo ona sagacità straordinaria i ponti i più difficili delle controversie. S' ignora come dalle discussioni filosofiche passasse all' esame e alla cognizioœ dei problemi dell'alta geometria: ma nel corso di quest' opera abbiamo troppo spesso fatto vedere l' iotimo legame che oel loro priocipj esiste tra questi sviluppi della ragiooe, per partecipare dello stupore che in altri ha eccitato siffatta circostanza della vita di Laplace. Fino dall' istante io cui quest' ultima scienza ebbe fissato la sua attenzione, ei si abbandonò senza riserva all' impulso della sua inclinazione, e, come Lagrange, col qoale ebbe nella sua corsa scientifica parecchi punti di somigliaoza, non tardò a rendersi proprie le cognizioni le più elevate delle matematiche. Ei si sentì troppo ristretto nella sua provincia, desiderò di vedere e di conoscere i grandi maestri che possedeva allora la Francia e si trasferì a Parigi.

Pochi dotti sono stati costantemente felici al pari di Laplace, la coi vita non è contrassegnata da nessuna di quelle viceode che hanno turbato il corso dei più bell' ingegni. Egli indirizzò a d' Alembert, che l' accolse con premura, uoa lettera interessante sul principj della meccanica; e quel celebre geometra, che allora allora avea additato Lagrange all' attenzione del re di Prussia, aprì tosto l' arringo al giovine Laplace, faceodolo nominare professore di matematiche nella scuola militare di Parigi.

Ci sarà permesso di trascurare alcone delle particolarità della vita e dei lavori di Laplace per occuparci uoicamente di quelle delle sue opere che hanno maggiormente cootribolto all' alta sua repotazioue, e che sono i suoi veri titoli alla immortalità. Possessore delle cognizioni le più estese nella scienza dei numeri, aveva già risoluto varie questiooi principali dell' astronomia teorica; e questa scienza sublime divenne lo scopo costaote e pressochè unico de' suoi sforzi o de' suoi lavori. Egli aveva concepito on piano immenso, degno del suo ingegno: ei voleva rifare la teoria del cielo, coordinaodo i grandi sistemi, correggendo gli errori di cui era essa stata l' oggetto, esponendo infine le caose ancora ignote di alcuni fenomeni importanti. A questo pensiero, che tutta riempiè la vita di

Laplace, è debitrice la scienza della *Meccanica celeste*, opera ammirabile che Fourier ha ingegnosamente chiamata l'*Almagesto* di questo secolo, ma che supera quello di Tolomeo di tutta la differenza che esiste tra lo stato attuale della scienza, e gli elementi di Euclide. Laplace aveva ricevuto dalla natura tutta la forza dell'ingegno, tutta la perseveranza che poteva esigere un'impresa di tale estensione. Non solamente ei riunì nel suo almagesto del XVIII secolo tutto quello che le scienze fisiche e matematiche avevano già stabilito come incontrastabile, e che serve di fondamento all'astronomia, ma ha aggiunto a questo ramo del sapere scoperte fondamentali, che gli sono proprie, e che erano sfuggite alle indagini de' suoi predecessori.

Così, si osservava nei movimenti della luna un'accelerazione di cui non sapeva assegnarsi la causa. Le prime ricerche di Laplace sull'invariabilità del sistema solare, e la sua spiegazione dell'equazione secolare della luna, lo hanno condotto a tale soluzione. Egli aveva esaminato primieramente se l'accelerazione dei movimenti lunari potesse spiegarsi supponendo che l'azione della gravità non fosse istantanea, ma sottoposta ad una trasmissione successiva, come quella della luce. Ma non potè scoprire la vera causa per tal via. Finalmente, nel 19 Marzo 1787, presentò all'Accademia delle Scienze di Parigi una soluzione chiara, inaspettata, di questa difficoltà, e provò evidentemente che l'accelerazione osservata è un effetto necessario della gravitazione universale. Questa grande scoperta rischiarò in seguito i punti i più importanti del sistema del mondo. Infatti la stessa teoria gli fece conoscere che se l'azione della gravitazione degli astri non è istantanea, bisogna supporre che essa si propaghi più di cinquanta milioni di volte più presto della luce, la cui velocità si sa bene essere di settantamila leghe per secondo. Potè altresì concludere dalla sua teoria dei movimenti lunari, che il mezzo nel quale muovonsi gli astri non oppone al corso dei pianeti che una resistenza per così dire insensibile, perchè siffatta causa dovrebbe alterare particolarmente il movimento della luna, la quale non ne risente effetto alcuno osservabile. La discussione dei movimenti lunari è stata oltremodo feconda di conseguenze importanti. Per esempio, se ne può adesso concludere che il moto di rotazione della terra sul suo asse è invariabile. La durata del giorno non ha cangiato nemmeno della centesima parte di un secondo da 2000 anni fino a questo giorno. Ma una conseguenza ancor più interessante è quella che si riferisce alla figura della terra; perchè la forma stessa del globo terrestre produce alcune ineguaglianze nel corso della luna. Tali ineguaglianze non avrebbero luogo se la forma della terra fosse perfettamente sferica. Si può determinare la quantità dello schiacciamento terrestre mediante l'osservazione dei soli movimenti lunari, e i resultati che se ne sono dedotti si accordano colle misure effettive che si sono ottenute per mezzo dei grandi viaggi geodetici all'equatore, nella regione boreale, ne l'India e in diverse altre contrade: così l'osservazione e la teoria concorrono del pari a dare un grado di certezza irrefragabile alla valutazione di questi diversi fenomeni celesti. Tale in generale è il carattere e il resultato dei bei lavori di Laplace, a cui è dovuta la maravigliosa perfezione alla quale sono giunte le teorie moderne.

Le ricerche di Laplace sull'equazione secolare della luna, e la sua bella scoperta dell'invariabilità delle distanze medie dei pianeti dal sole, erano state precedute dalla scoperta non meno importante e non meno difficile della causa delle grandi ineguaglianze di Giove e di Saturno. Le celerità angolari medie, o piuttosto i movimenti medj di questi due pianeti sono tali che cinque volte quello di Saturno è presso a poco eguale a due volte quello di Giove. Secondo i calcoli di Laplace, questo rapporto produce negli elementi delle orbite dei due pianeti quelle variazioni considerabili, i cui periodi abbracciano non meno di nove

secoli, e che sono la sorgente di quelle grandi alterazioni che gli astronomi vi hanno osservato. Il movimento medio di Saturno prova una ineguaglianza, il cui periodo è di circa centodiciannove anni, e la cui quantità, che va diminuendo per gradi insensibili, era nel 1750 di 48′ 44″. Il movimento medio di Giove, è sottoposto ad una ineguaglianza corrispondente il cui periodo è esattamente lo stesso, ma il cui valore, che ha un segno contrario, è minore nel rapporto di 3 a 7. A queste ineguaglianze fino ad ora sconosciute deve attribuirsi, dice Laplace, l'apparente rallentamento di Saturno e l'accelerazione apparente di Giove.

I movimenti medj di questi due pianeti danno luogo ad altre ineguaglianze che Laplace ha fatto egualmente conoscere. Egli ha dato una teoria compiuta del movimento dei satelliti di Giove, nella esposizione della quale si trovano i due seguenti curiosissimi teoremi: l'uno, che il moto medio del primo satellite più due volte quello del terzo è rigorosamente eguale a tre volte quello del secondo; l'altro, che la longitudine media del primo satellite meno tre volte quella del terzo è esattamente e costantemente eguale a 180 gradi. È noto altresì che Delambre ha calcolato le sue tavole per i movimenti di Saturno e di Giove dietro le teorie di Laplace.

Questo carattere di scrupolosa investigazione e di nobile perseveranza nell'esaminare sotto tutti i punti di vista possibili le questioni le più difficili, per giungere alla loro soluzione, distingue eminentemente tutti i lavori di Laplace; egli brilla soprattutto di uno splendore tutto speciale nella sua *Analisi delle probabilità*. Quivi doveva egli esercitarsi sopra una scienza di creazione moderna, il cui oggetto sovente male inteso ha potuto dar luogo a false interpetrazioni, ma le cui applicazioni sono suscettibili d'un'immensa estensione. L'ingegno di Laplace fecondò questo nuovo ramo della scienza dei numeri. Nato ad un tratto nella mente feconda di Pascal, il calcolo delle probabilità era stato coltivato da Fermat e da Huygens; Giacomo Bernoulli aveva il primo esposto la sua teoria; i cui perfezionamenti successivi erano dovuti ad une felice scoperta di Stirling e alle ricerche d'Eulero e di Lagrange. Laplace ne riunì e ne fissò i principj, ma sviluppandoli e appropriandoseli per così dire mediante una moltitudine di considerazioni nuove e felici. In tale opera, uno dei monumenti più preziosi della vita scientifica di Laplace, espose egli la sua *Teoria delle funzioni generatrici*, bella ed immensa dottrina, la cui utilità è innegabile, ed alla quale un celebre e dotto geometra, in una critica che ne ha fatta, altro in sostanza non rimprovera che l'estensione troppo grande e l'autorità troppo assoluta che si è voluto darle.

Questo rapido cenno dei principali lavori di Laplace, le cui opere sono d'altronde così diffuse, deve bastare per l'oggetto che ci siamo proposti, quello cioè di caratterizzare l'ingegno dei grandi geometri. Non entreremo nemmeno nelle particolarità della vita politica di quest'uomo celebre, quantunque abbia essa servito di testo a non poche accuse sovente più appassionate che giuste. Dobbiamo soltanto aggiungere che nessuno degli onori pubblici, di cui erasi reso degno per la superiorità de' suoi talenti, è mancato alla sua persona. Membro dell'Istituto alla creazione di quel corpo scientifico, fu, dopo il 18 Brumajo, chiamato per un istante al ministero dell'interno. » Geometra di primo ordine, » ha scritto in seguito Napoleone in proposito di questa circostanza, Laplace non » tardò a mostrarsi amministratore più che mediocre: al suo primo lavoro mi » accorsi subito che mi era ingannato. Laplace non vedeva nessuna questione » sotto il suo vero punto di vista; dappertutto cercava delle sottigliezze, non » aveva che idee problematiche, in somma portava nell'amministrazione lo spi» rito degl' *infinitamente piccoli* ». Napoleone può avere avuto ragione senza che la reputazione di Laplace possa in nulla risentirne; ma bisogna confessare che

vi è una contradizione manifesta tra questo giudizio severo dell' imperatore, e le funzioni pubbliche che affidò al dotto illustre che ne era il soggetto. Infatti Laplace sedè nel senato, e fu nominato vice-presidente di quell' assemblea. Dobbiamo ancora rammentare che il calendario gregoriano fu ristabilito dietro un suo rapporto: fu fatto in seguito grande ufficiale della Legione di Onore, grande ufficiale dell' ordine della riunione, conte dell' impero, e, sotto la restaurazione, pari di Francia col titolo di marchese. Laplace apparteneva pure a tutte le grandi Accademie dell' Europa. Fino ad un' età avanzatissima conservò la memoria straordinaria che lo aveva fatto distinguere fino dalla sua prima giovinezza. L'orgoglio eccessivo che gli è stato rimproverato „ che forse non era che una stima fondata di sè medesimo, ed una giusta considerazione del suo merito elevato, non si palesò almeno in lui all' ora estrema in cui l' uomo si spoglia liberamente di tutte le illusioni che possono averlo per lungo tempo accieeato. Le persone che assistevano agli ultimi suoi momenti rammentandogli i titoli della sua gloria e le immense sue scoperte, ei rispose: » Ciò che sappiamo è poco, ciò che ignoriamo è immenso ». Laplace morì a Parigi il 7 Marzo 1827. Il suo elogio fu letto da Fourier all' Accademia delle Scienze, nella quale la sua perdita lasciava un gran vuoto.

Si hanno di lui le seguenti opere: I *Théorie du mouvement et de la figure elliptique des planètes*, Parigi, 1784, in-4; II *Théorie des attractions des sphéroides et de la figure des planètes*, ivi, 1785, in-4; III *Exposition du système du monde*, ivi, 1796, 2 vol., in-8; 1799, in-4; 1813, in-4, 5.ª ediz. rivista dall' autore, 1824, in 4; 6.ª ediz., 1835, in-4; IV *Traité de mécanique céleste*, ivi, 1798, 2 vol. in-4; tomo III, 1803; tomo IV, 1805; tomo V, 1825; V *Théorie analytique des probabilités*, ivi, 1812, in-4; 3.ª ediz. 1820, in-4; VI *Essai philosophique sur les probabilités*, ivi, 1814, in-8; 6.ª ediz. 1840, in-8; VII *Precis de l'histoire de l'astronomie*, ivi, 1821, in-8; VIII *Quatrième supplément à la théorie des probabilités*, ivi, 1825, in-4. Laplace ha somministrato inoltre un numero grande di memorie all' Accademia delle Scienze di Parigi, all' Istituto, e al Giornale della Scuola politecnica.

LATITUDINE (*Geogr.*). Si dà questo nome alla distanza di un luogo terrestre dall' equatore della terra, misurata sul meridiano di questo luogo. In altri termini, è l' arco del meridiano di un luogo compreso tra questo luogo e l' equatore.

Per determinare la posizione di un punto sopra una superficie, in generale è necessario di riferirlo a qualche linea condotta su questa superficie e la cui posizione sia fissa e data; così, in geografia, si sceglie come linea fissa l' equatore della terra, che è un circolo massimo immaginario situato ad egual distanza dai due poli, e che per conseguenza si trova nel piano dell' equatore della sfera celeste (*Vedi* ARMILLARE); s' immagina quindi che per ciascun punto della superficie della terra passi un circolo massimo perpendicolare all' equatore, e questo circolo che passa pure pei poli si chiama il *meridiano* del punto terrestre, e corrisponde al *meridiano celeste*, vale a dire al circolo massimo della sfera celeste, che passa pei poli della sfera e per lo zenit del punto. Si sceglie inoltre un meridiano determinato, che si chiama il *primo meridiano*, e al quale si riferiscono tutti gli altri, misurando la loro distanza da questo sull' arco dell' equatore compreso tra essi. Allora la posizione di un punto qualunque della superficie della terra si trova interamente determinata, quando si conosce: 1° la grandezza dell' arco del meridiano compreso tra questo punto e l' equatore, che è ciò che si dice la *latitudine* del punto; 2° l' arco dell' equatore compreso tra il meridiano del punto e il primo meridiano, che è ciò che dicesi la *longitudine* di questo punto (*Vedi* LONGITUDINE).

Se si rappresenta con EAP (*Tav.* CLVI, *fig.* 2) il meridiano terrestre di un punto A della superficie della terra, e con HZH′ il meridiano celeste corrispondente, il punto Z, determinato da una perpendicolare TZ all'orizzonte razionale HH′, sarà lo zenit di A; e se TP′ rappresenta l'intersezione del piano dell'equatore con quello del meridiano, l'arco AE, distanza del punto A dal punto E in cui il meridiano terrestre incontra l'equatore, sarà la *latitudine* di A; ma quest'arco AE misura l'angolo P′TZ, che può essere egualmente misurato dall'arco ZP′ del meridiano celeste compreso tra lo zenit Z e il punto P′ dell'equatore celeste; così gli archi AE e ZP′ avranno lo stesso numero di gradi, donde segue che la *latitudine* espressa in gradi è eguale all'arco del meridiano celeste, compreso tra lo zenit e l'equatore, ed espresso egualmente in gradi. La ricerca della latitudine di un punto terrestre si riduce dunque in ultima analisi a quella della distanza dello zenit di questo punto dall'equatore celeste. Ora, indicando con P uno dei poli della terra, e con E′ il polo celeste corrispondente; l'arco P′E′, compreso tra questo polo e l'equatore, è eguale al quarto della circonferenza, o, il che è lo stesso, è un angolo di 90° sessagesimali; lo stesso devo dirsi dell'arco ZH′, compreso tra lo zenit e l'orizzonte, così si ha

$$P'E' = ZH',$$

e sottraendo da questi due archi l'arco ZE′, che è comune ad entrambi, si ottiene

$$P'E' - ZE' = ZH' - ZE', \quad \text{o} \quad P'Z = E'H'.$$

Di qui si conclude che *la latitudine di un luogo terrestre è eguale all'altezza del polo al di sopra dell'orizzonte di questo luogo.*

Siccome i gradi dell'arco del meridiano si contano cominciando dall'equatore, così le latitudini si distinguono in *settentrionali* e in *meridionali* secondochè i luoghi ai quali si riferiscono sono situati nell'emisfero settentrionale o nell'emisfero meridionale. La latitudine ha sempre la medesima denominazione del polo elevato sull'orizzonte.

La cognizione della latitudine dei luoghi è della massima importanza nella geografia, nella navigazione e nell'astronomia. All'articolo ALTEZZA DEL POLO abbiamo veduto con qual metodo possa essa determinarsi: ma non sarà qui inopportuno l'entrare in alcune particolarità che non potevano inserirsi in quell'articolo.

Qualunque sia la figura della terra, deve ritenersi che la latitudine di uno dei suoi punti è sempre l'angolo che la verticale condotta per questo punto fa col piano dell'equatore. Il punto in cui la verticale incontra la sfera celeste che ha per centro il centro stesso della terra si chiama *zenit apparente*. Il raggio terrestre poi corrispondente al piede della verticale o al luogo dell'osservatore, prolungato indefinitamente, incontra la sfera celeste in un punto che si dice *zenit vero*. Finalmente l'angolo che questo raggio fa col piano dell'equatore si chiama *latitudine geocentrica*: perciò questa latitudine è eguale alla latitudine geografica meno l'angolo della verticale col raggio terrestre, perchè la terra è schiacciata ai poli.

Sia H l'altezza del polo e G la latitudine geocentrica corrispondente; si ha per conseguenza

$$G = H - \frac{\alpha \operatorname{sen} 2H}{\operatorname{sen} 1''},$$

indicando con α lo schiacciamento della terra.

La latitudine geocentrica è un elemento del calcolo del luogo apparente dei pianeti e della loro parallasse in ascensione retta e in declinazione. Si vedano queste parole nel Dizionario.

Da che si conosce il circolo ripetitore, la latitudine geografica si ottiene con gran precisione per mezzo delle distanze zenittali circum-meridiane delle stelle o del sole, vale a dire per mezzo delle osservazioni fatte pochi istanti avanti e dopo il passaggio pel meridiano. Sia P (*Tav.* CLVI, *fig.* 3) il polo del mondo, D la declinazione dell'astro E, Z la sua distanza zenittale ridotta al centro della terra, se ciò sia necessario (*Vedi* Parallassa), e H la latitudine cercata. Nel triangolo sferico ZEP, il lato ZE è eguale a Z, ed il lato EP è eguale a $90^\circ - D$, quando la declinazione è boreale: per la proprietà fondamentale di questo triangolo, si ha

$$\cos Z = \operatorname{sen} H \operatorname{sen} D + \cos H \cos D \cos P \quad \ldots \quad (1).$$

Ma siccome l'astro E si suppone vicinissimo al meridiano, è evidente che quando vi passerà si avrà

$$Z + 90^\circ - H - x = 90^\circ - D,$$

essendo x una quantità piccolissima. Così in questo caso si ha

$$Z = H - D + x, \quad \text{o} \quad H = Z - x + D,$$

e l'equazione (1) diviene

$$\cos(H - D + x) = \operatorname{sen} H \operatorname{sen} D + \cos H \cos D \cos P.$$

Sviluppando il primo membro in virtù della relazione

$$\cos(A + x) = \cos A \cos x - \operatorname{sen} A \operatorname{sen} x,$$

ed osservando che

$$\cos P = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2} P,$$

si avrà

$$\cos(H - D) \cos x - \operatorname{sen}(H - D) \operatorname{sen} x = \cos(H - D) - 2 \cos H \cos D \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2} P;$$

e siccome per supposizione la riduzione x al meridiano è piccolissima, si potrà fare

$$\cos x = 1 \quad \text{e} \quad \operatorname{sen} x = x$$

e quindi si avrà

$$x = \frac{2 \cos H \cos D \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2} P}{\operatorname{sen}(H - D) \operatorname{sen} 1''}.$$

Ma questa riduzione, che è espressa in secondi di grado a motivo del fattore sen 1'' nel denominatore, non potrebbe calcolarsi senza aver prima un valore approssimato della latitudine H, il che d'altronde è sempre possibile. Quanto all'elemento il più essenziale a determinarsi, cioè l'angolo orario P, si ottiene sottraendo dall'ora del passaggio, data dal pendolo, l'ora dell'osservazione, tanto se il pendolo è regolato sul tempo sidereo, quanto se segna il tempo medio del sole. Infine è utile, quando l'osservazione si fa sul sole, di fare per quanto è possibile lo stesso numero di osservazioni avanti e dopo il passaggio pel meridiano e in tempi egualmente distanti dal mezzogiorno, per evitare l'incomodo di dover calcolare il movimento dell'astro in declinazione.

L'uso del circolo ripetitore procurando diverse distanze zenittali avanti e dopo il passaggio pel meridiano, si calcolano le riduzioni x corrispondenti, e il medio della loro somma è la riduzione da assegnarsi alla distanza zenittale media

osservata, per avere la distanza meridiana $Z - x$. Bene inteso però che la prima distanza deve essere aumentata dalla refrazione dipendente dallo stato del barometro e del termometro, diminuita della parallasse, e corretta convenientemente del semidiametro apparente del sole, quando si osserva uno dei suoi orli.

Questo metodo, di cui Delambre e Méchain hanno fatto sì numerose applicazioni nell' occasione di misurare l' arco del meridiano in Francia, si trova spiegato in tutte le sue più minute particolarità nel secondo volume della *Base del sistema metrico decimale*, e nel *Trattato di Geodesia* di Puissant, opera nella quale si trova una tavola di riduzione al meridiano che abbrevia considerabilmente il calcolo.

Il doppio passaggio della stella polare fa in generale conoscere la latitudine con molta precisione: pure gli astronomi non la considerano come definitiva che quando sia stata verificata mediante l' osservazione di qualche stella situata al sud dello zenit della stazione e presso a poco alla stessa distanza della stella polare. In ogni caso la semisomma dei due resultati è la latitudine vera, e la loro semidifferenza è ciò che si dice l' *errore costante* dello strumento.

Chiuderemo quest' articolo con un esempio. Il 17 Dicembre 1798, Méchain fece la seguente osservazione all' Osservatorio Reale di Parigi, pochi momenti prima del passaggio della stella polare pel meridiano

Ora del passaggio secondo il pendolo regolato sol tempo sidereo . . . 0^{or} 51′ 46″				Angoli orarj	Riduzioni al meridiano
1ª osservazione	0^{or}	19′	40″	32′ 6″	— 64″,34
2ª osservazione	0	21	30	30 16	57 ,22
3ª osservazione	0	23	31	28 15	50 ,26
4ª osservazione	0	26	23	25 23	40 ,26

4 osservazioni				— 212 , 08
Riduzione media	$x =$			— 53 , 02
Arco semplice	$Z = 39°$	24′	7″	,81
Distanza media apparente	39	23	14	,79
Refrazione	+		46	,43
Distanza meridiana vera	39	24	1	,22
Distanza polare apparente	1	45	40	,03
Colatitudine	$90° - H = 41$	9	41	,25
Latitudine	$H = 48$	50	18	,95

Questo resultato, dato da una sola e corta serie di osservazioni, non eccede che di 5″,55 la latitudine che Méchain trovò con 2764 osservazioni.

LATITUDINE (*Astron.*). In astronomia si chiama *latitudine* di un astro la sua distanza dall' eclittica, misurata sull' arco del circolo massimo che passa per que-

at' astro e pei poli dell'ecclittica. Donde si vede che le latitudini astronomiche sono assai differenti dalle latitudini geografiche. Abbiamo già spiegato l'uso dei diversi circoli della sfera celeste che servono a determinare la posizione degli astri, perciò rimanderemo il lettore agli articoli Armillare e Catalogo.

Latitudine geocentrica. Dicesi così la latitudine di un pianeta quale vien veduto dal centro della terra.

Siccome pare che il sole si muova nell'ecclittica stessa, così esso non ha mai latitudine, ovvero la sua latitudine è costantemente o°. Ma i pianeti ne hanno una che varia cominciando da o°, vale a dire dai punti in cui le loro orbite tagliano l'ecclittica, fino ad una grandezza eguale all'inclinazione del piano dalle loro orbite su quello dell'ecclittica. Questa circostanza ha dato luogo ad immaginare lo *Zodiaco*, fascia o zona della sfera celeste che contiene tutte le orbite dei pianeti. *Vedi* Zodiaco.

Latitudine eliocentrica. È la latitudine veduta dal sole, o quale apparirebbe ad un osservatore che fosse collocato nel centro del sole. Questa latitudine è sempre la stessa quando il pianeta si trova nello stesso punto della sua orbita, mentre la *latitudine geocentrica* varia al variare della posizione della terra rispetto al pianeta.

Le latitudini delle stelle non provano altre alterazioni che quelle che sono prodotte dall'aberrazione della luce (*Vedi* Aberrazione), e da una piccola variazione detta *secolare*, cagionata da uno spostamento lentissimo dell'ecclittica. *Vedi* Perturbazione.

LATO. (*Geom.*). Si chiama lato di una figura, qualunque linea retta che fa parte del suo perimetro.

I lati di un angolo sono le due rette che lo formano. *Vedi* Angolo.

LEBLOND (Guglielmo), matematico francese, nacque a Parigi nel 1704 e morì nella stessa città nel 1781. Essendo stato incaricato d'insegnare gli elementi delle matematiche e dell'arte della guerra ai paggi e ai principi reali di Francia, ebbe luogo di conoscere quanto imperfette fossero le opere che correvano allora nelle mani de' suoi alunni; imprese a comporne delle nuove, in pari tempo chiare ed esatte, su tutte le parti delle scienze indispensabili a conoscersi da un ufiziale. I suoi trattati, che ebbero gran voga al tempo dalla loro pubblicazione, che possono anch'oggi consultarsi con frutto dai giovani militari, e che sono stati tradotti in molte lingue d'Europa, sono i seguenti: I *L'arithmétique et la géométrie de l'officier*, Parigi, 1768, 2 vol. in-8; II *Éléments de fortification*, ivi, 1768, in-8; III *Traité de l'attaque des places*, ivi, 1780, in-8; IV *Traité de la défense des places*, ivi, 1783, in-8; V *Artillerie raisonnée, contenant l'usage des différentes bouches à feu*, ivi, 1761, in-8; VI *Essai sur la castramétation*, ivi, 1748, in-8; VII *Éléments de tactique*, ivi, 1758, in-4.

LEBLOND (Augusto Saviniano), dotto e modesto matematico, nipote del precedente, morì a Parigi il 22 Febbrajo 1811. Gli scritti suoi principali sono: I *Sur la fixation d'une mesure et d'un poids*, Parigi, 1791, in.8; II *Sur le système monétaire*, ivi, 1798, in-8; III *Cadrans logarithmiques adaptés aux poids et mesures*, ivi, 1799, in-8. Tale strumento è composto di tre circoli concentrici, il che potrebbe dargli talvolta qualche vantaggio sull'*Aritmografo* inventato da Gattey verso l'epoca medesima e senza che quest'ultimo conoscesse il lavoro di Leblond (*Vedi* Gattey): ma l'*Aritmografo* è assai più portatile, e ne è meglio intesa la costruzione, quantunque non vi sia che un circolo mobile (*Vedi* Gunter). Leblond fu il primo che nel 1790 propose di dare alla nuova unità lineare il nome di *metro*.

LECCHI (Giovanni Antonio), distinto idraulico italiano, nato a Milano il 17 Novembre 1702, entrò di sedici anni nell'ordine de' gesuiti, insegnò con onore le

belle lettere in Vercelli ed a Pavia, ed in seguito fu fatto professore di eloquenza a Milano nel collegio di Brera. Nominato nel 1739 alla cattedra di matematiche nell' università di Pavia, vi professò tale scienza con somma lode per venti anni. La sue reputazione giunse fino all' imperatrice Maria Teresa, che lo chiamò a Vienna e lo fece matematico di corte. Il papa Clemente XIII lo richiamò in Italia, perchè assumesse la direzione dei grandi lavori idraulici relativi all' addirizzamento dell' alveo del Reno e degli altri fiumi che attraversano il Bolognese, il Ferrarese e la provincia di Ravenna. Lecchi se ne occupò per sei anni, cioè fino alla morte del pontefice. Clemente XIV, che gli successe, fece continuare tale operazione conforme alle piante del dotto religioso, che ritirato si era a Milano, ove morì il 24 Agosto 1776. Tra le numerose sue opere citeremo: I *Theoria lucis, opticam, perspectivam, catoptricam complectens*; Milano 1739; II *Arithmetica universalis Newtoni, perpetuis commentariis illustrata et aucta*, Milano, 1752, 3 vol., in-8; III *Elementa geometriae theoricae et practicae*, ivi, 1753, 2 vol. in-8; IV *L' idrostatico esaminato ne' suoi principj, e stabilito nelle sue regole della misura delle acque correnti*, 1765, in-4; V *Relazione della visita alle terre danneggiate dalle acque dei fiumi di Bologna, Ferrara e Ravenna*, Roma, 1767, in-4; VI *Memorie idrostatico-storiche delle operazioni eseguite nella inalveazione del Reno di Bologna tra gli anni* 1765 *e* 1773, Modena, 1773, 2 vol. in-4; VII *Trattato dei canali navigabili*, Milano, 1776, in-4.

LECLERC (Sebastiano), ingegnere-geografo francese, nato a Metz nel 1637 e morto a Parigi nel 1714, è autore di un *Traité de géométrie théorique et pratique*, Parigi, 1669, in-8; opera che è stata tradotta in tutte le lingue d' Europa. Ha pubblicato ancora: *Système sur la vision*, Parigi, 1679, in-12, ristampato nel 1714 col titolo di *Discours touchant le point de vue*, scritto in cui combatte alcuni principj di Cartesio.

LEFÈVRE (Giovanni), nato a Lisieux nel secolo XVII da poveri genitori, sviluppò fino dall' infanzia grandi disposizioni per lo studio dell' astronomia. Raccomandato a Picard, andò a Parigi ove nel 1682 fu ammesso nell' Accademia delle Scienze: in seguito accompagnò Lahire nella Provenza, onde verificare la configurazione del littorale del mediterraneo, ed ebbe parte nel lavoro delle meridiane e nel livellamento del fiume Eure. Nel 1685, accusò Lahire che involato gli avesse le sue *Tavole ostronomiche*, e l' accusa si accreditò a tale che Lahire fu obbligato a giustificarsi! ma non perdonò a Lefèvre che esposto l'avesse a tanta umiliazione. Questi morì nel 1706. È autore delle seguenti opere: I *La Connaissance des tems*, dal 1684 al 1701, continuata poi da Lieutaud fino al 1730. II *Ephémérides pour les années* 1684 *et* 1685, calcolate pel meridiano di Parigi.

LEGA (*Metrologia*). Antica misura itineraria usitata in Francia, e che, sotto uno stesso nome, indica non poche lunghezze differenti. Le leghe si dividevano in *grandi*, *medie* e *piccole*, o in leghe di 20, 25 o 30 per grado terrestre. Le prime, chiamate ancora *leghe morine*, si valutavano di tese 2851 $\frac{1}{3}$ l' una; le leghe medie di 2283 tese, e più esattamente di 2281; e le piccole poi erano di tese 1900 $\frac{4}{5}$.

Oltre queste leghe conosciute generalmente in tutto il regno, ogni provincia aveva la sua lega particolare determinata in un modo affatto arbitrario, e si faceva inoltre uso per la misura delle poste di una lega di 2000 tese, detta *lega di posta*. I riformatori del sistema metrico hanno sostituito a tutte queste misure un' unità fissa, il *chilometro* (1000 metri), delle quale è da sperarsi che si estenda uso, e

che finalmente farà sparire affatto denominazioni che non hanno più relazione colle misure moderne.

Il quarto del meridiano terrestre, la cui diecimillionesima parte forma il *metro*, contenendo 90 gradi diseguali (*Vedi* TERRA *e* FIGURA DELLA TERRA), la lunghezza del *grado medio* è di metri 111111 $\frac{1}{9}$, o di chilometri 111 $\frac{1}{9}$; così

la lega di 20 per grado equivale a chil. 5 $\frac{5}{9}$ $= 5555 \frac{5}{9}$ metri

la lega media di 25 per grado . . . . . . 4 $\frac{4}{9}$ $= 4444 \frac{4}{9}$

la lega piccola di 30 per grado . . . . . 3 $\frac{703}{999}$ $= 3703 \frac{7}{10}$

la lega di posta, circa . . . . 3 $\frac{10}{11}$ $= 3898 \frac{7}{100}$

Tutte le riduzioni delle tese in metri e dei metri in tese si eseguiscono per mezzo dei rapporti generali

$$1 \text{ tesa} = 1^m,949037$$

$$1 \text{ metro} = 1^t,513074$$

determinati colla massima esattezza tra la tesa detta del *Perù* e il metro adottato definitivamente nel 1801 (*Vedi* MISURA).

LEGENDRE (ADRIANO MARIA), uno dei più profondi matematici della nostra epoca, nacque a Tolosa nel 1752. Inviato a Parigi a studiare nel collegio Mazarino, vi si fece ben presto distinguere non meno pel suo talento che per la sua assiduità. In principio le belle lettere e le matematiche cattivarono del pari la sua attenzione; ma in seguito, senza perdere il suo gusto per l'eleganza e le belle forme dello stile, si dedicò più specialmente allo studio della geometria. Marie, sotto il quale studiava, seppe distinguerlo tra i suoi alunni e si applicò a sviluppare le di lui felici disposizioni. Corrispose Legendre alle premure del suo maestro e cooperò non poco nel *Trattato di meccanica* che questi pubblicò nel 1774, e nel quale tra le altre cose che appartengono all'alunno si nota la teoria spinosissima delle forze acceleratrici esposta con rara eleganza e chiarezza matematica. Conosciuto in quel tempo da d'Alembert, ottenne col suo mezzo una cattedra di matematiche nella scuola militare di Parigi. In tale posizione potè darsi interamente allo studio delle grandi opere che allora venivano alla luce in Europa sulla scienze matematiche; e presto si vide il frutto delle sue meditazioni. Parecchie e profonde memorie sull'analisi indeterminata, sull'attrazione delle sferoidi e sulla figura dei pianeti, cha a breve intervallo diede alla luce, gli acquistarono somma reputazione.

Nominato membro dell'Accademia delle Scienze di Parigi in luogo di d'Alembert, giustificò tale onore con nuovi ed importanti lavori, fra i quali si distinguono le sue ricerche sulle funzioni ellittiche, argomento immenso e difficile al quale si applicò con una specie di predilezione, e di cui per lo spazio di quarant'anni lo troviamo solo ad occuparsi. Nel 1787 fu incaricato unitamente a Méchain e a Cassini di procedere alle operazioni necessarie per la riunione trigonometrica degli Osservatorj di Parigi e di Greenwich. Questa importante operazione astronomico-geodetica lo condusse a Londra, ove entrò in relazione coi

più celebri geometri inglesi e fu ammesso nella Società Reale. All' epoca della rivoluzione, formò parte della commissione per lo stabilimento del nuovo sistema metrico; in seguito fu nominato consigliere dell' università, e poscia membro della commissione d' istruzione pubblica e dell' ufizio delle longitudini, ed esaminatore dei candidati per la scuola politecnica. Tali impieghi non impedirono che continuasse ad applicarsi con assiduità infaticabile alle più sublimi speculazioni della scienza. Tornò a trattare l' argomento dell' attrazione delle sferoidi, fece importanti studj sulla integrazione delle equazioni a differenze parziali, immaginò il bel metodo dei minimi quadrati di cui si fa un uso continuo per trovare il medio il più probabile tra i resultati di diverse osservazioni, ampliò con nuovi e bei teoremi la difficile e vasta teoria dei numeri, e, come se tanti lavori non fossero stati sufficienti a mettarlo nel rango dei geometri di primo ordine, pubblicò i preziosi suoi *Esercizj di calcolo integrale*, in cui quasi tutto era originale, e negli argomenti già da altri trattati aggiungeva sempre qualche scoperta importante che generalizzava o rendeva più esatte le teorie. In quell' epoca, Lagrange, Laplace e Legendre formavano una specie di triumvirato matematico, che poneva la Francia alla testa del progresso della scienza. Che anzi una gran parte della gloria di Laplace riflette sopra Legendre, i cui teoremi hanno suggerito non poche idee a Laplace, e che tante volte eseguì per questo grande astronomo sviluppi analitici che tra uomini al più in Europa (Lagrange; Gauss ed egli) sarebbero stati capaci di eseguire. Membro dell' Istituto fino dalla sua creazione, Legendre fu ascritto ancora alle principali società dotte di Europa. Egli morì a Parigi il 10 Gennajo 1833 in età di oltre 80 anni.

Le opere di Legendre sono: I *Élémens de géométrie*, Parigi, 1794, in-8; ivi, 12ª ediz., 1823, in-8. Quest' opera, sebbene non possa annoverarsi tra i titoli di gloria per un matematico come Legendre, contribuì non ostante più di ogni altra a rendere il suo nome popolare in Francia, e può inoltre servire a rammentare ai dotti di un ordine superiore, che non deve sempre sdegnarsi di scendere alle opere che diconsi di compilazione: ancora con queste possuno rendersi servigi eminenti tanto col facilitare la scienza quanto col diffonderne il gusto; ancora con queste si può unire la gloria di diritto alla gloria di fatto. Siccome non vi è nessuno che non abbia veduto, e diremo quasi che non abbia studiato gli *Elementi* di Legendre, che divennero classici alla loro prima comparsa, così reputiamo inutile il parlarne. Le prime edizioni non comprendono la *Trigonometria*, aggiunta nelle susseguenti, che contengono inoltre note importanti nelle quali per mezzo dell' analisi delle funzioni si dimostrano i principali teoremi sulle paralelle e sulle figure proporzionali: II *Expose des opérations faites en France en 1787 pour la jonction des Observatoires de Paris et de Greenwich par Cassini, Méchain et Legendre, avec la déscription et l' usage d' un nouvel instrument propre à donner la mesure des angles à la précision d' une seconde*, Parigi, in-4; III *Exercices de calcul intégral sur divers ordres de transcendantes et sur les quadratures*, ivi, 1807, 3 vol. in-4. Questi esercizj, frutto di più di venti anni di assidui studj, dimostrano ad evidenza l' instancabile perseveranza di Legendre ne' suoi lavori. Troppo lungo sarebbe l' indicare anche sommariamente le scoperte analitiche e le profonde ricerche sopra un' infinità di argomenti che vi si trovano esposte. La funzioni ellittiche e gl' integrali definiti sono i soggetti che più a lungo hanno esercitato il suo ingegno: egli vi presenta ancora numerose ed importanti sommazioni di serie trascendenti e molti metodi di un uso prezioso, con molte vedute sulle rettificazioni e sulle quadrature. IV *Traité des fonctions elliptiques et des intégrales eulériennes, avec des tables pour en faciliter le calcul numérique*, Parigi, 1827, 2 vol. in-4, con un 3° volume composto di tre supplementi comparsi successivamente dal

1827 al 1832. Ci duole di non poter qui entrare in nessuna particolarità sopra le ricerche importanti relative a questo ramo di analisi di cui Legendre può in certo modo chiamarsi il creatore. Fu egli anche il solo ad occuparsene fino alle scoperte di Abel e di Jacobi, e fino al presente ciò che si ha in questa parte della scienza, ad eccezione di un piccolo numero di formule trovate sulla scorta delle sue, è tutto a lui dovuto. Infaticabile ed inaccessibile a quell'affievolimento che produce il peso dell'età, fu veduto anco nel penultimo anno della sua vita, eccitato da un teorema di Abel, sviluppare le proprietà di nuove trascendentl, ch'ei chisma *ultra ellittiche*, ed aprira una strada immensa alle future ricerche. V *Théorie des nombres*, Parigi, 1830, 2 vol. in-4. Quest'opera, pubblicata col titolo di *Essai sur les nombres*, 1.ª ediz 1798, e 2.ª ediz, 1808, seguita da un primo supplemento nel 1816 e da un secondo nel 1825, contiene i lavori dei più grandi geometri sui numeri e sull'analisi indeterminata fino alle ricerche le più moderne, e presenta a tutto rigor di termine lo stato attuale della scienza sopra un soggetto non meno interessante che vasto. VI Un numero grande di Memorie, parte inserite nella raccolta dell'Accademia delle Scienze di Parigi e dell'Istituto, e parte stampate separatamente, delle quali può vedersi la nota nell'articolo biografico consacrato a questo geometra nel *Supplemento* alla *Biografia universale*.

LEGENTIL DA LA GALAISIÈRE (GUGLIELMO GIUSEPPE GIACINTO GIOVANNI BATTISTA), astronomo francese, nato a Coutances nel 1725, fu inviato a Parigi perchè vi studiasse la teologia; ma le lezioni di astronomia di Delisle che ebbe occasione di ascoltare lo decisero a dedicarsi a questa scienza. L'assiduità sua in questo nuovo studio gli fece fare rapidi progressi, a segno che nel 1753 fu ammesso nell'Accademia delle Scienze di Parigi, alla raccolta della quale somministrò un numero grande di memorie interessanti sopra varj punti di astronomia. Avvicinandosi l'epoca del passaggio di Venere sul disco del sole, che avvenire doveva il 6 Giugno 1761, sollecitò l'onore di esser nel numero degli astronomi proposti dall'Accademia per osservare questo fenomeno in varj punti del globo. Egli fu destinato per Pondicheri, e partì da Brest il 26 Marzo 1760: ma diversi contrattempi che gli si pararono davanti e le difficoltà che incontrò nell'Indie, e motivo della guerra che allora ardeva tra la Francia e l'Inghilterra, fecero sì che Legentil si trovasse in alto mare, quando avvenne il passaggio che egli non potè scorgere che sopra il ponte di una fregata in movimento. Un secondo passaggio doveva accadere il 3 Giugno 1769; e Legentil ebbe la rara costanza di restare nell'Indie per altri otto anni, onde eseguire l'importante osservazione che gli era fallita la prima volta. Egli spese tutto questo tempo nel visitare le diverse isole dell'oceano indiano e nel raccogliere le più importanti notizie sull'astronomia di quei popoli. Le sue ricerche sulle cognizioni astronomiche dei Bramani lo posero in grado di scoprire e dimostrare che la pretesa antichità che essi danno al mondo non è che una combinazione delle rivoluzioni dell'equinozio. Intanto avvicinavasi il giorno 3 del mese di Giugno 1769. Legentil, che già da un anno erasi fermato a Pondicheri, aveva fatto tutti i preparativi per osservare a suo bell'agio: quando il cielo, che era stato sempre sereno nel mese di Maggio, divenne novoloso il giorno dell'osservazione e precisamente in tutta la durata del passaggio, nè si rischiarò che mezz'ora dopo, per poi mantenersi sereno per molti altri giorni. Desolato per tale inopinato accidente, Legentil tornò in Europa, riprese il suo posto nell'Accademia, nè cessò di arricchirne la raccolta di un numero grande di eccellenti memorie fino alla sua morte avvenuta il 22 Ottobre 1792. Legentil non ha pubblicato separatamente che la storia del suo viaggio sotto il seguente titolo: *Voyage dans les mers de l'Inde à l'occasion du passage de Venus sur le disque du soleil*, Parigi, 1779-81, 2 vol. in-4.

LEGNO. (*Mecc.*). La questione della *resistenza dei legni*, e in generale dei materiali, è tanto importante per l'architettura e la marina, che non potrebbe cadere in dubbio, che essa avesse richiamato l'attenzione degli antichi, le cui ardite costruzioni sono anche ai nostri giorni un oggetto di ammirazione. Ciò non ostante i primi fondamenti della teoria di questa resistenza non sono stati stabiliti che ad un'epoca molto posteriore ai loro brillanti lavori, poichè questi fondamenti sono interamente dovuti al genio del Galileo il quale, tanto in questa questione quanto in un'infinità di altre non meno interessanti, ha per il primo saputo portarvi la luce della Geometria.

La soluzione di questo grand'uomo è certamente lontana dall'essere rigorosa, ma essa ha tracciato la strada, ed egli ha avuto il merito di dedurne principii incontestabili, dei quali avanti di esso, neppure si sospettava l'esistenza.

Per dare un'idea della natura del problema, supponiamo che un prisma quadrangolare di legno AE (*Tav.* CLVII, *fig.* 1) sia incastrato in un muro mediante una delle sue estremità, in un modo invariabile, e che si carichi di pesi la sua estremità libera E, fintantochè si determini la sua rottura. La linea AB, dice il Galileo, diventa un punto di appoggio, e ciascuna fibra del legno è sollecitata dal peso seguendo un braccio di leva eguale alla lunghezza DE del pezzo, nel mentre che essa resiste con un braccio di leva tanto più corto, quanto essa è più vicina all'appoggio. La resistenza che ciascuna fibra oppone alla rottura è dunque proporzionale alla sua distanza da questo appoggio, e ne resulta che la somma delle resistenze sta a ciò che essa starebbe se ciascuna di essa fosse eguale alla più grande, come la distanza del centro di gravità della figura ABCD all'appoggio AB sta all'asse di questa figura. Quanto alla più grande resistenza, il suo rapporto col peso è eguale al rapporto inverso dei bracci di leve DC e DE. Così, le resistanze di due prismi di legno della medesima base sono in ragione inversa delle loro lunghezze, e segue il medesimo delle resistenze di due cilindri della medesima base, perchè il centro di gravità di questa base sta al suo centro ovvero al mezzo del suo diametro.

Il Galileo concluse da questa teoria che corpi simili non hanno forze proporzionali alle loro masse per resistere alla loro rottura, poichè le masse crescono come i cubi dei lati simili, nel mentre che le resistenze oon crescono che come i quadrati di questi lati. Vi è dunque un termine di grandezza al di là del quale un corpo si romperebbe al minimo urto aggiunto al suo proprio peso, ovvero da questo peso medesimo, nel mentre che un corpo simile, ma di una minor massa, potrebbe resistere al suo ed anche ad uno sforzo estraneo. Da ciò segue, dice il Galileo, che una macchina che fa il suo effetto in piccolo manca quando essa è eseguita in grande, e rovina sotto la sua propria massa. La natura, egli aggiunge, non potrebbe fare alberi o animali smisuratamente grandi senza essere esposti ad un simile accidente, ed è per questo che gli animali più grandi vivono in un fluido che gli toglie una parte dei loro pesi.

Un'altra conseguenza osservabilissima di questa teoria, si è che un cilindro vuoto resiste più che se esso fosse pieno; verità che ha fatto dire al Montucla: » È mi sembra per questa ragione, e per conciliare nello stesso tempo la leggerezza e la solidità, che la *natura* ha fatto vuoti gli ossi degli animali, le » penne degli uccelli e i tronchi di molte piante. » Alla parola natura, la quale non ha alcun senso, non si può che ammirare quest'ingegnosa estimazione della saviezza infinita del Creatore.

L'ipotesi del Galileo sopra la resistenza delle fibre, proporzionale alla loro distanza dal punto di appoggio, non potrebbe essere esatta che nel caso in cui le fibre si rompessero bruscamente senza provare alcuna estensione, il che non può aver luogo a motivo della loro elasticità. Ma questa circostanza, indicata tosto

dal Leibnizio e dal Mariotte, non influisce che sopra le determinazioni numeriche, e non sopra le conseguenze generali, che abbiamo riferite.

La resistenza delle diverse specie di legni varia dentro limiti molto estesi; essa comparisce essere sensibilmente proporzionale alla loro gravità specifica, e possiamo stabilire che due pezzi perfettamente eguali offriranno resistenze, il di cui rapporto sarà lo stesso di quello dei loro pesi. La costituzione fisica del legno con fibre soprapposte longitudinalmente rende ragione di questo fenomeno, poichè più queste fibre sono numerose in uno spazio dato, più il legno ha forza e più la sua gravità specifica è considerabile. La tavola delle gravità specifiche data alla parola Densità può dunque far conoscere quali sono i legni che, comparativamente, resisteranno di più, ma non bisogna perdere di vista che molte circostanze come i difetti del legno, i nodi, i tarli, le direzioni oblique delle fibre, il grado di diseccazione, la natura del terreno che ha prodotto gli alberi, la loro età, ec., ec., sono altrettante cause capaci a modificare la resistenza.

Un fisico tedesco il signor Karmasch recentemente ha preteso che il modo ordinario di valutare il peso specifico dei legni, il quale consiste a pesargli nell'acqua, è difettoso, perchè il liquido s'introduce nei pori del legno e aumenta il suo vero peso. Egli ha pesato con la massima esattezza dei paralellepipedi delle differenti specie di legno seccati all'aria, lavorati con la maggior cura, e dei quali esso ha misurato il volume con un'estrema esattezza. Questi pezzi erano generalmente da 10 a 24 pollici cubi di Vienna. Riporteremo in questo punto alcuni dei suoi resultamenti, dei quali esso ha pubblicato una tavola nell'anno 1834 (*jahrb de Polyt. Inst. in Vien.*); essi potranno servire di termine di paragone per esperienze del medesimo genere.

Specie di Legno	Pesi Specifici
Bosso	0,942
Susino	0,872
Biancospino	0,871
Betulla di Svezia	0,799
Pino	0,763
Faggio	0,750
Tasso	0,744
Betulla	0,738
Melo	0,734
Pero	0,732
Carpino	0,728
Ulivo (Ceppo)	0,676
Frassino	0,670
Detto	0,669
Noce	0,660
Quercia	0,650
Frassino	0,645
Olmo	0,568
Tiglio	0,559
Castagno	0,551

La resistenza che i legni oppongono ai pesi che sollecitano la loro rottura ri-

ceve nomi differenti secondo la differente posizione dei pezzi; si chiama *resistenza orizzontale* quando i pezzi di legno hanno le loro fibre paralelle all' orizzonte, e che il carico agisce verticalmente sopra di esse; *resistenza verticale*, quando il carico pesa nel senso delle fibre e al vertice del pezzo situato verticalmente; finalmente, *aderenza delle fibre* quando il pezzo è sospeso verticalmente e caricato nella sua parte inferiore. Esaminiamo successivamente questi tre casi principali.

I. *Resistenza orizzontale*. Un pezzo di legno può mantenersi in una posizione orizzontale in tre modi differenti: 1°. ciascuna delle sue estremità sia incastrata solidamente in un fabbricato solidissimo (*Tav.* CLVII *fig.* 2); 2°. Questo pezzo sia solamente sostenuto sopra due punti di appoggio (*fig.* 3); 3°. Una sola delle sue estemità sia incastrata (*fig.* 1). Le resistenze di uno stesso pezzo in queste tre disposizioni stanno tra loro come i numeri 4, 2, 1, vale a dire che se nel primo caso essa esige un peso di 4000 chilogrammi per rompersi, basterà un peso di 2000 chilogrammi nel secondo e solamente un peso di 1000 chilogrammi nell' ultimo. Così la resistenza essendo conosciuta in uno qualunque di questi tre casi, possiamo facilmente concludere qual' essa è nei due altri.

Si è ricavato dalla teoria del Galileo la seguente regola: *La resistenza sta in ragione inversa della lunghezza dei pezzi, in ragione diretta della larghezza e in ragione diretta del quadrato dell' altezza.* Se dunque indichiamo con R la resistenza orizzontale di un prisma quadrangolare, di cui l sia la lunghezza, e la larghezza ed h l' altezza o la grossezza nel senso verticale, e che si chiami ρ la resistenza di un altro pezzo del medesimo legno, le cui dimensioni corrispondenti siano l', e', h', avremo

$$R : \rho = \frac{eh^2}{l} : \frac{e'h'^2}{l'} \; \ldots\ldots \; (1),$$

proporzione con l' aiuto della quale, conoscendo la resistenza ρ di un pezzo di legno, potremo calcolare la resistenza R di un altro pezzo della medesima specie di legno.

Il Musschenbrock, Parent, Bélidor, Buffon e Duhamel hanno fatto un gran numero di esperienze sopra la resistenza dei legni, le quali sono state raccolte dal-l'Hassenfratz nella seguente tavola, comodissima per i calcoli. Le resistenze si riportano a pezzi stabiliti liberamente sopra due punti di appoggio, e tutti i pezzi sono riportati alla dimensiune di cinque metri di lunghezza sopra un decimetro di quadratura, vale a dire sopra una larghezza e sopra un' altezza di un decimetro.

Trave di 5 metri sopra un decimetro quadrato	Peso che sostiene il pezzo prima di rompersi	
Susino	1447	Chilogrammi
Olmo	1077	»
Tasso	1037	»
Carpino	1034	»
Faggio	1032	»
Quercie	1026	»
Nocciuolo	1008	»
Melo	976	»
Castagno selvaggio	957	»

Castagno	931	"
Abeto	918	"
Noce	900	"
Pero	883	"
Betulla	853	"
Salice	853	"
Tiglio	750	"
Pioppo d' Italia	586	"

Per appropriare a questa tavola la proporzione (1), facciamo $l'=5^m$, $e'=h'=0^m,1$ ed avremo sostituendo

$$R:\rho=\frac{eh^2}{l}:\frac{0,1\times 0,01}{5},$$

donde

$$R=5000\rho.\frac{eh^2}{l}\ldots\ldots(2),$$

valore nel quale ρ è il numero che corrisponde nella tavola alla specie di legno in questione.

Supponiamo, per esempio, che il pezzo di legno del quale vogliamo conoscere la resistenza sia una trave di quercie di 4 metri di lunghezza sopra 15 centimetri di quadratura, si farà $e=h=0^m,15$, $l=4^m$ e siccome in questo caso $\rho=1026$ chilogrammi si avrà

$$R=5000\times 1026.\frac{(0,15)^3}{4}=4328 \text{ chilogrammi}$$

il pezzo proposto non si romperà dunque che sotto uno sforzo di 4328 chilogrammi.

Le resistenze calcolate con questa formula sono in generale troppo grandi, perchè non vi entra un elemento essenziale, il peso proprio del pezzo; non dobbiamo dunque considerarle che come approssimative.

Nell'esperienze del Buffon, sopra le quali possiamo attaccarci con tutta confidenza, il decrescimento delle resistenze è sempre stato maggiore dell'accrescimento delle lunghezze.

Un resultamento pratico importantissimo, è che la resistenza crescendo come il quadrato dell' altezza, i legni schiacciati debbono sempre essere stabiliti sopra la loro più piccola grossezza; così, in molte altezze, si è vantaggiosamente sostituito il legname con tavole di 15 linee di grossezza poste orizzontali. Faremo ancora osservare che il punto meno resistente di un pezzo orizzontale è la sua estremità libera, allorquando non ve ne è che una sostenuta, e il suo mezzo, quando le due estremità sono sostenute. I numeri della tavola di sopra si riferiscono a pressioni esercitate sul mezzo dei pezzi.

Le circostanze della rottura variano secondo le posizioni. Quando il pezzo è attaccato per una delle sue estremità, esso si spezza vicino al punto di appoggio; quando esso è fissato con le sue due estremità, esso si rompe in tre posti (*Tav.* CLVII, *fig.* 4), nel mezzo e vicino ai punti di appoggio; finalmente, quando esso è sostenuto per le sue estremità, la rottura è unica e si fa nel mezzo.

II. Resistenza Verticale. Un pezzo di legno posato verticalmente sopra la sua base e caricato alla sua estremità superiore generalmente avanti di rompersi, piega.

Il Rondelet ha ottenuto, da numerose esperienze, i seguenti resultamenti:

1.° Un palo di quercie, che ha più di sette o otto volte la larghezza della sua base in altezza, piega sotto il carico avanti di rompersi o di ricalcarsi, e un pezzo di legno, la cui altezza fosse cento volte il diametro della sua base, non è più capace di sostenere il minimo peso senza piegarsi.

2.° Quando un pezzo di quercie è troppo corto per poter piegare, la forza necessaria per romperlo è da 40 a 48 libbre (francesi, cioè di 16 once per libbra) per ogni linea superficiale della sua base; e questa forza per il legno di abeto va da 48 a 56.

3.° Dei cubi di ciascuno di questi legni, sottoposti ad una forte pressione, hanno diminuito di altezza senza disunirsi; quelli in quercie di più di un terzo e quelli in abete della metà.

4.° La forza media del legno di quercie, che è di 44 libbre francesi per ogni linea superficiale per un cubo, si riduce a due libbre per un pezzo del medesimo legno, la cui altezza è eguale a 72 volte la larghezza della base.

5.° Paragonando un cubo di quercie con paralellepipedi rettangolari della medesima base, la resistenza ha diminuito nei seguenti rapporti:

Per il cubo la cui altezza è 1, la resistenza essendo 1.

Per un pezzo la cui altezza è 12,	essa è . . . . . $\frac{5}{6}$
id. 24	*id.* . . . . $\frac{1}{2}$
id. 36	*id.* . . . . $\frac{1}{3}$
id. 48	*id.* . . . . $\frac{1}{6}$
id. 60	*id.* . . . . $\frac{1}{11}$
id. 72	*id.* . . . . $\frac{1}{24}$

Secondo il Perronet, la resistenza comparativa delle sei specie seguenti di legno caricate in ritto è

Quercie	126
Salice	96
Abetò	94
Pioppo.	84
Frassino	72
Olmo	70

Il sig. Girard, al quale dobbiamo un gran numero di belle esperienze, ha riconosciuto che l'elasticità dei legni posti ritti, o la resistenza che essi sono capaci di opporre alla flessione, quando sono caricati verticalmente, è *in ragion diretta delle larghezze*, *doppia dell'altezze* e *inversa delle lunghezze*. In questo punto bisogna intendere per *altezza* la più gran larghezza del legno. Questo sapiente ha trovato che l'elasticità assoluta di un pezzo di legno di quercie di

un metro cubo è di 1178451 chilogrammi, e che quella di un metro cubo di abeto è di 816128 chilogrammi. Dai suoi calcoli uo pezzo di legno di quercie di 1295 metri di altezza sopra un metro di riquadratura non resisterebbe alla pressione del suo proprio peso. Seguirebbe il medesimo di un pezzo di abeto di 1832 metri.

III. Aderenza delle fibre. Resulta, da tutte l'esperienze, che il legno resiste meglio all'estensione che alla compressione. Il resultamento medio dell'esperienze del Rondelet è che la forza dei legno di quercie ordinaria è di circa 981 chilogrammi per ogni centimetro quadrato della base del pezzo, sottoposto ad una traiaione perpendicolare con le sue due stremità. Il Barlow stima la forza della quercie d'Inghilterra da 648 a 800 chilogrammi, sempre per centimetro quadrato. Nun staremo a riferire oltre estimazioni tutte ancora differenti, e le quali non sono atte che a far sentire il bisogno di una teoria più avanzata. (*Vedi* Opere del Buffon, *Parte esperim. XI memoria*; *Trattato dell'arte di fabbricare, del Rondelet*; Opera, del Perronet; *Trattato analitico della resistenza dei solidi*, del Girard.)

LEIBNITZ (Goffredo Guglielmo). Nell'epoca in cui questo grand'uomo comparve sulla scena del mondo, immensi progressi avevano già da un secolo portato le scienze matematiche ad un grado di potenza e di perfezione talmente superiore, che sembravano avere raggiunto l'ultimo sviluppo della ragione umana. Nulladimeno queste scienze sublimi uon presentavano ancora un complesso sistematico; e quantunque l'idea dell'infinito fosse stata già introdotta in alcune delle loro speculazioni più elevate da varj uomini d'iogegno superiore, i cui lavori avevano ampliato grandemente il campo della scienza, pure, siccome le loro ricerche erano state isolate, le verità che avevano annunziato erano rimaste per così dire individuali. Si trattava dunque allora di generalizzare tali verità, e quest'opera immensa e difficile fu gloriosamente compiuta da Leibnitz. Le scienze teoretiche si trovavano presso a poco nel medesimo stato; e quantunque il razionalismo di Cartesio avesse dato un colpo terribile alle impotenti sottigliezze scolastiche, quantunque quell'illustre filosofo avesse recato nella speculazione un principio riformatore e vivificante, mancava ancora assai perchè la filosofia fusse condotta ad un punto sistematico dedotto dai due principj della realtà: l'essere e il sapere, o, se vuolsi, dalle due basi trascendentali della cognizione: lo spirito e la materia. Il sistema filosofico di Leibnita sopraggiunse a mettere la ragione in questa via di uno sviluppo nuovo, donde è nata la scuola moderna e la sua tendenza verso l'assoluto. In questo doppio aspetto, la storia dei lavori di Leibnita appartiene a quella dello spirito umano, nè vi ha un nome più grande del suo tra quelli che essa addita all'ammirazione e al rispetto del mondo. Questo genio sublime, del quale siamo per tracciare rapidamente la vita scientifica, non credeva di potere spaziare abbastanza nelle vaste regioni delle matematiche e della filosofia, e il suo sapere enciclopedico si è applicato ad altri oggetti, nei quali ha recato quell'ammirabile superiorità di vedute che distingue tutte le sue produzioni. Ma noi in questa rapida notizia biografica non dobbiamo considerarlo che come geometra e come filosofo, e soltanto nei rapporti che hanno con queste due grandi caratteristiche del suo talento dobbiamo cercare di esporre i brillanti lavori dei quali ha arricchito l'umanità.

Leibnitz nacque a Lipsia il 3 Luglio 1646. Da sua madre fu posto nella scuola di S. Niccolò di questa città, perchè in età di soli sei anni aveva perduto suo padre, dotto professore di diritto. Egli imparò rapidamente i principj delle lingue antiche che servono di base all'istruzione, e passò quindi un anno all'università di Jena: tornato a Lipsia, si diede con passione allo studio delle scienze matematiche e filosofiche, e il suo talento si manifestò nelle prime ricerche delle

quali queste scieoze somministrarono a lui il soggetto. Ei passava le sue giornate in uo bosco vicino alla sua città nativa, meditando sulla filosofia di Platone e di Aristotile, oello spirito dei quali si ara internato e di cui voleva conciliare le dnttrine. In età di ventl anni Leibnitz fu ricevuto dottore in legge, in seguito di una dispensa di età accordatagli dalla università di Altorf. Gli lu offerto pure dai maestri di quell'istituto un posto di professore straordinario di tale scienza, ma egli preferì di recarsi a Norimberga, che era allora il soggiorno di nn gran numero di dotti e di letteratl. In questa città ebbe egli occasione di conoscere il barone di Boinebourg, cancelliere dell' elettore di Magonza. Questo persouaggio, sorpreso dal merito del giovino Leibnitz, gli raccomandò particolarmente di studiare la storia e la giurisprudenza, e gli esternò il desiderio di vederlo stabilito a Francfort, ove gli promise l'appoggio e i favori del suo sovraoo. Leibnitz seguì questi coosigli, e fu a Fraocfort ch' ei pubblicò la sua prima opera: era questa uo metodo ouovo per imparare e insegnare la giurisprudeoza (*Nova methodus discendae docendaeque jurisprudentiae*, 1667).

Da tale epoca comincia per Leibnitz nna vita laboriosa e feconda, contrassegnata dalla produzione di una moltitudine di scritti di un ordine superiore. Ei volle allora visitare la Francia, cbe attirava gli sguardi e l'ammirazione dell'Europa per lo splendore delle sue vittorie e pel merito dei dotti che aveva veduto nascere o che aveva chiamati nel soo seno. Il suo protettore Boinebourg gli procurò i mezzi di soddisfare ai suoi desiderj incaricandolo di accompagnare suo figlio a Parigi. In questa città il giovane Leibnitz conobbe il celebre Huygens, e si rivolse più particolarmente allo studio delle matematiche. Passò poscia in Inghilterra, ove fu accolto con egual favore che a Parigi, ed ove strinse amicizia con gli uomini celebri che disputavano allora alla Francia la gloria delle scienze. Leibnitz tornò a Parigi, donde non partì che dopo un soggiorno di quindici mesi, per recarsi io Olanda presso il duca di Brunswick, che lo aveva preso sotto la sua protezioοe dopo la morte del suo benefattore, e che generosamente gll aveva sommioistrato i mezzi di prolungare il suo soggiorno in paese straniero.

Leibnitz oon avava cbe ventotto anni quando tornò in Germania, e già tutti i rami dell' umano sapere erano stati l'oggetto delle sue investigaziooi; già i numerosi suoi scritti attestavano una tale nniversalità dl cognizioni, una talo superiorità di talenti, cbe non era possibilo di congetturare oè in quale arringo sarebbe stato per acqnistarsi maggior celebrltà, nè a qual genere di studj il suo ingegno più particolarmente lo traesse. Accolto colla più grao distinzione in tutti i paesi che aveva visitati, in commercio di lettere coi dotti più illustri dell' Europa, aveva già acquistata una reputazione che i lavori della età sua più matura dovevaoo rendere immortale. Noi ci occuperemo unicamente di queste sublimi produzioni del suo ingegno.

I primi saggi del calcolo differenziale furooo pubblicati da Leibnitz negli *Atti* di Lipsia del mese di Ottobre 1684. Lo scritto memorando cbe cootiene i principj di questa prodigiosa scoperta è intitolato: *Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quae nec fractas, nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus.* Vi si trova, come lo esprime il titolo, il metodo per differenziare ogni sorta di quantità, razionali, frazionarie, radicali, non meno cbe l'applicazione di questi calcoli ad nn esempio complicatissimo che indica la strada per tutti gli altri casi. Qualche tempo dopo pubblicò i primi principj del calcolo integrale in uno scritto intitolato: *De Geometria recondita et analysi indivisibilium, atque infinitorum.*

È certo che queste cose nuove nella scieoza erano sparse nei giornali della Germania prima che Newton avesse nulla pubblicato che potesse far conoscero che dalla sua parte era giunto a metodi simili. Fu verso la fine del 1686 ch' ei

diede alla luce il suo libro immortale dei *Principj*, nel quale si trova esposto il calcolo delle *Flussioni* (*Vedi* FLUSSIONI). I lavori di Giovanni Bernoulli e di L'Hopital contribuirono ad estendere il calcolo differenziale e farne comprendere la grande importanza ai geometri. Ma quando questa grande scoperta cominciò a portare i suoi frutti, si suscitò all'improvviso la questione di sapere a chi apparteneva la gloria di averla il primo proposta, se a Leibnitz o a Newton, e tale questione diede luogo ad una polemica celebre, della quale passeremo ad accennare succintamente le principali circostanze.

Leibnitz ha raccontato da sè stesso la storia de' suoi studj matematici, de' suoi primi saggi, dello sviluppo infine delle sue idee in questo ramo elevato del sapere. Fino dall' età di sedici anni aveva composto sull' arte delle combinazioni un piccolo trattato, nel quale si occupava di già delle differenze dei numeri, la successione dei quali forma delle serie regolari. Quest' opera non è stata pubblicata, ma è interessante di osservarne l'oggetto e di studiare nel suo progresso la grande scoperta dell' illustre geometra, il germe della quale trovavasi consegnato e riposto in queste primordiali meditazioni del giovine scolare. Leibnitz, occupato principalmente di storia e di filosofia, non continuò dapprima con molta perseveranza le sue ricerche di aritmetica. Nel 1673, epoca del suo viaggio in Inghilterra, strinse amicizia con un geometra chiamato Oldenburg, al quale credè di dover confidare i primi resultati de' suoi lavori. Si trattava della quantità costante, tanto esatta che approssimativa, dei numeri ai quali alla fine sempre si giunge quando si prendono le differenze successive dei termini di una serie numerica, quindi le differenze di queste differenze e così di seguito per un numero sufficiente di volte. Ma ebbe il dispiacere d'intendere che questi resultati cui credeva nuovi erano stati già scoperti da un matematico francese per nome Regnault, ed erano stati già pubblicati nel 1670 a Lione, in un' opera di Mouton intitolata: *Observationes diametrorum solis et lunae apparentium*. Si affrettò Leibnitz a procurarsi tale opera, e subito dopo, in una lettera ad Oldenburg, fece osservare che credeva che gli rimanesse ancora qualche cosa della sua scoperta, e nel tempo stesso annunziò che era in stato di sommare coi medesimi principj tutte le progressioni composte di termini che hanno per numeratore l'unità e per denominatori dei numeri figurati di un ordine qualunque.

La scoperta di un' altra proprietà dei numeri, che egualmente comunicò a Oldenburg, non fu più felice: gli fu avvertito che essa era stata già fatta da Mercator, matematico tedesco, che l'aveva pubblicata nella sua *Logarithmotechnia*. Leibnitz si procurò questo libro e lo portò seco in Francia. Ivi, piccato dal cattivo successo de' suoi primi tentativi, si diede a nuove meditazioni sullo stesso soggetto e trovò una serie infinita di frazioni che esprimeva la superficie del circolo, nella stessa guisa che Mercator aveva trovato il modo di esprimere quella dell' iperbola. Huygens, al quale Leibnitz comunicò la sua scoperta, rimase colpito della sua importanza, ed Oldenburg, a cui si affrettò di darne parte, se ne congratulò seco sinceramente, informandolo però nella sua risposta che *un tale*, chiamato Newton, di Cambridge, pareva che avesse trovato, dal canto suo, dei metodi nuovi, ma non ancora pubblicati, per ottenere le lunghezze e le aree di ogni sorta di curve e per conseguenza, tra le altre, anco del circolo. Ciò non toglieva nulla al merito della serie di Leibnitz; ma, per una fatalità che sembrava congiunta a tutti i suoi sforzi, questa serie era stata già trovata da Gregory, geometra scozzese, che comunicata l'aveva a Collins. Questo fatto non fu però conosciuto da Leibnitz che parecchi anni dopo. Newton stesso gli fece le sue congratulazioni per il cammino da lui tenuto, come una novità tanto più notabile, in quanto che, diceva egli, erano a sua cognizione tre metodi differenti per giungere a questo resultato, talchè poco si era aspettato che

se ne trovasse un quarto. Incoraggito da questo primo successo, Leibnitz proseguì con ardore le sue speculazioni sulle differenze dei numeri che gli sembravano sì feconde, e fu per tal via che giunse alla scoperta del *Calcolo differenziale*. *Vedi* Calcolo Differenziale.

Non entreremo in altre particolarità su questa discussione. Fu essa per così dire una guerra scientifica nazionale, nella quale i dotti inglesi rivendicavano con un calore che gli rese troppo spesso ingiusti verso Leibnitz i diritti di Newton alla scoperta del calcolo differenziale. Ma perchè si è egli cercato di avvilire questi due grandi uomini volendo necessariamente che o l'uno o l'altro di essi abbia abusato di confidenze inspirate reciprocamente da una medesima idea, ed abbia usurpato una gloria non sue? il loro ingegno non ha dunque potuto incontrarsi in questa grande scoperta? Leibnitz e Newton erano egualmente chiamati dalle loro cognizioni e dai loro prodigiosi talenti a introdurre nella scienza un principio che è stato sì fecondo di resultati immensi. Ambedue a tutto rigore potrebbero, se così fosse permesso di esprimerci, godere di quest' onore senza che la gloria dell' uno o dell' altro ne rimanesse diminuita. Nulladimeno, se una tal questione potesse esser decisa per mezzo delle date, non vi è dubbio alcuno che l' anteriorità sarebbe tutta a favore di Leibnitz. Ma perchè non avrebbero essi concepito simultaneamente questo sublime pensiero? D' altronde tutti e due l' hanno sviluppato sotto un punto di vista differente, ed è questa una circostanza che domina in tutta la discussione; essa è stata passata sotto silenzio da tutti quelli che ne hanno fatto la storia. Ammettiamo dunque che Newton e Leibnitz abbiano gli stessi diritti alla scoperta del calcolo differenziale: è evidente che Newton non ha scorto nella sue teorie che un metodo di calcolo che doveva facilitare la soluzione dei grandi problemi geometrici; in altri termini, ne ha concepita l' applicazione in un senso tutto concreto. Ma Leibnitz ha colto fino dal suo principio la natura astratta di questo calcolo, ne ha abbracciato il senso filosofico, e, sotto questo rapporto, non vi ha mezzo nessuno di stabilire tra lui e il suo illustre competitore un confronto ragionevole. *Vedi* Calcolo Differenziale.

Fra l' ingegno di Cartesio e quello di Leibnitz esiste un punto di conformità più facile assai a distinguersi, ed è che in questi due grandi uomini, quantunque abbiano creato due scuole rivali, i sistemi filosofici e matematici sono rigorosamente connessi e non sembrano essere che deduzioni di un solo e medesimo principio. Tutti e due hanno voluto che le matematiche traessero dalla filosofia il carattere trascendentale e l' autorità delle sue più elevate speculazioni, e che la filosofia si sottomettesse, nella ricerca delle verità, alla precisione delle matematiche e che essa rivestisse i suoi enunciati di quel carattere di evidenza e di certezza che distingue nella loro applicazione le proposizioni di quella scienza. Non potendo tollerare, dice Brocker, che la metafisica degenerasse nelle scuole in vane sottigliezze, Leibnitz concepì il suo piano generale di riforma, cominciando dalla nozione della sostanza, ch' ei considerava come il principio e la base di ogni scienza reale. Tale uomo sommo espone in questa guisa l' idea fondamentale della sua dottrina metafisica: » Per render chiara l' idea di *sostanza*, bisogna risalire a quella di *forza* o di *energia*, la cui spiegazione è l' oggetto di una scienza particolare chiamata *dinamica*. La forza attiva o agente non è la potenza *nuda* della scuola; non bisogna infatti intenderla, insieme con gli scolastici, come una semplice *facoltà* o possibilità di agire, che, per essere *effettuata* o ridotta all'*atto*, abbia bisogno di un eccitamento venuto di fuori, cioè di uno *stimolo* estraneo. La vera forza *attiva* contiene l' azione in sè stessa: essa è *entelechia*, potenza media tra la semplice facoltà di agire e l' atto determinato o effettuato: questa energia comprende o involve il conato, e si

» reca da sè stessa ad agire senza nessuna provocazione esterna. L'energia, la » forza viva, si manifesta coll'esempio del grave sospeso che tira o tende la » sua corda; ma sebbene si possa spiegare meccanicamente la gravità o la forza » di una molla, nulladimeno l'*ultima ragione* del moto della materia non è al» tro che quella *forza* che è stata impressa fino dalla creazione a tutti gli es» *seri*, e che in ognuno si trova limitata dalla opposizione o dalla direzione » contraria di tutti gli altri. Io dico che questa forza agente è inerente a qua» lunque sostanza, che perciò non può stare un solo istante *senza agire*; e ciò » è egualmente vero delle sostanze dette corporee, come dalle sostanze spirituali. » Ivi è l'errore capitale di quelli che hanno posto tutta l'essenza della ma» teria nell'estensione, ovvero nella impenetrabilità, immaginandosi che i corpi » possano stare in un riposo assoluto; noi faremo vedere che nessuna sostanza » può ricevere da un'altra sostanza la forza stessa di agire, e che il solo suo » sforzo, o la forza preesistente in essa, non può trovare al di fuori che dei » limiti che l'arrestano o la *determinano*. » Leibnitz espone quindi le sue teorie sì note sulle idee e sulle monadi. Secondo la sua dottrina, esistono delle idee indipendenti dall'esperienza, le quali hanno l'unica loro sorgente nello spirito umano medesimo: le idee sono oscure o lucide, confuse o coordinate. Confuse, se derivano dai sensi; coordinate, se appartengono al solo intelletto.

Il principio di non contradizione è la pietra di paragone della verità; vi si giunge per l'analisi risolvendo il composto nei suoi elementi. Le verità contingenti sono dimostrate col principio della ragione sufficiente, la quale ci conduce ad una causa assoluta posta fuori della serie degli esseri contingenti. Le idee che si riferiscono agli oggetti estrinseci all'anima devono stare in armonia con questi oggetti, altrimenti non sarebbero che pure illusioni. La ragione suprema dei principj necessarj è in Dio, sorgente di ogni verità necessaria ed eterna. Vi sono delle monadi primitive, infinite, e delle monadi limitate che si distinguono tra loro per la potenza e la qualità delle loro percezioni. Le monadi senza percezione sono i corpi inerti; gli animali sono monadi dotati di percezione confusa, gli esseri ragionevoli poi, gli spiriti, sono monadi di percezione distinta. Dio le contiene tutte, ed è la monade assoluta. Questo sistema filosofico, che qui non possiamo esporre in tutti i suoi sviluppi, eccitò, dicono tutti i biografi di Leibnitz, tutti gli storici della scienza, un entusiasmo universale, ed è stato in Germania il principio di un grande e maestoso movimento intellettuale, al quale l'umanità ha dovuto in seguito Kant, Fichte e Schelling.

La vita di Leibnitz è contrassegnata da pochi avvenimenti. Noi abbiamo riferito quelli della sua gioventù, ed annunziato alcuni degl'immensi lavori che hanno illustrato la sua corsa. Quest'uomo straordinario è senza contrasto uno di quelli che hanno maggiormente onorato l'umana intelligenza, ed ha lasciato nel mondo un nome che non morrà giammai. Ei soccombè ad una breve malattia il 14 Novembre 1716 in età di settant'anni. Un monumento, costruito a forma di tempietto, è stato eretto alla sua memoria alle porte di Hannover, vi si legge questa semplice ed eloquente iscrizione: *Osso Leibnitii*. Si consulti la sua vita scritta da Brucker, e il suo elogio pubblicato da Fontenelle.

Alle cure di Luigi Dutens dobbiamo la collezione la più compiuta delle opere di Leibnitz, pubblicata col titolo di *Go. Guil. Leibnitii Opera omnia*, Ginevra, 1768, 6 vol. in-4. Il terzo volume è consacrato alle matematiche; le opere filosofiche sono nel secondo.

LEMBO (*Astron.*). Orlo esterno del sole o della luna. Si dà pure questo nome all'orlo esterno graduato di un circolo, di un grafometro o di qualunque altro strumento di matematiche.

LEMMA. (da λαμβάνω, *ammetto*). Proposizione preliminare che si stabilisce per

servire alla dimostrazione di qualche altra proposizione, quantunque essa non abbia però che un rapporto indiretto col soggetto di quest'ultima, e che essa non venga impiegata che sussidiariamente, tanto per la dimostrazione di un teorema, quanto per la soluzione di un problema.

LEMNISCATA. (*Geom.*). Nome di una curva che ha la forma di un 8, e della quale il conte di Fagnano (*Vedi* QUESTA PAROLA) si è particolarmente occupato.

Se prendiamo A (*Tav.* CLXI, *fig.* 1) per l'origine delle coordinate, e che indichiamo AP con x e PN con y, l'equazione della *lemniscata* sarà

$$ay = x\sqrt{a^2 - x^2},$$

a indicando la linea costante AB ovvero AC.

Quest'equazione alla quale possiamo dare la forma $a^2y^2 = a^2x^2 - x^4$, prova che la curva è una linea del quart'ordine, e che essa è quadrabile (*Vedi* QUADRATURA), poichè il suo *elemento* è

$$ydx = \frac{x}{a}\,dx\,\sqrt{a^2 - x^2},$$

il cui integrale completo è (*Vedi* INTEGRALE) $-\frac{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}{3a} + \frac{a^2}{3}$, così facendo $x = a$, si ottiene per l'area della parte BNA, il valore $\frac{a^2}{3}$, l'area totale è dunque $= \frac{4}{3}a^2$.

Una linea retta come mq può tagliare la *lemniscata* in quattro punti m, n, p, q. Il punto A vien considerato come doppio (*Vedi* MULTIPLO). Esistono altre curve, e la *Cassinoide* è di questo genere, che hanno la forma di un 8; ma questa è la più semplice.

LEMOINE (EDMO MARIA GIUSEPPE), nato nel 1751 ad Essoies, borgo della Sciampagna, e morto a Parigi nel 1816, professò con onore in questa città per molti anni le matematiche, e pubblicò diverse opere elementari, che si distinguono per notabile chiarezza ed eccellente metodo, e che accolte dall'università di Parigi divennero classiche in più collegj. Le principali sono: I *Traité du globe, rédigé d'une manière nouvelle, et mis à la portée des enfans*, Parigi, 1780, in-12; II *Traité élémentaire de mathématiques, ou Principes d'arithmétique, de géométrie, de trigonométrie, avec les sections coniques*, ivi, 1778, in-8; ed ivi, 1797, 2 vol. in-8, 4ª ediz. aumentata considerabilmente: l'opera termina con una buona storia succinta delle matematiche.

LEMONNIER (PIETRO CARLO), astronomo francese, nato a Parigi nel 23 Novembre 1715, non aveva che sedici anni quando manifestò una inclinazione particolare per l'astronomia, scienza alla quale fin d'allora dedicò interamente i suoi studj. Nel 1731 fece egli infatti le sue prime osservazioni sull'opposizione di Saturno; e nel 1736 in ricompensa di altri non meno importanti lavori fu ammesso nell'Accademia delle Scienze di Parigi. Eletto insieme con Maupertuis e Clairaut per andare a misurare un grado del meridiano sotto il circolo polare, passò a Torneo l'inverno del 1736-37 e contribuì più che alcun altro al successo di quella grande intrapresa. Nel 1738 e 1742, Lemonnier verificò l'obliquità dell'eclittica; e nello stesso tempo presentò all'Accademia il progetto di un nuovo catalogo delle stelle zodiacali secondo il metodo di Flamsteed.

Molti altri furono i lavori pei quali acquistossi fama tra gli astronomi di Europa: fu egli il primo che determinò i cambiamenti delle refrazioni nell'inverno e nell'estate; il primo imprese a correggere i cataloghi delle stelle fisse, e a determinare bene l'altezza del polo di Parigi; il primo introdusse in Francia l'uso dello strumento dei passaggi, e il primo misurò il diametro della luna sul disco del sole in occasione dell'ecclissi del 25 Luglio 1748, che egli si recò ad osservare in Scozia ove tale ecclissi doveva essere quasi anulare. L'intera sua vita fu dedicata allo studio della scienza, dalla quale nol distolsero nemmeno le agitazioni della rivoluzione. Creato membro dell'Istituto fino dalla sua fondazione, morì ad Héril presso Baieux il 2 Aprile 1799. Le opere più importanti da lui pubblicate sono: I *Histoire céleste*, Parigi, 1741, in-4; II *La théorie des comètes, où l'on traite du progrès de cette partie de l'astronomie*, ivi, 1743, in-8; III *Institutions astronomiques*, ivi, 1746, in-4: è in gran parte una traduzione dell'opera di Keill, ma molto migliorata; IV *Observations de la lune, du soleil et des étoiles fixes*, ivi, 1751-54-59-75, 4 vol. in-fol. V *Nouveau zodiaque réduit à l'année* 1755, ivi, 1755, in-8, VI *Premières observations faites par ordre du roi pour la mesure du degré entre Paris et Amiens*, ivi, 1757, in-8; VII *Astronomie nautique lunoire où l'on traite de la latitude et de la longitude en mer*, ivi, 1771, in-8; VIII *Exposition des moyens les plus faciles de résoudre plusieurs questions dans l'art de la navigation*, ivi, 1772, in-8: vi si trova inserita la scala logaritmica di Gunter (*Vedi* GUNTER); IX *Description et usage des principaux instruments d'astronomie*, ivi, 1774, in-fol.: è uno dei quaderni della grande *Description des arts et métiers*; X *Traité de la construction des vaisseaux par Chapmann, traduit du suédois*, ivi, 1779, in-fol. (*Vedi* CHAPMAN); XI *Mémoires concernant diverses questions d'astronomie et de physique*, ivi, 1781-84, in-4. Lemonnier ha riveduto ancora la riduzione delle carte celesti di Flamsteed, fatta e pubblicata da Fortin col titolo di *Atlas céleste de Flamsteed*, Parigi, 1776, in-4. Nella *Bibliografia astronomica* di Lalande si troveranno indicati tutti gli scritti di Lemonnier.

LENTE (*Diottrica*). Si dà particolarmente questo nome a un pezzo di vetro lavorato a foggia di *lenticchia*, vale a dire doppiamente convesso, la proprietà del quale è di far convergere i raggi della luce che passano a traverso di esso, in modo da riunirli in un sol punto, che dicesi *fuoco della lente*. Per estensione, si dicono *vetri lenticolari* o *lenti* tutti i vetri sferici che si distinguono nelle appresso classi (*Tav.* CLVI, *fig.* 4):

1° *Piano-convessa*; lente una delle cui superficie è piana e l'altra convessa. A, rappresenta la sua sezione o il suo profilo.

2° *Convesso-convessa*; lente le cui superficie sono ambedue convesse: B.

3° *Piano-concava*; C.

4° *Concavo-concava*; D.

Esiste pure un'altra specie di vetri lenticolari che hanno una delle loro superficie concava, mentre l'altra è convessa: tale è E; ma questi vetri prendono più specialmente il nome di *menischi*. *Vedi* MENISCO.

Le lenti convesse sono le sole che abbiano la proprietà di far convergere i raggi luminosi; le lenti concave al contrario gli rendono divergenti. Passeremo adesso ad esaminare queste due specie di lenti.

Lenti convesse. Se si espone alla luce del sole una delle lenti A o B, e se si ricevono sopra una superficie i raggi luminosi che l'attraversano, questi raggi projettano sulla superficie una immagine luminosa la cui grandezza varia a misura che questa superficie è più o meno distante dalla lente. Così, supponendo che in principio si sia posta la superficie in gran vicinanza della lente, e che quindi

da questa si ellontani a poco a poco, si vede l'immagine luminosa aumentare successivamente di splendore, mentre la sua grandezza va progressivamente diminuendo fino el punto di occupare il minimo spazio possibile; da questo punto in poi la luce s'indebolisce e la grandezza della figura va indefinitamente aumentando.

Il punto in cui l'immagine luminosa è della minima grandezza si chiama *fuoco*, e la sua distanze da quella superficie della lente che è rivolte dalla sue parte prende il nome di *distanza focale*.

La distanza focale è sempre la stessa qualunque sie delle due superficie della lente quella che riceve i raggi luminosi, purchè però la lente sia simmetrica: ma le lenti non simmetriche, vale a dire quelle le cui superficie sono differenti, hanno due *distanze focali*. Ciò non ostante la differenza tra le due distenze focali di una stessa lente è sempre una quantità piccolissima.

S'indica più particolarmente col nome di *superficie anteriore* della lente quella che è rivolta verso l'oggetto che si guarda, e con quello di *superficie posteriore* quella che è rivolte dalla parte dell occhio.

L'effetto il più notabile delle lenti convesse è quello d'ingrandire gli oggetti, e su questa proprietà appunto è fondete la costruzione dei cannocchiali: resulta queste proprietà della doppia refrazione che subisce un raggio luminoso nel suo passaggio a traverso alla lente, doppia refrazione che riunisce sotto un angolo maggiore i raggi di qualunque specie, o paralelli, o convergenti, o divergenti. Per esempio (*Tav.* CLVI, *fig.* 5), i raggi paralleli bD, bE, che senza la refrazione non si riunirebbero mai, attraversando la lente DE, si riuniscono in f; i raggi convergenti AD, aE, il cui punto di concorso è in g, si riuniscono invece in h per effetto della lente, e formano un angolo DhE maggiore di Aga; e finalmente i raggi divergenti cD, cE, che senza la refrazione anderebbero sempre allontanendosi, vanno a riunirsi in g: la porzione cc dell'oggetto apparisce dunque sotto l'angolo Aga e per conseguenza delle grandezza Aa.

L'immagine di questo oggetto si scorge dietro le *lente* in un posto più lontano di quello in cui è situato l'oggetto. Ciò accade perchè i raggi di ciascun fascio luminoso, partendo da ciascun punto dell'oggetto, divengono per le refrazioni meno divergenti ed hanno perciò il loro punto fittizio di riunione più lontano. Il punto B (*Tav.* CLX, *fig.* 1), veduto ettraverso alla lente, sembra dunque in b. Ma, affinchè l'immagine dell'oggetto sia veduta dietro alla lente, è necessario che quest'oggetto sia posto più vicino alla lente del fuoco dei raggi paralleli; perchè, se l'oggetto fosse in B (*Tav.* CLX, *fig.* 2) più lontano di questo fuoco, i raggi di ciascun fascio luminoso, essendo poco divergenti nel giungere alla superficie delle lente, diverrebbero, nel traversarla, o paralelli o anco convergenti, e non avrebbero alcun punto fittizio di riunione; non si vedrebbe dunque nessuna immagine dietro alla lente. Nulladimeno, se questi raggi divenissero convergenti, l'immagine potrebbe vedersi al di qua della lente, tra la lente e l'occhio. Supponiamo O (*Tav.* CLX, *fig.* 3) il fuoco dei raggi paralleli delle lente DE, ed AB un oggetto posto al di là: i fasci luminosi dei raggi AD e BE che partono da ciascun punto dell'oggetto, essendo troppo poco divergenti nel giungere alla lente, divengono convergenti al loro passaggio e vanno a formare in ab un'immagine roveseiata, che può essere scorta da un occhio posto in F. Quest'immagine è necessariamente rovesciata, perchè non vi sono che i raggi i quali si sono già incrociati tre l'oggetto e la lente che possano in seguito convergere verso l'occhio. Non è il corpo ma l'immagine di esso che diviene l'oggetto immediato della vista ettraverso ad un canocchiale. *Vedi* CANOCCHIALE.

Le lenti facendo entrare nell'occhio molti raggi che senza di esse non vi en-

trerebbero ci fanno vedere gli oggetti con maggior chiarezza e ci offrono così un mezzo prezioso per rimediare alla debolezza della vista; nulladimeno l'uso delle lenti semplici, o degli *occhiali*, presenta gravi inconvenienti che non possono essere evitati che in parte facendo uso di vetri purissimi e perfettamente lavorati.

L'ingrandimento delle lenti è tanto più considerabile quanto più piccola è la *distanza focale* di queste lenti. Quando tale distanza è minore di sei linee, le lenti si dicono più propriamente *microscopj semplici* o *lenti microscopiche*.

Lenti concave. Una lente di questa specie, presentata al sole, trasmette sopra una superficie opposta una immagine luminosa che sembra divergere come se provenisse da un punto situato nella concavità della lente. Questo punto si chiama il *fuoco negativo*, e la sua distanza dalla superficie che riceve la luce dicesi *distanza focale negativa*. Gli oggetti veduti a traverso ad una tale lente sembrano più piccoli e più vicini; perciò non se ne fa uso isolatamente che come *occhiali* destinati a correggere il vizio dell'organo della vista conosciuto sotto il nome di *miopia*.

Per risolvere tutti i quesiti che possono venir proposti sulle lenti, basta determinare le relazioni geometriche che esistono tra i raggi della superficie, le distanze focali, e il rapporto di refrazione tra l'aria e il vetro. Questo è appunto ciò che passeremo ad esaminare considerando una lente qualunque MN (*Tav.* CLX, *fig.* 4), della quale supporremo che siano diverse le curvature delle due superficie MAN, MBN.

Sia R il centro della superficie posteriore MAN, ed r quello della superficie anteriore MBN; la retta che passa per questi due punti sarà l'*asse* della lente.

Se da un punto qualunque F dell'asse s'immagina un raggio luminoso Fg che incontri la lente in g, e se dal punto g si conduce gr, questa retta sarà la normale del punto g: ora è noto che il raggio refratto fa colla normale nel vetro un angolo minore di quello che fa nell'aria (*Vedi* REFRAZIONE), perciò, supposta gh la sua direzione nel vetro, conduciamo dal punto h nel quale esso esce dal vetro la normale hR, e siccome allora deve scostarsi da questa normale, rappresentando con hf la sua direzione nell'uscire dal vetro, sarà, f il punto in cui il raggio luminoso refratto due volte incontra l'asse.

Osserviamo primieramente che siccome ogni angolo esterno di un triangolo è equivalente alla somma dei due angoli interni opposti (*Vedi* ANGOLO), gli angoli della figura danno le seguenti eguaglianze:

$$Fgq = gFr + grF,$$

$$fhp = hfR + hRf,$$

donde si trae

$$Fgq + fhp = gFr + grF + hfR + hRf.$$

Inoltre si ha

$$grF + hRf = gOR = Ohg + Ogh.$$

Adesso, se si osserva che la curvatura degli archi MAN, MBN, deve esser sempre piccolissima, affinchè le lenti possano produrre delle immagini distinte, si vedrà che gli angoli acuti della figura sono pure sempre piccolissimi, e che ai loro rapporti si possono sostituire i rapporti dei loro seni senza errore sensibile; così, ammettendo, che il rapporto costante che ha luogo tra il seno d'incidenza e quello di refrazione tra l'aria e il vetro sia $n:1$, potremo fare

$$Fgq : Ogh :: n : 1,$$

$$fhp : Ohg :: n : 1,$$

donde si ottiene

$$Fgq+fhp : Ogh+Ohg :: n : 1,$$

e per conseguenza, in virtù delle eguaglianze precedenti,

$$gFr+grF+hfR+hRf : grF+hRf :: n : 1;$$

e componendo i rapporti si ha in fine

$$gFr+hfR : grF+hRf :: n-1 : 1. \ldots\ldots (a).$$

Ora tutti questi angoli essendo piccolissimi, e gli archi Bg ed Ah potendo considerarsi come rette perpendicolari all' asse, si ha sensibilmente

$$gFr \text{ proporzionale alla sua tangente} = \frac{Bg}{FB}$$

$$hfR \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{Ah}{fA}$$

$$grF \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{Bg}{Br}$$

$$hRf \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{Ah}{AR}$$

Così, sostituendo questi rapporti nella proporzione (a), essa diviene

$$\frac{Bg}{FB}+\frac{Ah}{fA} : \frac{Bg}{Br}+\frac{Ah}{AR} :: n-1 : 1,$$

e dà luogo all' equazione

$$\frac{Bg(n-1)}{Br}+\frac{Ah(n-1)}{AR}=\frac{Bg}{FB}+\frac{Ah}{fA} \ldots\ldots (b).$$

Indichiamo ora con R il raggio AR della superficie posteriore, con r quello Br della superficie anteriore, con a la distanza FB, e con x la distanza fA, ed osserviamo inoltre che si ha presso a poco $Bg=Ah$, perchè i punti g ed h quasi coincidono a motivo della piccola grossezza della lente. Sostituendo perciò in (b), si otterrà in fine l' equazione semplicissima

$$\frac{n-1}{R}+\frac{n-1}{r}=\frac{1}{a}+\frac{1}{x} \ldots\ldots (c),$$

la quale, sebbene approssimativa, è più che sufficiente per tutte le applicazioni pratiche.

Se la lente è *convesso-convessa* regolare, si ha $R=r$; se è *piano-convessa*, si ha $R=\infty$ o $r=\infty$; se è *concavo-concava*, R ed r sono negativi; e finalmente se è *piano-concava*, uno dei raggi *negativi*, R o r, è *infinito*. Così la formula (c) si adatta a tutte le specie di lenti.

Se si suppone il raggio incidente Fg parallelo all' asse, circostanza che si esprime facendo FB o $a=\infty$, si ha $\frac{1}{a}=0$, e la formula (c) diviene

$$\frac{n-1}{R}+\frac{n-1}{r}=\frac{1}{x}:$$

la distanza x, ove s' intersecano, dopo le refrazioni, tutti i raggi paralleli al-

l'asse, è ciò che abbiamo di sopra chiamato la *distanza focale*: indicandola con f, essa si trova dunque determinata dalla espressione

$$f = \frac{Rr}{(n-1)(R+r)} \;\ldots\ldots\; (d).$$

Così, conoscendo il rapporto di refrazione dall'aria nel vetro e i raggi di curvatura delle superficie della lente, si potrà sempre determinare la distanza focale f, e, in generale, essendo date tre delle quattro quantità f, n, R e r, l'espressione (d) farà conoscere il valore della quarta.

Se si tratta, per esempio, di una lente *convesso-convessa* simmetrica, di vetro comune, pel quale si ha $n = \frac{17}{11}$ (*Vedi* Refrazione), siccome allora si ha $R = r$, la formula diviene

$$f = \frac{R}{2(n-1)} = \frac{11}{12} R,$$

vale a dire che la distanza focale è minore del raggio di curvatura della dodicesima parte di questo raggio.

Se la lente è *piano-convessa*, uno dei raggi R o r è infinito, e l'espressione (d) diviene

$$f = \frac{R\infty}{\infty(n-1)} = \frac{R}{n-1} = \frac{11}{6} R.$$

In questo caso la distanza focale è dunque presso a poco il doppio del raggio di curvatura.

Nella stessa guisa si troverebbe, per la lente *concavo-concava* simmetrica, $f = -\frac{11}{12} R$, e per la lente *piano-concava*, $f = -\frac{11}{6} R$.

La *distanza focale* delle lenti convesse può esser determinata, per mezzo dell'esperienza, esponendo la lente ai raggi solari e misurando la distanza della sua superficie posteriore dall'immagine projettata sopra un piano che si avvicina o si allontana finchè questa immagine divenga la più piccola possibile. Misurata così la distanza focale, il raggio di curvatura trovasi determinato mediante le formule precedenti. *Vedi* Canocchiale, Menisco, Telescopio e Vetro.

LEONARDO da Pisa. *Vedi* Fibonacci.

LÉOTAUD (Vincenzo), gesuita francese e geometra distinto del secolo XVII, nacque nel 1595 in Val-Louise, nella diocesi di Embrun, e morì in questa città nel 1672. Ha pubblicato: I *Geometricae practicae elementa, ubi de sectionibus conicis habet quaedam insignia*, Dole, 1631, in-16; II *Etymon quadraturae circuli hactenus editorum celeberrimae, ec.*, Lione, 1653, in-4: È questa una confutazione dell'opera sullo stesso argomento pubblicata dal p. Gregorio da San Vincenzo (*Vedi* Gregorio), che credeva da avere sciolto il problema della quadratura del circolo. Alcuni discepoli del p. da San Vincenzo avendo risposto al p. Léotaud, questi replicò coll'opera seguente: III *Cyclomathia seu de multiplici circuli contemplatione libri III*, ivi, 1663, in-4. A tale opera tien dietro un trattato esteso sulla quadratrice di Dinostrato, in cui l'autore sviluppa alcune proprietà non ancora scorte di tale curva. Si consulti la *Storia delle matematiche* di Montucla, tom. II, 77. IV *Institutionum arithmeticarum libri IV*, ivi, 1660, in-4.

LEOWITZ (Cipriano), astronomo ed astrologo tedesco, morto a Lawingen in Svezia nel 1574, ha pubblicato: I *Tabulae ascensionum omnium obliquarum ad plures altitudinis gradus productae*, Augusta, 1551, in-4; II *Eclipsium ab anno 1554 usque ad annum 1606 descriptio*, ivi, 1554, in fol. III *Ephemeridum novum atque insigne opus ab anno 1556 ad annum 1606 accuratissime supputatum*, ivi, 1557, in-fol.

LEPAUTE (Giovanni Andrea), celebre orologiaro, nato nel 1709 a Montmédi, si recò giovanissimo a Parigi, ove non tardò a farsi conoscere per la perfezione delle opere sue. Avendo avuto occasione di conoscere Lalande, strinse amicizia con questo astronomo, e col soccorso dei lumi che ne attinse non meno che coi propri suoi talenti potè introdurre notabili miglioramenti nell' orologeria. Lepaute somministrò dei pendoli a quasi tutti gli osservatorj di Europa, e suoi sono i più belli orologi che ornano gli edifizj pubblici di Parigi. Quest' artista stimabile morì a St.-Cloud l' 11 Aprile 1789. Le sue opera sono: I *Traité d'horlogerie*, Parigi, 1755, in-4. Tale opera, quantunque ecclissata da altre che sullo stesso soggetto comparvero in seguito, contiene non poche particolarità e notizie interessanti che invano eercherebbonsi altrove. Tra le altre cose è notabile la prefazione, la quale contiene la storia dei diversi tentativi fatti per misurare il tempo e determinarne l'andamento, prima della invenzione degli orologi a ruote ed a peso, e quella dei perfezionamenti operati negli orologi dal XIV secolo fino a Sully, famoso artista, di cui descrive i lavori in modo sommamente interessante. II *Supplément au traité d'horlogerie*, Parigi, 1760, in-4: Lalande ha avuto non poca parte nella compilazione di quest' opera; III *Description de plusieurs ouvrages d'horlogerie*, Parigi, 1764, in-12.

LEPAUTE (Madama), moglie del precedente, tiene un grado distinto tra le donne che si sono segnalate nell' astronomia. Nata nel 1723 a Parigi, annunziò fino dall' infanzia disposizioni poco comuni per le scienze. L'astronomia in particolare richiamò la sua attenzione, e coi suoi calcoli sulla famosa cometa di Halley giovò molto a Clairaut e a Lalande. Essa morì a St.-Cloud il 6 Dicembre 1788. Ha pubblicato: I *Table des longueurs des pendules* nel *Trattato di Orologeria* di suo marito; II Parecchie tavole e osservazioni nella *Connaissance des temps* dal 1759 al 1774; III Alcune tavole del sole, della luna e degli altri pianeti nelle *Effemeridi dei movimenti celesti*, tom. VII e VIII; IV Diverse memorie di astronomia comunicate all'Accademia di Béziers.

LEPRE (*Astron.*). Costellazione meridionale composta di 19 stelle nel Catalogo britannico. La stella sua principale è di terza grandezza.

LEROY (Pietro), famoso orologiaro, nacque a Parigi nel 1717. Appresi i principj dell' arte sua da suo padre Giuliano che in essa erasi acquistato gran fama, ma lo superò pei perfezionamenti che introdusse negli orologi di mare, perfezionamenti che nel 1769 gli ottennero dall' Accademia delle Scienze di Parigi il doppio premio proposto per la maniera migliore di misurare il tempo in mare. Tale onorevole ricompensa stimolò il suo zelo: si applicò con maggiore ardore a nuovi tentativi, e giunse a dare ai suoi orologi la maggiore regolarità possibile mediante la scoperta dell' isocronismo della lava spirale. Le sue fatiche furono nuovamente ricompensate, perchè l' Accademia gli conferì una seconda volta il doppio premio nel 1773. Tale valente artista morì a Vitry, presso Parigi, il 25 Agosto 1785. Le opere principali di questo abile meccanico sono: I *Etrennes chronométriques pour l'année* 1760, Parigi, in-12. Tale opera è divisa in otto parti, nelle quali tratta delle divisioni naturali e artificiali del tempo, del calendario, della cronologia, degli istrumenti necessarj per misurare il tempo, e di molte altre cose relative allo stesso argomento. Divenuta rarissima, Janvier la ristampò a Parigi nel 1811, coi cambiamenti e colle aggiunte rese in-

dispensabili dai progressi dell' arte, coll' appresso titolo: *Etrennes chronologiques pour l'an* 1811. II *Exposé succinct des travaux de Harrison et de Leroy dans la recherche des longitudes en mer, et des épreuves faites de leurs ouvrages*, Parigi, 1767, in-4; III *Mémoire sur la meilleure manière de mesurer le temps en mer*, coronata dall' Accademia delle Scienze di Parigi, e stampata in seguito al *Viaggio* di Cassini. IV *Précis des recherches faites en France depuis* 1730, *pour la détermination des longitudes en mer par la mesure artificielle du temps*, Parigi, 1773, in-4, con un *Supplemento* stampato nel 1774.

LESEUR (Tommaso), dotto geometra, nato nel 1703 a Rethel, entrò in età di diciotto anni nell' ordine dei minimi, e fu inviato dai suoi superiori a Roma per compiervi i suoi studj. Allora s'insegnava in tutti i collegj il sistema dei vortici, sistema che venne tosto dal p. Leseur considerato come un romanzo. Terminato il suo corso, tornò in Francia ove si trattenne per cinque anni; ma risaputo avendo che il p. Jacquier, che gli era successo a Roma, osava impugnarvi la filosofia cartesiana, chiese ed ottenne il permesso di andare presso di lui Come si videro si amarono tosto, ed ogni cosa divenne comune tra essi, pene, piaceri, fatiche, e la stessa gloria. Il p. Leseur fu creato professore di matematiche nel Collegio della Sapienza, e dava alternativamente col p. Jacquier lezioni di teologia nel Collegio della Propaganda. Seguitò a Parma il suo amico, allorchè questi fu nominato precettore dell' infante, e non volle lasciarlo finchè durò tale educazione. Ritornato a Roma, infermò e morì il 22 Settembre 1770. Il p. Leseur ha avuto parte nel *Commentario sui principj di Newton* e negli *Elementi del calcolo integrale*, due delle opere più importanti dello scorso secolo. I due amici lavoravano ciascuno dal canto suo, e si comunicavano poscia il resultato delle loro meditazioni; ma non si è mai saputo a quale dei due apparteneva la lezione preferita, ed essi medesimi l'avevano dimenticato. Entrambi, tanto modesti quanto dotti, non si prefiggevano nessuna gloria nella pubblicazione delle loro opere. Il p. Leseur non ha pubblicato solo che una *Memoria sul calcolo integrale*, Roma, 1748, cui Montucla ha esaminata nella sua *Storia delle Matematiche*, Tom. III, pag. 41 e segg.

LETTERA DOMENICALE (*Cal.*). *Vedi* Calendario.

LETTERE NUNDINALI (*Cal.*). Col nome di *lettere nundinali* si sono indicate le prime otto lettere dell' alfabeto affisse nel calendario riformato da Giulio Cesare, come in seguito vi sono state poste le nostre lettere domenicali, perchè si è creduto generalmente che queste lettere indicassero i mercati romani. Questa falsa denominazione, attribuita in un'epoca in cui erasi perduta la traccia della vera destinazione di queste lettere, repugna materialmente ad una simile applicazione a motivo dell' impossibilità di potere con sole otto lettere indicare il ritorno dei mercati che non tornavano che ogni nove giorni, o, come espressamente lo accenna Macrobio ne'suoi *Saturnali*, lib. I, cap. 16, *dopo otto giorni consacrati al lavoro*.

Ma questa falsità materiale poco importerebbe: un inconveniente più grave è quello di aver nascosto una verità interessante, cioè che queste lettere formano un calendario lunare, che da Giulio Cesare fu annesso al suo calendario solare; talmentechè egli deve riguardarsi come il riformatore dell' uno e dell'altro, merito che quasi tutti ignorano.

Nulladimeno nel 1704, in un' opera portante per titolo: *Kalendorium Caesorianum*, composta in occasione della recente scoperta di uno di tali calendarj in uno scavo fatto a Roma, il Bianchini per mezzo di un' analisi sottilissima era giunto a riconoscere la vera destinazione di queste lettere e l'aveva dimostrata in un modo irrefragabile. Pore, o che il suo libro non sia stato abbastanza divulgato, o che le sue dimostrazioni siano sembrate difficili a capirsi, l' errore non è scom-

parso, e persone istruite; come per esempio gli autori dell'*Arte di verificare le date*, hanno continuato a ripetere la denominazione di lettere nundinali, ed a cercare ancora, sebbene infruttuosamente, di spiegare come queste lettere potessero adempire l'ufficio che loro si attribuiva. Quest'errore si trova implicitamente anco nel nostro articolo CALENDARIO, ove abbiamo detto che Giulio Cesare bandì affatto l'anno lunare dal suo calendario.

Nella nota XX di un'opera avente per titolo: *Tables synchroniques de l'histoire de France*, e formante continuazione alla *Storia di Francia* di Anquetil (*ediz.* Cotelle, 1829), si trovano dei dettagli circostanziatissimi sulla scoperta del Bianchini, sulla costruzione del calendario lunare di Giulio Cesare, sul suo uso per ottenere, anche adesso, i novilunj medj, sulle cause che l'hanno fatto cadere in una dimenticanza sì compiuta, e sul sistema finalmente che gli è stato surrogato, quello cioè dei numeri ecclesiastici che non ne sono che una traduzione, ma una traduzione sì comoda che ha fatto dimenticare affatto l'originale.

Senza entrare in particolarità che non sarebbero d'altronde proporzionate all'utilità del soggetto, crediamo che sia conveniente, quando non fosse che per giustificare delle asserzioni che potrebbero altrimenti sembrare azzardate, di fare osservare sulla scorta delle opere citate di sopra:

Che nell'anno 45 avanti G. C., primo della riforma di Giulio Cesare, e primo egualmente delle enneadecateridi del suo calendario lunare, il novilunio essendo avvenuto il 1° Gennajo, esso fu indicato nel Gennajo colla lettera A della *prima ottava*, o con A', e che negli anni seguenti *impari* della enneadecateride le neomenie lo furono successivamente colle lettere A'', A''', A'''', B', B'', B''', B'''', C', C''. Che parimente, negli anni *pari* della stessa enneadecaterida, le neomenie furono in Gennajo indicate successivamente colle lettere C''', C'''', E', E'', E''', E'''', F', F'', F''', e nel ventesimo, o primo del ciclo seguente, nuovamente con A', il che fa ricominciare lo stesso ordine nella enneadecateride seguente; circostanza notabilissima che fa vedere che l'ordine della serie non è arbitrario, ma fondato sopra una combinazione determinata.

Ora, se alle lettere di sopra accennate si sostituiscono nel calendario lunare gli anni col numero d'ordine che hanno nell'enneadecateride, si sarà formato il calendario dei numeri d'oro molto più comodo di quello di Giulio Cesare. In questo, infatti, le serie di sopra enunciate non sussistono che nei quattro mesi iniziali delle stagioni, ed anco negli ultimi due di questi mesi gl'indici sono formati da una serie di lettere diversa da quella del gennajo, quantunque dipenda essa dalla prima e da questa si deduca; ma, nei mesi intermedj, le lunazioni non sono più determinate che dall'alternazione pari ed impari dei giorni che le compongono.

Da tutto questo resulta che, per quanto fosse ingegnoso il metodo di Sosigene, esso richiedeva una moltitudine di considerazioni minuziose, per poterne fare uso, e perciò il metodo, che consisteva semplicemente nell'osservare a qual giorno del mese corrispondeva l'anno dell'enneadecateride del quale si trattava, doveva necessariamente prevalere all'altro e farlo dimenticare completamente.

E ne resulta di più che dopo la scoperta del Bianchini non si possono più chiamare *nundinali* le ottave di lettere affisse nel calendario di Giulio Cesare, e che il loro vero nome è quello di *lettere lunari*.

La sostanza di questo articolo è dovuta interamente al sig. De Vaublanc che ha voluto ancora favorirci di altre notizie sparse in questo Dizionario.

LEUCIPPO, famoso filosofo greco, nato in Abdera verso l'anno 370 av. G. C., si applicò particolarmente allo studio della natura, e viene generalmente considerato come l'inventore del sistema degli atomi che fu perfezionato da Democrito, suo discepolo, e in seguito da Epicuro. Le principali proposizioni del suo sistema

erano le seguenti. Il mondo è infinito e soggetto a modificazioni continue. — L'universo è vuoto ed i globi sono formati dagli atomi o corpuscoli che si unirono insieme cadendo nello spazio. — Il sole percorre il più gran circolo intorno alla luna. — La terra, trasportata come in un carro, gira intorno al centro, ec. Tale idea di Leucippo farebbe supporre ch' egli avesse indovinato il moto della terra intorno al suo asse. Si legga intorno alle opinioni di questo filosofo la *Storia delle Matematiche* di Montucla.

LEUPOLD (Giacomo), ingegnoso meccanico sassone, nato nel 1674 a Planitz presso Zwickau e morto nel 1727, ha pubblicato le seguenti opere: I *La tromba pneumatica spiegata*, ec. (in tedesco), Lipsia 1707-12-15, 3 parti, in-4. II *Teatro universale delle macchine e delle scienze meccaniche* (in tedesco), Lipsia, 1723-27, 7 vol. in-fol. Il primo volume di tale opera importante contiene la descrizione delle macchine che servono ad alzare o a trasportare i pesi; il secondo tratta della statica universale, dell' equilibrio, de' pesi e de' contrappesi, ec.; il terzo dell' idrostatica; il quarto dell' aerostatica e degli strumenti che servono a calcolare il peso dell' aria; il quinto della statica universale; il sesto della costruzione dei ponti; e finalmente, il settimo, delle macchine aritmetiche e degli strumenti di geometria. Duole che Leupold non abbia potuto terminare tale opera, alla quale venne aggiunto un supplemento nel 1739. Scheffler vi fece un nuovo supplemento, cui pubblicò nel 1741 con un indice generale di tutta l' opera, e Giovanni Matteo Beyer pubblicò a guisa di continuazione il *Teatro dell' architettura dei mulini* (in tedesco), Lipsia, 1735, 2 vol. in-fol.; riprodotto con nuovo frontespizio a Dresda nel 1767.

LEVA. (*Mec.*). Verga di ferro, di legno o di qualunque altra materia resistente, la quale serve a sollevare dei pesi (*Vedi* Tav. CLXI, fig. 1), ovvero, più generalmente, per mezzo della quale una potenza aiutata da un punto di appoggio sostiene una resistenza.

In *Statica*, si considera, la *leva* come una linea retta o curva inflessibile, e senza alcuna gravità la quale determina le posizioni della potenza, della resistenza e del punto di appoggio. Nella pratica, la gravità della leva fa parte delle forze messe in azione, come in seguito lo vedremo.

Si distinguono tre sorti di leve. La *leva del primo genere* è quella nella quale il punto di appoggio C è situato tra la potenza P e la resistenza R (*Tav.* CLXI, *fig.* 2). La *leva del secondo genere* è quella nella quale la resistenza R è situata tra il punto di appoggio e la potenza P (*Tav.* CLXI, *fig.* 3). Finalmente la *leva del terzo genere* è quella nella quale la potenza P si trova tra il punto di appoggio e la resistenza R. (*Tav.* CLXI, *fig.* 4). Le distanze dal punto d' appoggio alle estremità della leva si chiamano *i bracci della leva.*

Per trovare le condizioni dell' equilibrio nella leva, cominciamo dal considerare una leva retta (*Tav.* CLXI, *fig.* 5) AB, situata sopra un punto di appoggio C, e alle estremità della quale sono applicate due forze P e Q le quali agiscono nelle direzioni paralelle AQ, BP, Queste due forze saranno evidentemente in equilibrio, se la loro resultante CR passa pel punto di appoggio e si trova distrutta dalla resistenza di questo punto; ora, la resultante di due forze paralelle (*Vedi* Paralella e Resultante), taglia la retta che unisce i loro punti di applicazione, in parti reciprocamente proporzionali a queste forze; così, perchè vi sia equilibrio, la retta AB dev' essere divisa in questo modo al punto C, e si ha la proporzione

$$P : Q :: AC : CB,$$

vale a dire che, nel caso di equilibrio, *la potenza e la resistenza sono in ragione inversa dei loro bracci di leva.*

La forza P e Q, potendo sempre rappresentarsi con pesi, il carico che sostiene il punto di appoggio è espresso dalla somma P+Q, quando i pesi agiscono nel medesimo senso. Questo carico è solamente eguale all'eccesso del più grau peso sul più piccolo, quando le forze agiscono in senso contrario, come nalle leve del secondo e del terzo genere. In tutti i casi, il puoto di appoggio dev' essere capace di resistere al carico.

Nella *leva curva* (*Tav.* CLXI, *fig.* 6), la condizione di equilibrio consiste sempre io ciò che la resultante delle forze che gli sono applicate passi per il punto di appoggio, e sia distrutta dalla resistenza di questo punto. Così abbassando dal punto di appoggio C, le perpendicolari Cq e Cp sopra le direzioni AQ ed BP delle forze, direzioni che debbono essere in uo medesimo piaoo, si avrà

$$P : Q :: Cq : Cp.$$

Dunque nell'equilibrio di una leva qualuoque, *la potenza e lo resistenza sono in ragione inversa delle perpendicolori abbassate dal punto d'appoggio sopra le loro direzioni.*

Resulta da questa proposizione che qualuoque sia la forma di una leva possiamo sempre supporre che vi si sia sostituito coo uoa leva piegata a guisa di gomito qCp, formata dalle perpendicolari abbassate dal puoto di appoggio sopra le direzioni delle forze, e cousiderare i punti q e p ove queste perpendicolari vengono a cadere, come i puoti di applicazione delle forze, allora i *bracci* della leva saranno essi stessi delle perpendicolari, e potremo generalmente dire, che le due forze che si fanno equilibrio sono in ragione inversa dei loro bracci di leva.

Per aver riguardo al peso della leva, bisogna considerarlo come una forza S, applicata al centro di gravità G (*Tav.* CLXI, *fig.* 5), e allora la resultante dalle tre forze paralelle P, Q, S, dovendo passare per il puoto di appoggio C, si ha per l'equazione dell'equilibrio,

$$Q \times AC = S \times CG + P \times CB \ldots\ldots (a).$$

Il carico del punto di appoggio diventa P+Q+S.

Se ci si proponesse di determinare il valore di un peso P, il quale essendo applicato all'estremità B del maggior braccio della leva $CB = a$, deve fare equilibrio ad un altro peso Q, applicato all'altro braccio $AC = b$; il peso della leva, che si suppone omogeneo e per tutto della stessa grossezza, essendo S; siccome il ceutro di gravità è allora nel mezzo della leva, e che conseguentemente

$$CG = AG - AC = \frac{1}{2}(a+b) - b = \frac{a-b}{2}$$ si avrebbe, in virtù dell'equazione (a),

$$bQ = aP + \frac{a-b}{2}S,$$

donde si deduce

$$P = \frac{b}{a}Q - \frac{a-b}{2a}S \ldots\ldots (b),$$

così più il braccio a sarà grande comparativamente al braccio b, e più il peso S della leva, supposto sempre lo stesso, concorrerà col peso P per fare equilibrio al peso Q. È dunque essenziale nelle applicazioni di tener conto del peso della leva; se supponiamo per esempio, che la leva sia una sbarra di ferro omogenea di un peso di 8 chilogrammi e di una lunghezza di due metri, che il suo maggior braccio sia di 15 decimetri, il suo più piccolo di 5 decimetri, e che si tratti di fare equilibrio al peso Q di 40 chilogammi che agisce all' estremità del pic-

colo braccio, avremo $a=15$, $b=5$, $Q=40$, $S=8$, e per conseguenza, mettendo questi valori nell'equazione (b),

$$P=\frac{5}{15}40-\frac{15-5}{30}8=10+\frac{2}{3},$$

vale a dire che un peso di 10 $^2/_3$ chilogrammi è sufficiente, in queste condizioni, per fare equilibrio a un peso di 40. Se non si fosse tenuto conto del peso della leva, si sarebbe avuto $P=\frac{5}{15}40=13\,^1/_3$ chilogrammi, valore troppo grande.

Soltanto nel caso in cui i pesi P e Q sono grandissimi rapporto a quello della leva è premesso di trascurare quest' ultimo.

Tutto quello che abbiamo detto potendo applicarsi senza difficoltà alle leve del *secondo* e del *terzo genere*, aggiungeremo solamente che nella leva del primo genere, la potenza può essere o maggiore o minore o eguale alla resistenza, che nella leva del *secondo genere* la potenza è sempre minore della resistenza, e che finalmente nella leva del *terzo genere* la potenza è sempre maggiore della resistenza.

LEVA IDRAULICA. (*Mec.*) Questa macchina, composta in generale di vasi adattati all' estremità di una o più leve, riceve dal motore un movimento alternativo che gli fa versare l' acqua immediatemente dopo averla attinta. Se ne sono immaginate un grandissimo numero descritte nell' *opera* del Perronet e nel trattato del Borgnis sopra le *macchine idrauliche* La più semplice è una lunga cassa in legno (*Tav.* CLXI, *fig.* 7) mobile sopra un appoggio O, e che un uomo fa oscillare; il suo prodotto non può mai essere considerabile, e non dobbiamo ricorrere a simili macchine che in mancanza di qualunque altro mezzo.

LEVANTE. (*Astron.*). Questa parola esprime la stessa cosa che *Oriente* ed *Est*. *Vedi* Armillare.

LEVARE (*Astron.*). S' indica con questo nome la prima apparizione di un astro al di sopra dell' orizzonte, quando esso passa dall' emisfero inferiore all' emisfero superiore per effetto del moto diurno apparente della volta celeste.

Siccome l' orizzonte sensibile dipende dall' elevazione del luogo ove uno si trova (*Vedi* Orizzonte), l' ora del *levare apparente* di un astro varia non solamente rapporto ai diversi punti della superficie della terra, ebe tutti hanno orizzonti differenti, ma ancora in ragione dell' altezza del luogo che un osservatore occupa al di sopra di questa superficie; bisogna dunque aver riguardo a tutte queste circostanze se si vuol calcolare l' ora del *levare apparente*. Si dice *levare astronomico* quello che ha luogo all' orizzonte razionale; la cognizione di quest' ultimo fa trovare facilmente l'ora del levare apparente.

Per calcolare l' ora del levare astronomico di un astro, per un luogo di cui sia nota la latitudine, basta conoscere la declinazione di quest' astro. Ma siccome la declinazione dei pianeti varia ad ogni istante, a motivo del loro movimento proprio, e siccome quella che hanno nel momento del loro levarsi non può esser determinata che per mezzo dell' ora del levare medesimo, che appunto si tratta di trovare, è necessario di prendere per approssimazione questa declinazione e di dedurne l' ora approssimata del levare: con quest' ora approssimata si calcola una declinazione più esatta che serve finalmente a far conoscere l' ora cercata con un' approssimazione sufficiente. Un esempio chiarirà meglio questa teoria.

Sia ACB l' orizzonte razionale del luogo (*Tav.* XXII, *fig.* 10) e C la posizione dell' astro sull' orizzonte: sia inoltre Z lo zenit, P il polo e CP l' arco del circolo di declinazione dell' astro. L' angolo APC sarà l' angolo orario dell' astro, e la sua misura presa sull' equatore è ciò che dicesi l' arco semidiurno:

quest' arco ridotto in tempo, a ragione di 15° per ora, esprime la metà della durata che scorre tra il levare e il tramontare dell' astro.

Il triangolo PAC, rettangolo in A dà (*Vedi* TRIGONOMETRIA)

$$\cos APC = \frac{\tang AP}{\tang PC}.$$

Ma l' arco AP = 180° − PB, e PB è la latitudine del luogo; PC è il complemento della declinazione dell' astro; così, indicando con λ la latitudine, con δ la declinazione, e con h l' arco semidiurno, si ha

$$\cos h = \frac{\tang(180° - \lambda)}{\tang(90° - \delta)};$$

ora, $\tang(180° - \lambda) = -\tang\lambda$, e $\tang(90° - \delta) = \cot\delta = \frac{1}{\tang\delta}$, dunque sostituendo si trova finalmente

$$-\cos h = \tang\lambda \tang\delta,$$

ossia

$$\cos(180° - h) = \tang\lambda \tang\delta \; \ldots\ldots \; (a),$$

a motivo di $-\cos h = \cos(180° - h)$.

Supponiamo che si tratti di calcolare l' ora del levare del sole a Parigi il 1° Luglio 1836. Nella *Connaissance des temps* del 1836 si trova che la declinazione del sole a mezzogiorno è di

23° 10′ 54″,8	il 30 Giugno	Differenza 3′ 54″,8
23 7 0 ,0	il 1° Luglio	

La variazione nel corso di 24 ore essendo sottrattiva, se ne aggiungerà il quarto 58″,7 alla declinazione del primo Luglio a mezzogiorno, e si avrà così la declinazione delle ore 6 della mattina, declinazione che non può differire da quella del momento del levare che di una piccolissima quantità. La latitudine di Parigi all' Osservatorio essendo di 48° 50′ 13″, si avrà

$$\delta = 23° \; 7' \; 58'',7$$
$$\lambda = 48 \; 50 \; 13$$

Ponendo questi valori nella formula (a) ed operando coi logaritmi, si ottiene

$$\log \tang\delta = 9,6306480$$
$$\log \tang\lambda = 0,0583418$$
$$\log \cos(180° - h) = 9,6889898$$

donde $180° - h = 60° \; 44' \; 55''$, e $h = 119° \; 15' \; 5''$.

Riducendo ad *ore* questo valore dell' arco *semidiurno*, esso diviene

$$h = 7^{or} \; 57' \; 0'',3.$$

Il sole dunque impiegherà una durata di tempo eguale a $7^{or} \; 57' \; 0'',3$ per passare dall' orizzonte al meridiano; perciò, siccome quando il sole si trova sul meridiano è *mezzogiorno*, sarà $12^{or} - h$, o $4^{or} \; 2' \; 59'',7$ nell' istante del levare.

Con questo primo valore approssimativo si può calcolare più esattamente la declinazione, ed ottenere quindi l' ora della levata del sole in un modo più preciso. Così, dopo aver trovato per mezzo della proporzione

$$24^{or} : 3' \; 54'',8 :: 7^{or} \; 57' \; 0'',3 : x = 1' \; 17'',8$$

che la variazione di declinazione è alle $7^{or}\ 57'\ 0'',3$ di $1'\ 17'',8$, si ottiene, sommando queste quantità colla declinazione del *mezzogiorno* al 1° Luglio,

$$\delta = 23^\circ\ 8'\ 17'',8,$$

per la declinazione dell' istante del levare. Ricominciendo quindi i calcoli con questo nuovo valore si trova

$$\log \text{tang}\, \delta = 9{,}6307592$$
$$\log \text{tang}\, \lambda = 0{,}0583418$$
$$\log \cos (180^\circ - h) = 9{.}6891010$$

Donde $180^\circ - h = 60^\circ\ 44'\ 26''$, e $h = 119^\circ\ 15'\ 34''$, il che dà in *tempo* $h = 7^{or}\ 57'\ 2''$; così l' ora della levata del sole è $4^{or}\ 2'\ 58''$.

Quest' ora è l' ora *solare vera*: essa si riduce, se si vuole, in *tempo medio* per mezzo dell' *equazione del tempo*. *Vedi* Equazione del tempo.

Quando si tratta della luna o dei pianeti, nella equazione (a) si fa uso egualmente della declinazione dell' astro nell' istante approssimato del suo levare che si trova calcolando primieramente l' ora del passaggio pel meridiano (*Vedi* Passaggio) e sottraendone 6 ore, lunghezza media dell' arco semidiurno. I calcoli fanno conoscere una prima approssimazione di quest' arco semidiurno, e per conseguenza l' ora del levare, sottraendo l' arco semidiurno dall' ora del passaggio pel meridiano. Per mezzo di questo primo valore dell' ora del levare, si calcola più esattamente la declinazione, e ricominciando tutte l' operazione si ottiene l' ora vera del levare dell' astro con un' esattezza sufficiente.

L' ora del *levare* e del *tramontare* degli astri che si vede nella *Connoissance des temps* è quella del *levare* e del *tramontare astronomico apparente*, vale a dire del momento in cui gli astri compariscono sull' orizzonte razionale; questo momento differisce sempre da quello in cui gli astri sono realmente sull' orizzonte, a motivo della parallasse e della refrazione i cui effetti opposti diminuiscono per una parte ed aumentano per l' altra l' altezza degli astri: così, per esempio, quando sembra che il sole si levi, esso si trova circa 34' sotto l' orizzonte, e la luna invece è 21' al di sopra. Per porre in calcolo tali circostanze, supponiamo che nell' istante in cui l' astro apparisce sull' orizzonte razionale, esso sia realmente in D (*Tav.* XXII, *fig.* 10); l' arco CD che indicheremo con π essendo eguale alla differenza degli effetti della parallasse e della refrazione, avendosi cioè

$$\pi = \text{refrazione orizzontale} - \text{parallasse orizzontale},$$

l' angolo orario che si dovrà calcolare sarà realmente ZPD e non ZPC. Ora nel triangolo DZP si conoscono, i tre lati, cioè

$$ZD = ZC + CD = 90^\circ + \pi;$$

PD, che è il complemento della declinazione dell' astro, ossia $90^\circ - \delta$; e ZP, che è il complemento della latitudine del luogo, cioè $90^\circ - \lambda$. Si avrà dunque pel valore dell' angolo orario h l' espressione

$$\text{sen}^2 \tfrac{1}{2} h = \frac{\text{sen}\, \mu \cos(\mu - \pi)}{\cos \delta \cos \lambda} \quad \ldots\ldots\ldots (b),$$

ove μ è un angolo ausiliario determinato dalla relazione

$$2\mu = \lambda + \pi + 90^\circ - \delta.$$

Applichiamo questa formula all' esempio superiore. Primieramente si ha per la

refrazione orizzontale 33′ 45″, per la parallasse orizzontale del sole 8″, e per conseguenza $\pi = 33' 45'' - 8'' = 33' 37''$: a perchè si sa di più cha la declinazione del sole è presso a poco di 23° 8′ 18″, così si troverà $\mu = 58° 7' 46''$ a quindi $\mu - \pi = 57° 34' 9''$, ed eseguendo i calcoli si avrà

$$\begin{aligned} \log \operatorname{sen} \mu &= 9{,}9290321 \\ \log \cos(\mu - \pi) &= 9{,}7293925 \\ \text{compl} \log \cos \delta &= 0{,}0364205 \\ \text{compl} \log \cos \lambda &= 0{,}1816393 \\ \hline \text{Somma} &= 19{,}8764844 \\ \text{Semisomma} &= 9{,}9382422 = \log \operatorname{sen} \tfrac{1}{2} h, \end{aligned}$$

donde $h = 120° 19' 34$, valore che ridotto *in tempo* dà 8°r 1′ 18″. Sottraendo questo valore da 12 ore, si ha 3°r 58′ 42″ per l'*ora vera* del levare del sole il primo Luglio 1836. L'*equazione del tempo* in tale epoca essendo di + 3′ 18″, l'ora del levare in *tempo medio* è 4°r 2′. L'esattezza in questa specie di calcoli non si spinge più oltre dei minuti, a motivo dell'incertezza del valore della refrazione orizzontale, e perchè la cognizione dell'ora del levare degli astri non serve che a far sapere se un astro è al di sopra dell'orizzonte nel momento di un fenomeno di occultazione o di ecclisse.

Le formule (*a*) e (*b*) possono servire egualmente a trovare l'ora del *tramonto*, perchè quest'ora è eguale alla somma dell'arco semidiurno a dell'ora del passaggio pel meridiano.

LEVARE DI PIANTA (*Geom. prat.*). È quella parte dell'agrimensura (*Vedi* AGRIMENSURA) che ha per oggetto di rappresentare in piccolo, sulla carta, la figura e le proporzioni di un terreno.

Per levare una pianta, si richiedono due serie distinte di operazioni: le une si eseguiscono sul terreno, le altre sulla carta. Le prime hanno per oggetto di misurare le distanze dei diversi punti scelti sul terreno egualmente che le relazioni angolari tra le linee rette che uniscono questi punti, per potere dividere il terreno in una serie di triangoli. Nelle seconde, si tratta di costruire in piccolo sulla carta una figura simile, vale a dire una serie di triangoli i cui angoli siano eguali respettivamente agli angoli dei triangoli sul terreno, e i cui lati siano proporzionali ai loro lati. I vertici degli angoli riferendosi generalmente ai punti principali del terreno, questi punti si trovano pure fissati sulla carta, e per avere una rappresentazione fedele del tratto di paese misurato basta disegnare gli oggetti facendo uso di tratti più o meno vivi, di colori e di altri segni convenzionali capaci di dare a ciascun particolare il suo carattere distintivo.

Facendo astrazione da ciò che appartiene all'arte del disegno, l'arte di *levar di pianta*, ridotta al suo elemento primitivo, non è che la costruzione, sulla carta, di un triangolo simile ad un triangolo dato, operazione che non presenta difficoltà nessuna.

Per rappresentare immediatamente sulla carta tutte le particolarità di un terreno, può farsi uso di uno stromento chiamato *tavoletta*, che rende inutile la misura degli angoli, e che sotto questo rapporto presenta grandi vantaggi quando si tratta di un terreno di piccola estensione: quando però tale estensione è molto grande si rende indispensabile di eseguire separatamente le due distinte serie di operazioni accennate di sopra; e poichè la formazione dei triangoli dei quali occorre coprire il terreno può presentare varie difficoltà, così noi anderemo espo-

nendole in una serie di problemi annettendovi le soluzioni più semplici che si conoscano.

1. Problema I. *Determinare la distanza di due punti* C *e* D (Tav. CLXX, fig. 1), *dai quali si possono scorgere due altri punti* A *e* B, *la distanza dei quali sia nota.*

Dopo avere osservato nel punto C gli angoli ACB e BCD, e nel punto D gli angoli CDA e ADB, si attribuirà alla linea incognita CD una grandezza arbitraria, e con questi dati si calcolerà la grandezza di AB, come se si trattasse di trovare questa linea per mezzo della linea CD. Il resultato differirà necessariamente dalla vera grandezza di AB; ma tra questo resultato e questa grandezza vi sarà lo stesso rapporto che tra la grandezza attribuita a CD e la sua grandezza reale: talchè non occorrerà più che di fare una regola del tre per avere quest'ultima.

Supponiamo, per esempio, che gli angoli osservati nei punti C e D con un grafometro o con qualunque altro strumento siano:

$$ACB = 57^\circ, \qquad CDA = 55^\circ,$$
$$BCD = 43^\circ, \qquad ADB = 60^\circ,$$

e che a CD si attribuisca una grandezza arbitraria di 1000 metri.

Le operazioni da eseguirsi per ottenere il valore di AB corrispondente all'ipotesi di $CD = 1000$ sono le seguenti.

Nel triangolo ACD, nel quale si conosce il lato $CD = 1000$ e i due angoli adiacenti $ACD = ACB + BCD = 100^\circ$ e $CDA = 55^\circ$, il terzo angolo CAD essendo eguale a $180^\circ - 100^\circ - 55^\circ = 25^\circ$, si calcolerà il lato AD per mezzo della proporzione

$$\text{sen}\, 25^\circ : \text{sen}\, 100^\circ :: 1000 : AD.$$

Nel triangolo CDB, nel quale si conosce il lato $CD = 1000$ e gli angoli $BCD = 43^\circ$, $CDB = CDA + ADB = 115^\circ$, $CBD = 180^\circ - 115^\circ - 43^\circ = 22^\circ$, si calcolerà il lato BD per mezzo della proporzione

$$\text{sen}\, 22^\circ : \text{sen}\, 43^\circ :: 1000 : BD.$$

Ciò fatto, nel triangolo DAB si conosceranno i due lati AD, BD e l'angolo compreso $ADB = 60^\circ$, e si potrà calcolare il lato AB mediante la formula

$$AB = \sqrt{\left[\overline{AD}^2 + \overline{DB}^2 - 2AD \times DB \cos 60^\circ\right]} \ldots\ldots (1),$$

ovvero si comincerà dal determinare gli angoli DAB, DBA, e quindi si calcolerà il lato AB per mezzo di alcuna delle due proporzioni

$$\left.\begin{array}{l}\text{sen}\, DAB : \text{sen}\, 60^\circ :: DB : AB \\ \text{sen}\, DBA : \text{sen}\, 60^\circ :: AD : AB\end{array}\right\} \ldots\ldots (2).$$

Ecco i calcoli relativi alla determinazione dei lati AD e BD:

$$\begin{array}{rl}\log 1000 = & 3,0000000 \\ \log \text{sen}\ 100^\circ = & 9,9933515 \\ \hline & 12,9933515 \\ \log \text{sen}\ 25^\circ = & 9,6259483 \\ \hline \log AD = & 3,3674032\end{array}$$

Donde si ottiene $AD = 2330^m,254$.

$$\log 1000 = 3,0000000$$
$$\log \text{sen}^2 43^\circ = 9,8337833$$
$$= 12,8337833$$
$$\log \text{sen}\ 22^\circ = 9,5735754$$
$$\log BD = 3,2602079$$

Donde si ha $BD = 1820^m,572$.

I logaritmi di AD e di BD essendo dati dalle operazioni precedenti, il valore di AB si ottiene direttamente dalla formula (1) colla stessa prontezza che per mezzo delle proporzioni (2), dopo avere preventivamente calcolato uno degli angoli DAB o DBA. Moltiplicando ognuno di questi logaritmi per 2, essi divengono respettivamente 6,7348064, 6,5204158, i cui numeri corrispondenti sono

$$\overline{AD}^2 = 5430082,5, \qquad \overline{BD}^2 = 3314483,2$$

Quanto al terzo termine che si trova sotto il radicale, esso si ottiene nel modo seguente

$$\log 2 = 0,3010300$$
$$\log AD = 3,3674032$$
$$\log BD = 3,2602079$$
$$\log \cos 60^\circ = 9,6989700$$
$$\text{somma} = 16,6276111$$

togliendo 10 dalla caratteristica, a motivo del raggio delle tavole, si ha

$$\log(2AD.BD.\cos 60^\circ) = 6,6276111,$$

donde

$$2AD.BD.\cos 60^\circ = 4242395,1.$$

Sostituendo questi valori nella formula (1), si trova

$$AB = \sqrt{[5430082,5 + 3314483,2 - 4242395,1]} = \sqrt{[4502170,6]} = 2121,832$$

Così, qualunque siano le grandezze reali di AB e di CD, il loro rapporto è ora noto perchè si ha evidentemente

$$AB : CD :: 2121,832 : 1000,$$

donde

$$CD = \frac{1000 \times AB}{2121,832},$$

espressione nella quale non si deve fare altro che sostituire il valore reale di AB per ottenere il valore reale di CD. Se, per esempio, la grandezza data di AB fosse di 2625^m, si troverebbe $CD = 1237^m,14$.

2. Se si trattasse di misurare la distanza tra due punti inaccessibili A e B, invisibili dalle due estremità di una base nota CD, dovrebbero eseguirsi le stesse operazioni, fuori che l'ultima; perchè allora la grandezza reale di AB entrerebbe nei calcoli, e il resultato finale sarebbe la grandezza cercata di AB.

3. Prendendo l'angolo ACD eguale alla somma degli angoli ACB, BCD, abbiamo supposto che questi ultimi fossero in uno stesso piano. Quando questa

circostanza non ha luogo, bisogna misurare direttamente l'angolo ACD; la stessa avvertenza si applica all' angolo CDB.

4. La formula (1), che serve a determinare il lato di un triangolo, del quale si conoscono gli altri due lati e l'angolo compreso, viene raramente adoperata perchè si presta difficilmente al calcolo logaritmico. Riesce più semplice il calcolare preventivamente gli angoli adiacenti al lato cercato, per mezzo dell'eguaglianza che esiste tra il rapporto della somma colla differenza dei lati noti, e il rapporto della tangente della semisomma colla tangente della semidifferenza di detti angoli adiacenti (*Vedi* Trigonometria). Nel quesito precedente, nel quale avevamo i dati

$$AD = 2330,254,\quad BD = 1820,572,\quad \text{angolo } ADB = 60^\circ,$$

avrebbesi avuto

$$AD + BD = 4150,826,\quad AD - BD = 509,682,$$

$$\text{Semi-somma degli angoli incogniti} = \frac{1}{2}(180^\circ - 60^\circ) = 60^\circ.$$

Rappresentando con δ la semidifferenza di questi stessi angoli, la proporzione

$$4150,826 : 509,682 :: \text{tang } 60^\circ :: \text{tang } \delta$$

darebbe

$$\begin{aligned} \log 509,682 &= 2,7072993 \\ \log \text{tang } 60^\circ &= 10,2385606 \\ \hline & 12,9458599 \\ \log 4150,826 &= 3,6181345 \\ \hline \log \text{tang } \delta &= 9,3277254 \end{aligned}$$

donde si trae

$$\delta = 12^\circ\ 0'\ 24''.$$

Questa semidifferenza degli angoli cercati, sottratta dalla loro semisomma 60°, fa conoscere il minore di questi angoli $BAD = 47^\circ\ 59'\ 36''$, per mezzo del quale si può stabilire la proporzione

$$\text{sen } 47^\circ\ 59'\ 36'' : \text{sen } 60^\circ :: 1820,572 : AB,$$

che dà

$$\begin{aligned} \log 1820,572 &= 3,2602079 \\ \log \text{sen } 60^\circ &= 9,9375306 \\ \hline & 13,1977385 \\ \log \text{sen } 47^\circ\ 59'\ 36'' &= 9,8710279 \\ \hline \log AB &= 3,3267106 \end{aligned}$$

Donde si ha, come si era egualmente trovato di sopra,

$$AB = 2121,83.$$

5. Problema II. *Determinare la posizione di un punto dal quale si scorgono i tre vertici di un triangolo noto.*

Possono darsi tre casi: il punto da fissarsi può essere o nell'interno del triangolo, o al di fuori, o sulla direzione di uno dei lati.

Primo caso. Sia ABC il triangolo (*Tav.* CLXX, *fig.* 2) del quale indicheremo come eppresso gli angoli e i lati noti

$$BC = a, \quad AC = b, \quad AB = c,$$
$$BAC = A, \quad ABC = B, \quad ACB = C.$$

Essendo M il punto da determinersi, tutte le operazioni de farsi sul terreno si riducono alle misura degli engoli $CMB = \alpha$, $AMC = \beta$, $AMB = \gamma$, col soccorso dei quali si tratte di celcolare la grendezza di due qualunque dei tre raggi visuali MA, MB, MC; poichè due di questi raggi determineno compiutamente la posizione del punto M nel piano del triangolo ABC.

Immaginiemo un circolo che passi pel punto M e pei due vertici A, C, conduciemo per B ed M una retta che prolungata incontri il circolo in E, e tiriamo AE e CE.

Nel triengolo AEC, si conoscerà il leto $AC = b$, l'angolo ACE eguale all'engolo AME, supplemento dell'engolo osserveto $AMB = \gamma$, e l'angolo CAE eguale all'engolo CME, supplemento dell'engolo osserveto $CMB = \alpha$; il terzo angolo AEC sarà per conseguenza eguale e

$$180^\circ - (180^\circ - \gamma) - (180^\circ - \alpha) = \alpha + \gamma - 180^\circ,$$

e potrà calcolersi il lato AE per mezzo delle proporzione

$$AC : AE :: \text{sen}\, AEC : \text{sen}\, ACE,$$

ovvero

$$b : AE :: \text{sen}(\alpha + \gamma - 180^\circ) : \text{sen}(180^\circ - \gamma),$$

donde si trae

$$AE = \frac{b\, \text{sen}(180^\circ - \gamma)}{\text{sen}(\alpha + \gamma - 180^\circ)}.$$

Determineto in tal guisa il leto AE, si conosceranno nel triengolo EAB i due lati AE, $AB = c$ e l'engolo compreso BAE eguale ella somma dei due angoli $BAC = A$, $CAE = 180^\circ - \alpha$. Noi potremo dunque celcolere l'engolo ABE, e allora i tre angoli del triangolo ABM saranno noti e i due raggi visuali MA, MB sarenno dati dalle proporzioni

$$\text{sen}\,\gamma : \text{sen}\, ABM :: c : AM,$$
$$\text{sen}\,\gamma : \text{sen}\, BAM :: c : BM.$$

Applichiamo queste regole ei deti

$$a = BC = 12000^m, \quad A = 93^\circ\ 55'\ 55'',6$$
$$b = AC = 8600, \quad B = 45\ \ 38\ \ 29,4$$
$$c = AB = 7800, \quad C = 40\ \ 25\ \ 35,0$$

e supponiamo che gli angoli osservati nel punto M siano

$$\alpha = CMB = 115^\circ\ 25'\ 30''$$
$$\beta = AMC = 113\ \ 59\ \ 5$$
$$\gamma = AMB = 130\ \ 35\ \ 25$$

si avrà

$$180^\circ - \gamma = 180^\circ - 130^\circ\ 35'\ 25'' = 49^\circ\ 24'\ 35'',$$
$$\alpha + \gamma - 180^\circ = 246^\circ\ 0'\ 55'' - 180^\circ = 66^\circ\ 0'\ 55''.$$

Sostituendo questi valori nella espressione di AE, essa diverrà

$$AE = \frac{8600 \operatorname{sen}(49^\circ\ 24'\ 35'')}{\operatorname{sen}(66^\circ\ 0'\ 55'')}.$$

Donde, eseguendo i calcoli,

$$\log 8600 = 3,9344985$$
$$\log \operatorname{sen}(49^\circ\ 24'\ 35'') = 9,8804601$$
$$13,8149586$$
$$\log \operatorname{sen}(66^\circ\ 0'\ 55'') = 9,9607817$$
$$\log AE = 3,8541769$$
$$AE = 7147^m,87.$$

Per avere l'angolo ABE, i dati saranno

$$AE + AB = 7147,87 + 7800 = 14947,87$$
$$AB - AE = 7800 - 7147,87 = 652,13$$

e di più, a motivo dell'angolo $BAE = A + 180^\circ - \alpha = 158^\circ\ 30'\ 25'',6$,

$$\frac{1}{2}(ABE + AEB) = 10^\circ\ 44'\ 47'',2.$$

Rappresentando con δ la semidifferenza di questi stessi angoli ABE, AEB, si calcolerà δ per mezzo della proporzione

$$14947,87 : 652,13 :: \operatorname{tang}(10^\circ\ 44'\ 47'',2) : \operatorname{tang} \delta$$

$$\log 652,13 = 2,8143342$$
$$\log \operatorname{tang}(10\ 44'\ 47'',2) = 9,2782771$$
$$12,0926113$$
$$\log 14947,87 = 4,1745793$$
$$\log \operatorname{tang} \delta = 7,9180320$$

donde si ottiene

$$\delta = 0^\circ\ 28'\ 27'',8$$

Sottraendo questa semidifferenza dalla semisomma $10^\circ\ 44'\ 47'',2$, si otterrà il minore dei due angoli, cioè $ABE = 10^\circ\ 16'\ 19'',4$, che è opposto al lato minore AE.

Ora, per calcolare i raggi visuali MA, MB, si ha nel triangolo AMB

$$AB = 7800, \quad ABM = 10^\circ\ 16'\ 19'',4, \quad AMB = \gamma = 130^\circ\ 35'\ 25''.$$

Il terzo angolo BAM dedotto dagli altri due è $39^\circ\ 8'\ 15'',6$. Questi valori danno

$$\operatorname{sen}(130^\circ\ 35'\ 25'') : \operatorname{sen} 10^\circ\ 16'\ 19'',4 :: 7800 : AM$$

$$\operatorname{sen}(130^\circ\ 35'\ 25'') : \operatorname{sen} 39^\circ\ 8'\ 15'',6 :: 7800 : MB.$$

Ecco i calcoli, nei quali deve aversi presente che il seno dell'angolo ottuso $130^\circ\ 35'\ 25''$ è eguale al seno del suo supplemento $49^\circ\ 24'\ 35''$.

$$\log 7800 = 3,8920946$$
$$\log \text{sen}\,(10^\circ\ 16'\ 19'',4) = 9,2512057$$
$$13,1433003$$
$$\log \text{sen}\,(49^\circ\ 24'\ 35'') = 9,8804601$$
$$\log AM = 3,2628402$$
$$AM = 1831^m,64$$
$$\log 7800 = 3,8920946$$
$$\log \text{sen}\,(39^\circ\ 8'\ 15'',6) = 9,8001573$$
$$13,6922519$$
$$\log \text{sen}\,(49\ \ 24'\ 35'') = 9,8804601$$
$$\log MB = 3,8117918$$
$$MB = 6483^m,24$$

Secondo caso. Il punto M si trova al di fuori del triangolo noto ABC (*Tav.* CLXX, *fig.* 3).

Immaginiamo enco in questo caso il circolo AECM, la retta BM che unisce i punti M e B tagliando il circolo in E, e le rette AE e CE. Gli angoli osservati saranno AMB, BMC, AMC, e si avrà AMB = ACE, BMC = EAC, talmentechè nel triangolo ABC essendo noti i tre angoli e il lato AC, si potrà calcolare AE.

Nel triangolò ABE, si calcolerà l'angolo ABE per mezzo dai due lati noti AE, AB e dell'engolo compreso BAE = BAC — EAC.

Finalmente, conoscendo in tal modo i tre angoli del triangolo BAM, si potranno calcolare i due lati AM e BM, che sono i raggi visuali cercati. I calcoli essendo gli stessi di quelli del caso precedente, noi ci limitiamo ad accennarli.

Terzo caso. Il punto M è situato sulla direzione di uno dei leti del triangolo noto (*Tav.* CLXX, *fig.* 4).

Se il punto M è tra i due punti A e C, si hanno immediatamente i due raggi AM e BM, perchè nel triangolo ABM si conoscono i due angoli BAC, AMB e il lato AB.

Se il punto M è semplicemente nella direzione di AC, nel triangolo ABM si conoscono parimente gli engoli BAC, AMB e il lato AB; donde si può calcolare AM e BM.

6. Questo problema, che si presenta spesso nella costruzione delle carte può risolversi con facilità con un' operazione grafica insegnata alla pag. 279 del tom. II di questo Dizionario.

7. Problema II. *Dalla estremità A di una retta data AB non potendosi prendere, per mancanza di oggetti di mira, che l'angolo XAB, e il punto X essendo invisibile da B, formare il triangolo ABX per mezzo di altri punti noti D ed F, dai quali possono vedersi gli oggetti X e B* (Tav. CLXX, fig. 5).

Quantunque da B non possa vedersi l'oggetto X, il solo che sia stato osservato da A, pure se da esso possano vederseoc altri si può sempre andare avanti nelle speranza che da alcuno degli oggetti veduti da B sia possibile di vedere X. Lasciando dunque indeterminato il triangolo ABX, si ricorrerà per esempio a D e ad F, donde si osserverà B ed X levando gli angoli dei due triangoli BDF, DXF. La difficoltà è allora ridotta e calcolare questi triangoli e a collegarli con A e B.

Supponiamo che il problema sia sciolto, vale a dire che siano determinati i cinque punti A, B, D, X, F. Se dal punto C, intersezione delle rette AX e BD, si conduce CG parallela a XF, e dal punto G la retta GH parallela a DF, si determineranno sui lati BX e BD due punti I ed H tali che la retta IH sarà parallela a DX. Infatti, per le parallele GH e DF si avrà

$$BG : BF :: BH : BD,$$

e in forza delle parallele CG e XF,

$$BG : BF :: BI : BX,$$

donde

$$BH : BD :: BI : BX,$$

donde si conclude che HI è parallela a DX.

Così, indipendentemente dalla linea BX, il punto I può esser determinato sopra CG, conducendo per H la retta HI parallela a DX; e siccome questo punto si trova sopra BX, esso dà la soluzione del problema come passeremo adesso a far vedere.

Nel triangolo ABC, il lato AB e i due angoli noti CAB, ABC danno l'angolo supplementario ACB e il lato CB.

Nel triangolo CBG, del quale abbiamo trovato il lato CB, si hanno gli angoli CBG e CGB che è eguale all'angolo osservato XFB; si possono dunque calcolare i lati CG e BG.

Nel triangolo BGH, si conoscono i due angoli HBG e BGH = BFD e il lato BG, donde si possono calcolare i lati BH e GH.

Nel triangolo GHI, nel quale si conoscono i due angoli IHG = XDF e IGH = BGH — BGC = BFD — BFX ed il lato GH, si calcolerà il lato HI.

Finalmente nel triangolo HBI, in cui si conosce l'angolo BHI = BDX e i lati che lo comprendono BH e HI, si avrà l'angolo cercato HBI o HBX che determina il triangolo ABX.

In seguito si potranno calcolare tutte le altre parti dei triangoli ABX, DBF, XBF, XFD, che determinano le relazioni dei cinque punti A, B, X, D, F.

8. Problema IV. *Conoscendo le due parti* AB *e* CD *di una linea retta che attraversa una palude o qualunque altro luogo che non possa misurarsi colla pertica o colla catena, trovare la parte compresa* BC, *per mezzo degli angoli* α, β, γ, *osservati da un punto* E, *donde si scorgono le tre parti* AB, BC *e* CD *della linea retta* (Tav. CLXX, fig. 6)

Indichiamo le grandezze note AB con a, CD con b, e la lunghezza cercata BC con x. Rappresentiamo inoltre con φ l'angolo ABE e con ψ l'angolo BCE. Questi due angoli non sono dati nel problema, ma siccome φ è esterno rapporto al triangolo BCE si ha $\varphi = \psi + \beta$, donde $\psi = \varphi - \beta$, eguaglianza che serve ad eliminarli dopo averne fatto uso per trovare la relazione che unisce i dati coll'incognita del problema.

Nel triangolo ABE, abbiamo

$$a : AE :: \text{sen}\, \alpha : \text{sen}\, \varphi;$$

e nel triangolo AEC

$$AE : (a + x) :: \text{sen}\, \psi : \text{sen}\, (\alpha + \beta).$$

Moltiplicando queste due proporzioni termine a termine, sopprimendo il fattor comune AE, e ponendo $\varphi - \beta$ in luogo di ψ, si ottiene

$$a : (a + x) :: \text{sen}\, \alpha\, \text{sen}\, (\varphi - \beta) : \text{sen}\, \varphi\, \text{sen}\, (\alpha + \beta) \ldots \quad (1).$$

Nella stessa guisa, considerando i triangoli EDC, EDB, ed osservando che gli angoli ECD ed EBC, supplementi degli angoli ψ e γ, hanno gli stessi seni di questi ultimi, si otterrà

$$b : (b+x) :: \text{sen}\,\gamma\,\text{sen}\,\varphi : \text{sen}(\varphi-\beta)\,\text{sen}(\beta+\gamma) \ldots\ldots (2).$$

Moltiplicando termine a termine le proporzioni (1) e (2) e dividendo poscia il secondo rapporto pel fattore sen φ sen $(\varphi-\beta)$, si avrà finalmente

$$ab : (a+x)(b+x) :: \text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\gamma : \text{sen}(\alpha+\beta)\,\text{sen}(\beta+\gamma),$$

dalla quale traendo il valore di x si otterrà

$$x = -\frac{1}{2}(a+b) \pm \sqrt{\left[\frac{(a-b)^2}{4} + \frac{\text{sen}(\alpha+\beta)\,\text{sen}(\beta+\gamma)\,ab}{\text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\gamma}\right]}.$$

Questa formula si riduce a

$$x = -a + a\sqrt{\left[\frac{\text{sen}(\alpha+\beta)\,\text{sen}(\beta+\gamma)}{\text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\gamma}\right]},$$

quando $a=b$, circostanza che in pratica è spesso in nostra facoltà di ottenere.

Sia, per esempio, $a=b=100$ metri, $\alpha=35^\circ$, $\beta=42^\circ$, $\gamma=37^\circ$, il calcolo da eseguirsi sarà

log sen $(\alpha+\beta)$ =	9.9887239
log sen $(\beta+\gamma)$ =	9.9919466
Somma =	19,9806705
log sen α =	9.7585913
log sen γ =	9.7794630
Somma =	19 5380543
1ª somma =	19,9806705
2ª somma =	19.5380543
Differenza =	0,4426162
Metà =	0,2213081
log a =	2,0000000
	2,2213081

Il numero corrispondente a quest' ultimo logaritmo essendo 166,46, si avrà per la lunghezza cercata BC

$$x = 166,46 - 100 = 66^m,46.$$

9. Problema V. *Ridurre al centro della stazione gli angoli osservati a qualche distanza da questo centro.*

Quando si vogliono unire dei punti incogniti con altri punti già determinati, spesse volte è impossibile di situare lo strumento esattamente in questi ultimi punti, ed allora siamo nella necessità di far subire agli angoli osservati una riduzione per renderli tali quali sarebbero se il centro del grafometro fosse stato collocato precisamente nel punto cognito, che si chiama il *centro della stazione*.

Se, per esempio, si trattasse di osservare l'angolo ABC (*Tav.* CLXXI, *fig.* 1) dal punto B determinato dai suoi rapporti con altri punti, ma al quale non possiamo accostarci che ad una piccola distanza BB′, perchè questo punto è la sommità di un campanile o di qualche altro edifizio, l'angolo AB′C misurato dal punto B′, ove fosse stato posto lo strumento, differirebbe in generale dall'angolo ABC che si tratta di determinare. Le operazioni numeriche per mezzo delle quali dall'angolo AB′C si conclude l'angolo ABC portano il nome di *riduzione al centro della stazione.*

La distanza BB′, compresa tra il centro della stazione e il punto B′ donde si osserva, si chiama *distanza dal centro*; noi la indicheremo con *r*.

I lati BA e BC dell'angolo al centro sono i *raggi centrali.*

Gli angoli AB′B, CB′B, formati dai raggi visuali colla distanza dal centro, diconsi *angoli alla direzione.*

Gli angoli B′AB, B′CB, formati dai raggi visuali e dai raggi centrali, si chiamano *angoli opposti alla distanza.*

L'osservatore può trovarsi in tre posizioni differenti rispetto al centro e agli oggetti: o egli è nella direzione stessa del centro con uno di questi oggetti (*Tav.* CLXXI, *fig.* 2), o in una direzione intermedia (*Tav.* CLXXI, *fig.* 1), o finalmente in una direzione obliqua (*Tav.* CLXXI, *fig.* 3). Nel primo caso la linea BB′ prolungata passa per uno degli oggetti, nel secondo passa in mezzo a loro, e nel terzo passa al di fuori.

Prima posizione. Se l'osservatore è in B′ (*Tav.* CLXXI, *fig.* 2), tra il centro ed uno degli oggetti, l'angolo osservato AB′C supera l'angolo al centro ABC dell'angolo B′CB. Se poi è in B″, dall'altra parte del centro, l'angolo ABC supera l'angolo osservato AB″C dell'angolo B″CB.

Seconda posizione. Se l'osservatore è in B′ (*Tav.* CLXXI, *fig.* 1), l'angolo osservato AB′C è maggiore dell'angolo al centro ABC della somma degli angoli BAB′, BCB′. Se poi è in B″, l'angolo osservato AB″C è al contrario minore dell'angolo al centro della somma degli angoli BAB″, BCB″.

Terza posizione. Se l'osservatore è in B′ (*Tav.* CLXXI, *fig.* 3), l'angolo AOC, esterno rapporto ai due triangoli AOB, COB′, essendo eguale alla somma degli angoli interni opposti, si ha

$$BAB' + ABC = BCB' + AB'C,$$

donde

$$ABC = AB'C + BCB' - BAB',$$

vale a dire che l'angolo osservato differisce dall'angolo al centro della differenza dei due angoli BCB′, BAB′.

Così, in tutti i casi, l'angolo al centro sarà noto quando si conosceranno gli angoli opposti alla distanza.

Indichiamo con *m* ed *n*, secondo l'uso generale, gli angoli opposti alla distanza, ed in specie BAB′ con *m* e BCB′ con *n*; rappresentiamo inoltre con *y* l'angolo alla direzione CB′B, e con *y′* l'angolo alla direzione AB′B, angoli che bisogna sempre osservare insieme con AB′C, che indicheremo con A, riserbando la lettera O all'angolo del centro ABC. Ciò posto, e ritenuto che i raggi centrali AB e BC siano sempre rappresentati colle lettere D e G, cioè il raggio a destra BC con D e il raggio a sinistra AB con G, si avrà:

Primo caso. (*Tav.* CLXXI, *fig.* 2). L'osservatore essendo in B′, si ha

$$O = A - n,$$

$$\operatorname{sen} n = \frac{r \operatorname{sen} y}{D}.$$

L' osservatore essendo in B'', si ha

$$O = A + n,$$

$$\text{sen}\, n = \frac{r\,\text{sen}\, A}{D}.$$

Se i punti B' o B'' fossero sulla direzione del raggio centrale CB invece di esser su quella di AB, si cambierebbe in queste formule n in m e D in G.

Secondo caso. (*Tav.* CLXXI, *fig.* 1). L' osservatore essendo in B', si ha

$$O = A - m - n,$$

$$\text{sen}\, m = \frac{r\,\text{sen}\, y'}{G}, \qquad \text{sen}\, n = \frac{r\,\text{sen}\, y}{D}.$$

L' osservatore essendo in B'', si ha

$$O = A + m + n,$$

e gli angoli m ed n hanno gli stessi valori di sopra.

Terzo caso. (*Tav.* CLXXI, *fig.* 3). L' osservatore essendo in B', si ha

$$O = A + n - m,$$

$$\text{sen}\, m = \frac{r\,\text{sen}\, y'}{G}, \qquad \text{sen}\, n = \frac{r\,\text{sen}\, y}{D}.$$

L' osservatore essendo in B'', si ha

$$O = A + m - n$$

$$\text{sen}\, m = \frac{r\,\text{sen}\, y'}{G}, \qquad \text{sen}\, n = \frac{r\,\text{sen}\, y}{D}.$$

Quando i raggi centrali D e G non sono noti, bisogna collegare i punti A, B e C con altri punti atti a determinare la loro lunghezza, o per mezzo del calcolo di triangoli, o semplicemente per mezzo di operazioni grafiche; perchè essendo r sempre piccolissimo rapporto a D e a G, non è necessario di determinare questi lati con una precisione rigorosa. Per applicazione, prenderemo il caso in cui l' angolo osservato è preso dal punto B' (*Tav.* CLXXI, *fig.* 1): siano dunque

$$BC = D = 2000^m, \quad AB = G = 1855^m, \quad BB' = r = 10^m,$$

$$AB'C = A = 65^\circ\, 20', \quad AB'B = y' = 135^\circ\, 30', \quad CB'B = y = 159^\circ\, 10'.$$

Sostituendo questi valori nelle formule del secondo caso, si ha

$$\begin{aligned} \log r &= 1,0000000 \\ \log \text{sen}\, y' &= 9,8456618 \\ \hline &\ 10,8456618 \\ \log G &= 3,2683439 \\ \hline \log \text{sen}\, m &= 7,5773179 \\ m &= 12'\ 59'' \end{aligned}$$

$$\log r = 1,0000000$$
$$\log \text{sen}\, y = 9,5510237$$
$$10,5510237$$
$$\log D = 3,3010300$$
$$\log \text{sen} = 7,2499937$$
$$n = 6'\ 7''$$

Per conseguenza si avrà

$$O = 65^\circ\ 20' - 12'\ 59'' - 6'\ 7'' = 65^\circ\ 0'\ 54''.$$

10. Problema VI. *Avendo osservato nel punto* O (Tav. CLXXI, fig. 4) *l'angolo* DOE, *formato dai due raggi visuali condotti ai due oggetti* D *ed* F *disegualmente elevati al di sopra dell'orizzonte, trovare l'angolo* BAC, *projezione di* DOE *sul piano orizzontale.*

Quando tra i diversi punti di un terreno si forma una serie di triangoli per levarne la pianta, non sono questi punti quelli che figurano nella pianta, ma le loro projezioni sopra una medesima superficie paralella all'orizzonte, la quale può considerarsi come piana pei terreni di una estensione poco considerabile. L'osservatore deve dunque, per quanto è possibile, scegliere oggetti il cui livello apparente sia sensibilmente lo stesso del suo, perchè nel caso contrario i suoi triangoli non si troverebbero più in uno stesso piano, e gli sarebbe impossibile di accordarli insieme sulla carta senza operare le riduzioni che formano l'oggetto del presente problema. Per dare una idea esatta del quesito, siano B', C', D', E' diversi oggetti disegualmente elevati sopra un piano orizzontale MN (*Tav.* CLXXI, *fig.* 5) sul quale un osservatore posto in O prende gli angoli B'OC', B'OE', E'OD', D'OC'. Questi punti saranno rappresentati sulla carta del terreno dalle projezioni A, B, C, D, E, e la somma di tutti gli angoli del punto A sarà eguale a quattro angoli retti; talchè se l'osservatore si servisse degli angoli osservati, e non di quelli ridotti o projettati BAC, BAE, EAD, DAC, la cui somma nel caso della nostra figura è maggiore di quattro angoli retti, non potrebbe segnarli l'uno accanto all'altro senza fare entrare l'ultimo D'OC' nel primo B'OC', e per conseguenza le linee della sua carta non potrebbero indicare le relazioni delle diverse parti del terreno, perchè il punto C' dell'angolo D'OC' non coinciderebbe col punto C' dell'angolo B'OC', quantunque questi due punti si confondano sul terreno.

Esistono dei circoli, armati di canocchiali mobili, che danno immediatamente l'angolo orizzontale BAC, quando si osserva l'angolo inclinato B'OC'; ma siccome non si hanno sempre tali strumenti a propria disposizione, è essenziale di conoscere il modo di supplirvi per mezzo di certi metodi di calcolo da cui l'uso loro dispensa.

Sia O (*Tav.* CLXXI, *fig.* 4) il centro delle osservazioni, e DOE l'angolo che si tratta di ridurre all'orizzonte o di cui si tratta di trovare la projezione orizzontale BAC. Bisognerà osservare non solo l'angolo DOE, ma anco gli angoli ZOD e ZOE che fanno colla verticale del punto O i raggi visuali OD e OE: supponendo ora noti questi tre angoli, si farà

$$DOE = \alpha,\ ZOD = e,\ ZOE = e',\ BAC = A.$$

Immaginiamo ora che il punto O sia il centro di una sfera di un raggio $On = 1$; gli archi di circolo mn, pn, pm, formati sulla superficie di questa sfera dalle sezioni dei piani DOE, DOAB, EOAC, saranno le misure respettive degli angoli DOE, DOA, EOA, il primo dei quali è l'angolo da ridursi α, e gli altri due

sono i supplementi degli angoli e e e'. Ora, l'angolo BAC essendo l'angolo dei due piani DOAB, EOAC, è lo stesso che l'angolo npm del triangolo sferico mnp, e così il quesito è ridotto a trovare quest'angolo npm per mezzo dei tre lati noti del triangolo sferico, cioè:

$$nm = \alpha, \quad pn = 180^\circ - e, \quad pm = 180^\circ - e'.$$

Sostituendo questi valori nella nota formula (*Vedi* TRIGONOMETRIA), si avrà

$$\text{sen}\,\frac{1}{2}\,A = \sqrt{\left[\frac{\text{sen}\,\frac{1}{2}(\alpha + e - e')\,\text{sen}\,\frac{1}{2}(\alpha + e' - e)}{\text{sen}\,e\ \text{sen}\,e'}\right]} \dots (1),$$

nella quale non si deve fare altro che dare alle quantità α, e, e' dei valori determinati per ottenere l'angolo ridotto A.

Se i due angoli allo zenit e e e' fossero eguali, il che avviene quando i due oggetti D ed E sono egualmente elevati al di sopra o egualmente depressi al di sotto del piano orizzontale che passa pel centro O, la formula precedente si ridurrebbe a

$$\text{sen}\,\frac{1}{2}\,A = \frac{\text{sen}\,\frac{1}{2}\alpha}{\text{sen}\,e} \dots\dots (2).$$

Finalmente, nel caso che uno degli oggetti D fosse elevato al di sopra del piano orizzontale che passa per O della stessa quantità dalla quale un altro oggetto E si trovasse al di sotto di questo piano, si avrebbe

$$90^\circ - e = e' - 90^\circ,$$

ossia

$$e' = 180^\circ - e.$$

Questo valore di e', introdotto nella formula (1), la trasforma, dopo avere alzato a quadrato ambedue i suoi membri, in

$$\text{sen}^2\,\frac{1}{2}\,A = \frac{\text{sen}\left(\frac{1}{2}\alpha + e - 90^\circ\right)\text{sen}\left(\frac{1}{2}\alpha - e + 90^\circ\right)}{\text{sen}^2\,e};$$

e passando dai prodotti alle somme si ha

$$\text{sen}^2\,\frac{1}{2}\,A = \frac{\text{sen}^2 e - \cos^2\frac{1}{2}\alpha}{\text{sen}^2\,e} = 1 - \frac{\cos^2\frac{1}{2}\alpha}{\text{sen}^2\,e},$$

e per conseguenza

$$1 - \text{sen}^2\,\frac{1}{2}\,A = \frac{\cos^2\frac{1}{2}\alpha}{\text{sen}^2\,e}.$$

Ma

$$1 - \text{sen}^2\,\frac{1}{2}\,A = \cos^2\,\frac{1}{2}\,A,$$

dunque

$$\cos\,\frac{1}{2}\,A = \frac{\cos\frac{1}{2}\alpha}{\text{sen}\,e} \dots\dots (3).$$

Raramente si dà il caso di potersi servire delle formule (2) e (3); ma il calcolo della formula (1) è così semplice che noi la preferiamo ad altre espressioni approssimative che in alcune opere si è voluto ad essa sostituire. Facendo uso dei

logaritmi, essa diviene

$$\log \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}A = \tfrac{1}{2}[20 + \log \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}(\alpha + e - e') + \log \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}(\alpha + e' - e) - \log \operatorname{sen} e - \log \operatorname{sen} e'].$$

Per un esempio di applicazione prendiamo i dati seguenti:

Angolo osservato $o = 70^\circ$

Angoli allo zenit $e = 82^\circ$, $e' = 81^\circ\ 10'$,

$\tfrac{1}{2}(\alpha + e - e') = 35^\circ\ 25'$, $\tfrac{1}{2}(\alpha + e' - e) = 34^\circ\ 35'$.

Il calcolo dà

Quadrato del raggio = 20,0000000
log sen 35° 25′ = 9,7630671
log sen 34° 35′ = 9,7540457

somma = 39,5171128
log sen 82° = 9,9957528

Differenza = 29,5213600
log sen 81° 10′ = 9,9948181

Differenza = 19,5265419
Metà = 9,7632710 = log sen ½ A

Angolo ridotto = 70° 52′.

11. La formula (1) diviene assai più semplice quando uno dei due oggetti si trova nel piano dell'osservatore. In questo caso, una delle distanze dallo zenit, per esempio e', è di 90°: se dunque si fa $e' = 90^\circ$, si ottiene, per mezzo di trasformazioni analoghe a quelle di cui abbiamo fatto uso di sopra,

$$\cos A = \frac{\cos \alpha}{\operatorname{sen} e}.$$

Nelle grandi triangolazioni, la riduzione degli angoli al piano orizzontale comprende altre particolarità per le quali dobbiamo rimandare i nostri lettori alle opere speciali e particolarmente al *Trattato di Geodesia* di Puissant.

12. Problema VII. *Riferire i punti principali di una carta alla meridiana e alla sua perpendicolare.*

Quando si disegnano sulla carta i triangoli osservati sul terreno è impossibile, ad onta delle cure le più minuziose, che il disegno riesca rigorosamente esatto. Se si fa uso di un semicircolo graduato per costruire gli angoli, non si ottiene che un'approssimazione assai grossolana, di cui l'errore diviene sensibile fino dal primo triangolo. Se si adoprano le scale delle corde, ovvero se per maggiore esattezza si calcolano i tre lati di ciascun triangolo, per non aver bisogno di occuparsi degli angoli, basta la grossezza delle punte del compasso o del lapis per produrre, nel fissare i vertici di un triangolo, una inesattezza, che, impercettibile in principio, influisce sui triangoli successivi e si accresce rapidamente a misura che il loro numero aumenta. Per evitare questa moltiplicazione di errori, si è immaginato di riferire ogni punto del terreno a due rette perpendicolari tra loro, disegnate sulla pianta, e che ordinariamente sono la *meridiana* (*Vedi* Meridiana) di uno dei punti più notabili del terreno, e la perpendicolare a questa meridiana condotta per lo stesso punto.

Per questa operazione, non è assolutamente indispensabile il conoscere la direzione della meridiana con una grande esattezza, perchè qualunque altra linea

di una direzione data potrebbe soddisfare egualmente allo stesso oggetto; così spesso si fa uso delle indicazioni date dalla bussola. Ciò che importa è di determinare l'angolo che fa la meridiana adottata con un lato di uno qualunque dei triangoli dei quali si è coperto il terreno.

Supponiamo che, essendo nel punto A (*Tav.* CLXXI, *fig.* 6), la direzione dell'ago calamitato faccia colla retta AC un angolo di 45°; la declinazione dell'ago essendo in questo tempo di 22° 10′, la linea di tramontana, o la meridiana NS del punto A, farà dunque colla linea AC un angolo di 22° 50′, e siccome l'angolo BAC è uno di quelli che sono stati osservati nella triangolazione, si conoscerà l'angolo BAN = BAC — 22° 50′ che il lato AB forma colla meridiana NS. Se, per esempio, l'angolo BAC fosse di 125°, l'angolo BAN sarebbe di 102° 10′, ed allora, dopo aver disegnato sulla carta una linea NS formante con AB un angolo di 102° 10′, le si condurrebbe nel punto A la perpendicolare OE; queste due rette sarebbero gli *assi coordinati* (*Vedi* Applicazione), ai quali si tratterebbe in seguito di riferire tutti i punti della triangolazione.

Siano A, B, C, F, D, G i vertici dei triangoli osservati; immaginiamo due rette condotte da ognuno di questi punti e paralelle respettivamente alla meridiana NS e alla sua perpendicolare OE: si avrà in particolare pel punto D, *n*D parallela ad NS, e *m*D parallela ad OE, ed è evidente che la posizione del punto D sul piano resterà perfettamente determinata, qualunque d'altronde siano le sue relazioni con gli altri punti, quando si conoscerà la lunghezza delle linee *n*D e *m*D; perchè, prendendo sopra AE la parte A*n* = *m*D e sopra AS la parte A*m* = *n*D, le perpendicolari *m*D e *n*D innalzate nei punti *m* ed *n* si taglieranno nel punto D. La stessa cosa avendo luogo per tutti gli altri punti B, C, F, ec., è chiaro che si potrà fissare sulla carta ognuno di essi isolatamente, e che i piccoli errori provenienti dalla grossezza delle linee o dalla ineguaglianza della carta si repartiranno egualmente invece di accumularsi nel passare da un punto ad un altro.

Tutti i raggi che concorrono nel punto A essendo noti di lunghezza e di direzione, si ottengono, mediante un'addizione o una sottrazione, gli angoli che essi formano colla meridiana, e non si hanno più che dei triangoli rettangoli da risolversi per calcolare le distanze delle loro estremità dalla meridiana e dalla sua perpendicolare.

Se l'angolo CAD è di 92° 50′, l'angolo NAD sarà

$$NAC + CAD = BAC - BAN + CAD = 125^\circ - 102^\circ\ 10' + 92^\circ\ 50' = 115^\circ\ 40',$$

e per conseguenza, nel triangolo rettangolo *n*AD, nel quale l'angolo in A è

$$NAD - 90^\circ = 115^\circ\ 40' - 90^\circ = 25^\circ\ 40',$$

si avrà

$$nD = mA = AD \text{ sen } 25^\circ\ 40',$$

$$mD = nA = AD \cos 25^\circ\ 40',$$

e parimente per tutti gli altri raggi AC, AH, AB, AG, ec.

Quanto ai punti, come K ed R, osservati da un'altra stazione H, e che non sono collegati immediatamente col punto A, possono riferirsi ad un'altra meridiana N′S′, vale a dire ad una paralella alla meridiana NS, la quale passi per il punto H già fissato sulla pianta dalle distanze H*p*, H*c*. Si conosce infatti l'angolo S′HA = HAN; così, per mezzo di quest'angolo e degli angoli osservati intorno al punto H, si può dedurre il valore dell'angolo KH*a* e calcolare poi le distanze K*a* e H*a*, le quali bastano per fissare il punto K sulla pianta. D'altron-

de, quando Ka e Ho sono noti, si ha

$$Kb = Ka + ab = Ka + Hp,$$
$$Kd = Hc - Ha,$$

e così si può anco fare oso della sola meridiana NS. Per maggiori particolarità si coosulti il *Trottato di agrimensuro* di Lefèvre. Le grandi operazioni geodetiche debbono studiarsi nei trattati di *Geodesio* e di *Topografia* di Puissaot.

LÉVEQUE (Pietro), nato a Nantes nel 1746, aonunziò fioo dai suoi primi studj una decisa inclinazione alle matematiche e alla loro applicazione alla nautica. Dopo avere fatto alcune corse sul mare, divenne professore di matematiche a Mortagne, poi a Bratenil, indi a Nantes, e se ne disimpegnò in modo sì distinto che ottenne nel 1772 la cattedra d'idrografia in quest'ultima città. A grandi talenti, ad un criterio sicuro e profondo, a vedute sane e giuste accoppiava Léveqne l'erudizione la più vasta e le cognizioni le più variate. Nominatn esaminatore per la marina, quindi per la scuola politennica, fu nel 1801 ammesso nell'Istituto in luogo di Cousin, e poscia decorato del titolo di cavaliere della legione d'onore. Léveqoe morì oel 1814: gli scritti suoi principali sono: I *Tobles générales de lo hauteur et de lo longitude du nonagésime*, Avignone, 1776, 2 vol. in 8; II *Le Guide du novigoteur*, Nantes, 1779, iu-8; trattato il più esteso, il più compiuto e il più comodo finora pubblicato sui metodi delle longitudini in mare, e sopra altri oggetti riferibili alle osservazioni. Léveque tradusse pure l'*Esame marittimo* o *Trottato dello meccanica applicato alla costruzione e olle mosse dei vascelli* di Juan y Santacilia, Nantes, 1782, 2 vol, in-4. (*Vedi* Juan y Santacilia). In segoito arricchì di note tale traduzione, vi fece aggiunte importanti, e la pubblicò nuovamente con questo titolo: *De lo construction et de la manoeuvre des voisseaux*, ou *Exomen maritime théorique et pratique*, Parigi, 1792, 2 vol. in-4. Sopra altri lavori di questo dotto e sui molti manoscritti da lui lasciati si consulti la *Biografio universale*.

LIBBRA (*Astron.*). Questo nome si applica egualmente ad una costellazione situata nell'emisfero meridiooale e al settimo segno dello zodiaco distinto col segno ♎.

La costellazione della Libbra, detta ancora *Jugum* o *Mochos*, viene rappresentata nelle carte celesti da una bilancia che secondo alcuni indica l'equilibrio della natura, l'eguagliaoza dei giorni e delle notti. Questa costellazione comprende 51 stella oel Catalogo britannico.

Prima della scoperta della precessione degli equinozj, o del movimento dei punti equinoziali, si credeva che il sole, ritornando allo stesso equinozio si trovasse corrispondere esattamente alle stesse stelle, e si era divisa l'ecclittica in dodici parti eguali o *segni*, formando di ognuna di queste parti una costellazione determinata da qualche gruppo di stelle. Allora il primo segno corrispondeva alla costellazione dell'*Ariete*, il secondo a quella del *Toro*, e così di seguito. Dopo quest'epoca, lo stato del cielo ha cangiato interamente, e, in forza della retrogradazione dei punti equinoziali, i *segni* non corrispondono più alle stesse costellazioni. Pure si sono conservati ai segni i nomi che avevano in origine, e per una convenzione adottata generalmente il primo punto del segno dell'*Ariete* corrisponde sempre all'equinozio di primavera, e quello della *Libbra* all'equinozio di autunno; mentre le costellazioni dell'*Ariete* e della *Libbra*, al pari di tutte le altre, si sono allontanate da questi segni di circa 30° cioè di un segno intero. *Vedi* Precessione.

LIBRAZIONE (*Astron.*) Oscillazione apparente dell'asse della luna, il cui effetto è di renderci visibile un poco più della metà della sua superficie.

La luna impiegando tanto tempo a girare sul suo asse quanto ne mette a compiere la sua rivoluzione periodica intorno alla terra, ci presenta sempre la stessa superficie. Da ciò resulta che un osservatore, che dal centro della terra guardasse la luna, vedrebbe presso a poco costantemente lo stesso disco della luna terminato da una stessa circonferenza, quella cioè che resulterebbe dall' intersezione di un piano condotto pel centro della luna perpendicolarmente al raggio visuale che lo unisce al centro della terra. Ma, per l' osservatore posto alla superficie della terra, il raggio visuale condotto al centro del globo lunare incontra successivamente diversi punti della superficie della luna dal momento del levare fino a quello del tramonto di quest'astro, e non coincide colla linea dei centri che quando la luna trovasi allo zenit dell' osservatore. Così, quando la luna si leva, il punto della sua superficie in cui cade il raggio visuale che tende al suo centro è più alto del punto in cui passa la linea dei centri, e per conseguenza si vede una porzione dell' emisfero occidentale della luna che non si vedrebbe dal centro della terra, ma nel tempo stesso si perde di vista una porzione dell' emisfero orientale che si vedrebbe dal centro della terra. Per la stessa ragione, quando la luna tramonte, si vede una porzione del suo emisfero orientale che non sarebbe visibile dal centro dalle terra, e si cessa di vedere una porzione eguale del suo emisfero occidentale. Questo fenomeno sembra prodotto da un moto di oscillazione della luna sul suo asse, ed è per tal ragione che gli è stato dato il nome di *Librazione*, da una parola latina che significa *oscillare*.

Questa *oscillazione*, che in realtà non è che una illusione ottica, si dice *librazione diurna*, ed è eguale alla parallasse orizzontale della luna.

Oltre la *librazione diurna*, esistono ancore altre due *librazioni* che provengono: 1° dall' inclinazione dell' asse della luna sull' ecclittica; 2° dalle ineguaglianze del movimento della luna nella sua orbita. La prima, che chiamasi *librazione in latitudine*, è stata riconosciuta da Galileo al quale devesi pure la scoperta della *librazione diurna*, e la seconda, detta *librazione in longitudine*, è stata scoperta da Evelio e da Riccioli.

La *librazione in latitudine* produce l' effetto di renderci visibili alternativamente le parti della superficie lunare prossime ai poli: essa è occasionata dalla inclinazione dell' asse della luna sulla sua orbita, donde avviene che a misura che quest'asse ci presente la sua massima o la sua minima obliquità, dove scoprirci successivamente i due poli di rotazione della sferoide lunare. Questa librazione è poco considerabile perchè l' equatore della luna differisce poco dal piano della sua orbita.

La *librazione in longitudine*, o nel senso dell' equatore lunare, è la maggiore di tutte; essa resulta dall' essere uniforme il movimento di rotazione della luna sul suo asse, mentre non lo è quello della sua rivoluzione periodica intorno alla terra. Così, siccome la luna impiega lo stesso tempo per girare sopra se stessa che per descrivere la sua orbita, nel quarto del tempo della sua rivoluzione periodica essa fa il quarto di un giro sul suo asse, ma non percorre, però esattamente il quarto della sua orbita; la porzione dell' orbita percorsa talvolta è maggiore, talvolta è minore del quarto, secondochè si trova verso il perigeo o verso l' apogeo. Queste ineguaglianze ci fanno scoprire successivamente verso la sua parte orientale o verso la sua parte occidentale delle porzioni della sua superficie che prima non scorgevamo.

Devesi a Domenico Cassini la prima spiegazione soddisfacente del fenomeno della *librazione*, la cui teoria completa è stata data da Lagrange in una memoria che riportò il premio proposto dall' Accademia delle Scienze di Parigi per l' anno 1763.

LIESGANIG (Giuseppe), astronomo, nato a Gratz nella Stiria, entrò nei gesuiti ed insegnò con onore le matematiche in varj collegi. Alla soppressione del suo ordine, il governo lo fece direttore delle fabbriche e della navigazione in Galizia. Di lui si ha: *Dimensio graduum meridiani Viennensis et Hungarici*, Vienna, 1770, in-4: tale opera contiene i particolari delle operazioni da lui eseguite per misurare due gradi di meridiano in Ungheria e in Austria: il grado misurato in Ungheria, ad una latitudine di 45° 57′, resultò di 56881 tese, e l'altro preso in Austria, ad una latitudine di 48° 43′, di 57086 tese, presso e poco della stessa lunghezza di quello ottenuto in Francia. Questo dotto stimabile morì a Lemberg nel 1799.

LIEUTAUD (Giacomo), astronomo, nato ad Arles nel 1660, fu eggregato all'Accademia delle Scienze di Parigi nella classe di astronomia allorchè quella dotta società fu riformata nel 1699. Venne incaricato di compilare la *Connaissance des temps*, e ne pubblicò 27 volumi in-12, del 1703 al 1729. Compilò ancora per otto anni le *Effemeridi* dal 1704 al 1711, e morì a Parigi nel 1733.

LILIO (Luigi), è divenuto famoso per la parte che ebbe nella riforma del calendario gregoriano. Ei nacque in Ciro, città della Calabria, esercitò la medicina e in pari tempo coltivò l'astronomia. Altro non si sa della sua vita, e il suo nome sarebbe oggi sconosciuto se non si trovasse inseparabilmente associato alla grande operazione di sopra rammentata. Da lungo tempo se ne sentiva il bisogno. Il venerabile Beda fino dall'ottavo secolo aveva osservata l'anticipazione degli equinozj; e Ruggero Bacone, cinque secoli più tardi, indicò le imperfezioni sempra più evidenti del calendario giuliano di cui si continuava a fare uso. Il progetto di riformarlo fu ancora rinnovato nel secolo decimoquinto da Pietro d'Ailly e dal cardinale di Cusa, i quali presenterono inutilmente al concilio di Costanza diverse memorie. Frattanto il bisogno di porvi mano diventava di giorno in giorno più pressante. Molti astronomi del secolo seguente vi si applicarono con ardore; ma era riserbato a Lilio l'onore di eseguire una operazione di tanta importanza. Egli non inventò le epatte, l'uso delle quali come osserva Ximenes nella sua opera sullo gnomone fiorentino era conosciuto da lungo tempo, ma le applicò al ciclo di diciannove anni, ed aggiungendo un giorno alla fine di ogni ciclo pervenne ad una equazione assai eppressimativa dell'anno solare e lunare. Lilio aveva terminato il suo lavoro quando morì nel 1576. Suo fratello, Antonio Lilio, presentò il suo progetto al papa Gregorio XIII, che lo passò alla giunta incaricata dell'esame delle scritture presentate dai diversi matematici. Quella di Lilio ottenne la preferenza, e il papa essendosi assicurato dell'assenso dei sovrani pubblicò nel 1582 la famosa bolla che abolì l'antico calendario sostituendogli il nuovo. Le *tavole delle epatte* costruite e Lilio sono state inserite colle opportune spiegazioni nel *Calendarium romanum* di Clavio (*Vedi* Clavio). Il Rossi nella sua *Pinacotheca* ha consacrato un articolo esteso a Lilio, cui chiama medico e filosofo dottissimo.

LIMITE (*Alg.* e *Geom.*). Espressione della quale ci serviamo nelle matematiche per indicare la grandezza di cui una quantità variabile può avvicinare indefinitamente, ma che essa non può superare.

Se si considerano, per esempio, due poligoni, l'uno inscritto e l'altro circoscritto ad un circolo, è evidente che il primo è minore del circolo, e che il secondo è maggiore. Ora, se si aumenta successivamente il numero dei lati di questi poligoni, il poligono inscritto diventerà continuamente più grande, e il poligono circoscritto diventerà continuamente più piccolo, senza che non ostante essi possano mai, il primo diventare più grande, e il secondo diventare più piccolo del circolo. Il circolo è dunque il *limite* dell'aumento del poligono inscritto e della diminuzione del poligono circoscritto.

Se si tratta di un' espressione algebrica $\sqrt{a^2-x^2}$, nella quale x è una quantità variabile, si vede che il suo valore è tanto maggiore quanto quello di x è minore, e che questo valore non può superare $\sqrt{a^2}$, ovvero a; a è dunque il *limite* di $\sqrt{a^2-x^2}$.

Il *metodo dei limiti* è stato quasi generalmente adottato dai moderni matematici per servire di base al *calcolo differenziale*, nello scopo di liberarsi dagli *infinitamente piccoli* la cui concezione non sembrava loro nè abbastanza chiara, nè abbastanza rigorosa. Crediamo avere digia sufficientemente dimostrato il poco fondamento della pretesa inesattezza, che si è creduto scoprire nei principii fondamentali del calcolo dell' infinito, e solamente esamineremo di volo se quelli del metodo dei limiti sono più *chiari* e più *rigorosi*.

Indichiamo con y una fonzione qualunque della variabile x, x^3 per esempio, e supponiamo che y diventi y', quando x riceve un accrescimento h, avremo dunque

$$y'=(x+h)^3=x^3+3x^2h+3xh^2+h^3,$$

se da quest' equazione si sottrae l' equazione primitiva $y=x^3$, resterà

$$y'-y=3x^2h+3xh^2+h^3$$

e dividendo per h

$$\frac{y'-y}{h}=3x^2+3xh+h^2;$$

ora $y'-y$ essendo l' accrescimento della funzione y corrispondente all' accrescimento h della variabile x, è evidente che $\frac{y'-y}{h}$ è il rapporto dell' accrescimento della funzione y a quello della sua variabile x. Così considerando il secondo membro dell' ultima equazione, si vede che questo rapporto diminuisce tanto più quanto h diminuisce, e che quando h diventa nullo, questo rapporto si riduce a $3x^2$.

$3x^2$ è dunque il limite del rapporto $\frac{y'-y}{h}$; ed è verso questo termine che esso tende quando si fa diminuire h, e quando finalmente $h=0$, si ha

$$\frac{y'-y}{h}=3x^2.$$

Ed è in questo modo, che gli autori moderni dei trattati sul calcolo differenziale giungono all' espressione del valore delle derivate differenziali di una funzione, poichè dall' equazione precedente essi passano alla seguente:

$$\frac{dy}{dx}=3x^2;$$

ciò che finalmente dà loro la *differenziale*: $d(x^3)=3x^2dx$.

Ma seguendo il processo dell' operazione che ci ha condotti a

$$\frac{y'-y}{h}=3x^2,$$

si vede che quest' equazione è realmente

$$\frac{o}{o}=3x^2,$$

poichè quando $h=o$, si ha ancora $y'-y=o$ Siamo dunque giunti a considerare il rapporto di due quantità *nulle*, concepimento il quale non è nè più *chiaro*, nè più *rigoroso* di quello del rapporto di due quantità *infinitamente piccole*. Di più, l' equazione

$$\frac{y'-y}{h}=3x^2,$$

non ha alcun senso se h è uno zero assoluto, poichè allora la variabile non riceve *accrescimento*, e conseguentemente ancora la funzione y, e il *rapporto* di due accrescimenti i quali non esistono nè realmente nè idealmente, non ha assolutamente alcun significato.

Si pretende che l' equazione $\frac{o}{o}=3x^2$ non presenti veruna difficoltà a concepirla; perchè il *simbolo* $\frac{o}{o}$ può rappresentare tutte le specie di quantità. È vero che questo preteso *simbolo* ha queste proprietà, ma quale analogia può esistere tra le quantità della forma

$$\frac{A(x-a)^m}{B(x-a)^n}$$

le quali diventano $\frac{o}{o}$, vale e dire, solamente indeterminate quando $x=a$ e il rapporto di due quantità *nulle*, non perchè esse hanno un fattore comune che diventa *zero*, ma nulle per se stesse?

Il valore della funzione

$$\frac{3x^2h+3xh^2+h^3}{h}=3x^2+3xh+h^2$$

e realmente $3x^2$, nel caso di $h=o$, ma per giungere all' eguaglianza

$$\frac{y'-y}{h}=\frac{3x^2h+3xh^2+h^3}{h}\;.\;.\;.\;.\;.\;(a)$$

è bisognato supporre che h ebbia un valore qualunque differente da zero, poichè se h è zero, $(x+h)^3$ è semplicemente x^3, e non vi è più alcun mezzo per dedurre quest' eguaglianza. Come è possibile dunque che l' eguaglianza (a), ottenuta unicamente nell' ipotesi di h, quantità differente da *zero*, sussista ancora quando si distrugge l' ipotesi sopre la quale essa è stabilita?

Ciò non ostante è sopra questo rapporto *inconcepibile* di due quantità *nulle*, non relativamente come lo sono le quantità infinitamente piccole rapporto alle quantità finite (*Vedi* DIFFERENZA), ma *nulle* assolutamente, cioè veri *zeri*

reali e assoluti, che si trove fondato il metodo *chiaro* e *rigoroso* dei limiti! Qual profonde metafisica?

Limiti *delle radici dell' equazioni.* Si dà questo nome a due numeri, di cui uno è maggiore di una delle radici di un' equazione, e l'altro minore. Ed è sopra la ricerca di due tali numeri che è fondata la risoluzione dell'equazioni numeriche. (*Vedi* Approssimazione.),

In tutti gli *Elementi dell' Algebra*, si dimostra, che se due numeri p e q sostituiti in luogo di x in un'equazione numerica di un grado qualunque $X=0$, danno due risultamenti di *segni contrari*, questi due numeri comprendono almeno una radice reale della proposta.

Così, prendendo per esempio l'equazione

$$x^3-2x-5=0,$$

se successivamente sostituiamo in luogo di x il seguito dei numeri naturali 0, 1, 2, 3, 4, ec., prendendogli tanto positivamente quanto negativamente, troveremo, indicando con X il primo membro, che per

$x=0$, si ha	$X=-5$;	$x=0$, si ha	$X=-5$.
$x=1$,	$X=-6$;	$x=-1$,	$X=-4$.
$x=2$,	$X=-1$;	$x=-2$,	$X=-9$.
$x=3$,	$X=+16$;	$x=-3$,	$X=-26$.
$x=4$,	$X=+51$,	$x=-4$,	$X=-61$.
ec. . . .	ec. . . .	ec. . . .	ec. . . .

e ne concluderemo che vi è una radice reale positiva comprese tra 2 e 3.

Per diminuire il numero delle sostituzioni, è importante di conoscere un limite superiore a tutte le radici, più questo limite sarà vicino alla più gran radice, meno sostituzioni saranno necessarie. Ecco il processo dato dal Newton per determinare il limite superiore il più piccolo possibile in numero intero. Sia $X=0$ l'equazione proposta, se si forma la serie delle funzioni derivate

$$\frac{dX}{dx},\ \frac{d^2X}{2dx^2},\ \frac{d^3X}{2.3.dx^3},\ \text{ec.}\ldots\ldots$$

finattantochè si giunga ad una funzione del primo grado, il problema sarà riportato e trovare per x il più piccolo numero che renda tutte queste funzioni positive.

Prendiamo per esempio l'equazione

$$x^4-3x^3-3x^2+4x-5=0,$$

avremo

$$X=x^4-3x^3-3x^2+4x-5,$$

$$\frac{dX}{dx}=4x^3-9x^2-6x+4,$$

$$\frac{d^2X}{2dx^2}=6x^2-9x-3,$$

$$\frac{d^3X}{2.3.dx^3}=4x-3.$$

Cominciando dalla derivata del primo grado, è evidente che qualunque nu-

mero positivo maggiore di o, messo in luogo di x lo rende positivo, e che 1 è il più piccolo di questi numeri.

Sostituendo 1 nella derivata del secondo grado, si trova un resultamento negativo, ma 2 o qualunque altro numero più grande dà un resultamento positivo.

2, sostituito nella derivata del terzo grado, dà un resultamento negativo, ma 3 o qualunque altro numero maggiore di 3, dà un resultamento positivo.

3, sostituito nella funzione primitiva X, dà un resultamento negativo, e si vede facilmente che 4, o qualunque numero maggiore, dà un resultamento positivo.

Così 4 è il più piccolo numero che possa rendere nel medesimo tempo tutte le funzioni positive. Dunque 4 è il limite superiore delle radici positive delle proposta, e siccome questo d'altra parte è il limite il più piccolo in numeri interi, ne segue che vi è una radice reale positiva compresa tra 3 e 4.

Per ottenere il limite superiore delle radici negative, si trasforma l'equazione proposta $X = o$, in $X' = o$ facendo $x = -x'$, e siccome le radici positive della trasformata daranno le radici negative delle proposta prendendole col segno —, il limite superiore di queste radici positive sarà nel medesimo tempo, dandogli il segno —, il limite superiore delle radici negative dell'equazione $X = o$.

Quando siamo giunti a conoscere il valore di una radice reale a meno di un'unità presso e poco, si può inseguito ottenere questo valore con tal grado di approssimazione, quale si può desiderare impiegando i metodi esposti alla parola Approssimazione.

La ricerca dei limiti delle radici reali dell'equazioni è stato l'oggetto di un gran numero di lavori conseguati in tutti i trattati di Algebra.

LINCE (*Astron.*). Costellazione boreale formata da Evelio per riunire le stelle informi comprese tra l'Orsa maggiore e il Cocchiere al di sopra dei Gemelli (*Tav.* LX). Queste stelle non sono che della quinta o sesta grandezza, e perciò difficili a vedersi ad occhio nudo; è per tal motivo che Evelio diede alla costellazione che esse formano il nome di *Lince*, cui si attribuisce una vista acutissima.

LINEA. (*Geom.*). Estensione che non ha che una sola dimensione, la lunghezza. (*Vedi* Nozioni Preliminari n.° 2; e Geometria).

In astronomia e in geografia si chiama *linea* l'equatore, per abbreviazione di *linea equinoziale*.

LINEARE. Sotto il nome di *equazione lineare*, spesso s'indicano le equazioni del primo grado, perchè l'incognita non vi è elevata che alla prima potenza, e che generalmente si chiamano *quantità lineari* quelle le quali non hanno che una sola *dimensione*. (*Vedi* Questa parola.).

LIONE (*Astron.*). Quinto segno dello zodiaco che suole indicarsi col segno ♌.

La costellazione che gli ha dato il nome era quella che il sole percorreva nel tempo più caldo dell'estate, ed è forse per questa ragione che essa è stata simboleggiata colla figura di un lione, il più ardente e il più focoso di tutti gli animali. I poeti fingono che il lione che vedesi disegnato sui globi celesti rappresenti il lione nemeo vinto da Ercole e trasportato nel cielo da Giunone. Tale costellazione trovasi negli autori rammentata coi diversi nomi di *Bacchi sidus*, *Leo nemaeus*, *Leo herculeius*, *Junonis sidus*, *Primus Herculis labor*: le stelle che la compongono sono 95 nel Catalogo britannico, e la principale di esse chiamasi *Regolo*.

Evelio raccolse alcune stelle informi che sono tra l'Orsa maggiore, la Lince e il Cancro, e ne formò una nuova costellazione cui diede il nome di *Leoncino*: la principale di tali stelle non è che di terza grandezza.

LIRA (*Astron.*). Costellazione boreale conosciuta pure sotto i nomi di *Lyra*, *Ci-*

thara Apollonis, Arionis, Amphionis fidicula, Fides, Falco sylvestris, Vultur cadens, Aquila marina, Aquila cadens. Delle 21 stella che la compongono nel Catalogo britannico ve ne è una brillantissima di prima grandezza che dicesi *Wega* o *Lira.* Tale costellazione viene comunemente rappresentata con un avvoltoio che porta una lira, e ciò spiega i diversi nomi che le sono stati dati. Fu detta *Vultur cadens* perchè l'avvoltojo guarda verso il mezzogiorno ove sembra discendere, a differenza dell'Aquila che rappresentandosi in atto di volare verso l'alto del cielo fu detta *Vultur volans. Vedi* AQUILA.

LIVELLA (*Agrimensura*). Strumento di cui si fa uso per condurre una linea parallela all'orizzonte, e per trovare la differenza di altezza o di *livello* di due luoghi. Vi sono più specie di *livelle.*

La *livella ad acqua,* la più semplice di tutte, è composta di un tubo rotondo di rame, o di qualunque altra materia suscettibile di contenere dell'acqua, lungo circa un metro, e del diametro di 30 in 35 millimetri. Le sue estremità sono ricurve a squadra per adattarvi due tubi di vetro di 80 in 100 millimetri che vi si saldano con cera e mastice. Al di sotto vi è fermata nel mezzo una viera per porre lo strumento sul suo piede (*Tav.* CLXXII, *fig.* 1). Per una delle estremità vi si versa dell'acqua comune o colorata finchè ve ne sia tanta da comparire nei due tubi di vetro.

Questa livella è comodissima per livellare delle distanze di mezzana estensione, non essendo necessario che l'acqua sia egualmente lontana dalle estremità dei due tubi di vetro, perchè, per la proprietà ben nota dei liquidi, la linea visuale che rade le due superficie apparenti dell'acqua è sempre orizzontale.

La *livella ad aria* (*Tav.* CLXXII, *fig.* 2) è un tubo di vetro ben diritto e di egual grossezza e calibro in tutta la sua lunghezza. Si riempie, lasciandovi soltanto un bolla d'aria, di spirito di vino o di altro liquido non sottoposto a congelarsi; quindi si chiude ermeticamente alla lucerna. Questo strumento è esattamente parallelo all'orizzonte quando la bolla d'aria si ferma precisamente nel mezzo, perchè in ogni altra posizione la bolla d'aria, più leggera del liquido col quale è chiusa nel tubo, corre sempre verso l'estremità più elevata.

È questa livella ad aria semplicissima che serve di base a tutte le livelle composte montate sopra sostegni ed armate di traguardi o di canocchiali (*Tav.* CLXXII, *fig.* 3 e 4).

La livella a perpendicolo è composta di due regoli uniti insieme ad angolo retto, ed uno dei quali ha un filo a piombo (*Tav.* CLXXIII, *fig.* 1, 2 e 3). La livella dei muratori (*Tav.* CLXXII, *fig.* 5) è uno strumento di questa specie.

LIVELLAZIONE. Parte della *geometria pratica* che ha per oggetto di misurare la differenza di livello di due punti terrestri, o di far conoscere quanto un punto della superficie del globo è più vicino o più lontano di un altro dal centro.

Per le leggi dell'Idrostatica, la superficie di un'acqua tranquilla come quella di un lago o del mare, quando è in calma, è una superficie sferica, i cui punti sono tutti egualmente lontani dal centro della terra. Questa superficie è ciò che dicesi *piano di livello.*

Quantunque la terra non sia esattamente una sfera, e per conseguenza non possano a tutto rigore considerarsi come archi di circolo le linee che si misurano sulla sua superficie nelle operazioni ordinarie di livellazione, pure non si commette un errore sensibile non prendendo in considerazione il suo schiacciamento verso i poli. Solo nel caso che i punti dei quali deve determinarsi la differenza di livello siano situati a grandissima distanza gli uni dagli altri, si rende necessario, per maggiore esattezza, di introdurre nei calcoli questo schiacciamento.

Si dice che due punti sono *a livello tra loro* quando sono egualmente elevati al di sopra, o egualmente depressi al di sotto del *piano di livello*, cioè della superficie di un'acqua perfettamente tranquilla. Per esempio, se BE rappresenta la superficie del mare, i due punti A e D saranno a livello quando si avrà AB=DE (*Tav.* CLXXII, *fig.* 6). L'arco AD si dice allora *linea del livello vero*.

Una retta come DF, perpendicolare al filo a piombo DE del punto D, o tangente alla linea di livello AD, si chiama la *linea del livello apparente*, ed è la linea orizzontale che passa pel punto D e che si determina per mezzo di una *livella*. *Vedi* Livella.

La linea del livello vero e quella del livello apparente si allontanano tanto più l'una dall'altra quanto maggiormente si prolungano; così due punti di una stessa linea orizzontale non sono mai rigorosamente a livello. Pure, siccome per le piccole distanze la curvatura della terra è insensibile, si può prendere la linea del livello apparente per la linea del livello vero, finchè la distanza degli oggetti non oltrepassa 2 o 300 metri; al di là di questo limite non è più lecito il trascurarne la differenza.

Per determinare la differenza di livello di due punti terrestri come E e D (*Tav.* CLXXIII, *fig.* 4) che sono visibili l'uno dall'altro, si colloca in uno di questi punti, per esempio in E, una *livella ad acqua* o qualunque altra che faccia conoscere la linea del livello apparente BC; nell'altro punto D si pone un regolo CD portante una lastra di latta quadrata e divisa in due rettangoli, uno dei quali è bianco e l'altro nero. Questo quadrato, che si dice la *mira*, può scorrere in una scanalatura fatta nel regolo. L'osservatore che è nel luogo ove è stata situata la livella indica a quello che tiene il regolo, per mezzo di segni convenzionali, che alzi o abbassi la mira finchè giunga a vedere la linea di separazione dei rettangoli esattamente nel raggio visuale BC. Quindi si misura l'altezza di questo raggio visuale al di sopra dei punti E e D, e la differenza di queste altezze è la stessa di quella dei livelli, supponendo però che la distanza BC non sia maggiore di 300 metri. Per maggior facilità, il regolo che porta la mira è diviso in millimetri, e così fa conoscere immediatamente l'altezza CD.

Se i punti sono molto lontani o non sono visibili l'uno dall'altro, si scelgono dei punti intermedj, e per mezzo di più operazioni simili a quella che abbiamo descritto si determina la differenza di livello tra questi diversi punti, donde può in seguito concludersi quella dei punti estremi. Scegliendo stazioni che non siano distanti più di 2 in 300 metri non vi è bisogno di prendere in considerazione la differenza tra la linea del livello apparente e quella del livello vero.

Quando i punti, sebbene visibili, sono situati ad una grandissima distanza l'uno dall'altro, e non voglia farsi che una sola operazione, bisogna diminuire l'altezza della mira della quantità che resulta dall'elevazione del livello apparente al di sopra del livello vero, quantità che si determina nel modo seguente.

Sia A (*Tav.* CLXXIII, *fig.* 5) un punto della superficie della terra, AB la linea del livello apparente e AD la linea del livello vero; BD sarà l'elevazione del livello apparente al di sopra del livello vero. Per una delle proprietà del circolo, la tangente AB è media proporzionale tra la secante intera BE e la sua parte esterna BD, così si ha

$$BE : AB :: AB : BD,$$

donde

$$BD = \frac{\overline{AB}^2}{BE} = \frac{\overline{AB}^2}{ED+BD}.$$

Ma BD è sempre piccolissimo rapporto al diametro ED della terra, e si può fare senza errore valutabile in pratica

$$BD = \frac{\overline{AB}^2}{ED};$$

dunque l'innalzamento del livello apparente al di sopra del livello vero è eguale al quadrato della distanza orizzontale dei due punti diviso pel diametro della terra. Su questa formula è stata costruita la tavola seguente:

Distanza tra i punti da livellarsi	Elevazione del livello apparente sopra il livello vero
metri	metri
100	0,0008
200	0,0031
300	0,0071
400	0,0126
500	0,0196
600	0,0283
700	0,0385
800	0,0503
900	0,0636
1000	0,0785
1100	0,0950
1200	0,1131
1300	0,1327
1400	0,1539
1500	0,1767
1600	0,2011
1700	0,2270
1800	0,2545
1900	0,2835
2000	0,3142

Osservando che le differenze tra il livello apparente e il livello vero stanno tra loro come i quadrati delle distanze orizzontali, il che resulta dalla formula superiore, si può facilmente prolungare questa tavola, o trovare ancora i valori intermedj tra quelli che essa contiene.

Dobbiamo però fare osservare che l'alzamento prodotto dalla differenza tra il livello apparente e il livello vero non è in realtà così grande come lo dà il cal-

colo, a motivo della refrazione, il cui effetto è di far comparire gli oggetti più elevati di quello che sono realmente. Questo effetto, che è appunto il più grande possibile nella linea orizzontale, è causa che il livello apparente si trova più basso di quello che dovrebbe essere e differisce tanto meno dal livello vero; ma la quantità di questo abbassamento non diviene sensibile che per le distanze che oltrepassano 900 metri, e non si tiene a calcolo che nelle livellazioni che richiedono una grande esattezza. Indicando con h l'innalzamento che corrisponde ad una distanza qualunque, e con a l'abbassamento dovuto alla refrazione, per questa stessa distanza, si ha presso a poco

$$a=0,16h.$$

Così, per una distanza di 1600 metri, l'abbassamento è

$$0,16\times 0,2011=0,032176,$$

o 0,0322. Sottraendo questo valore dall'alzamento dato dalla tavola, rimane $0^m,1689$ per l'elevazione del livello vero. Si consultino i *Trattati di livellazione* di Picard, di Lahire, e quello molto più completo di Puissant. Si veda ancora l'eccellente *Trattato di agrimensura* di Lefèvre.

LOGARITMICA. (*Geom.*). Curva trascendente che deduce il suo nome dal sapere che le sue ascisse possono considerarsi come i logaritmi delle sue ordinate.

Sia AM l'asse delle x (*Tav.* CLXI, *fig.* 2). Prendiamo $AP=1$, $AB=x$, $BD=y$, avremo per l'equazione della curva

$$x=a\,.\,Ly, \quad \text{ovvero} \quad x=Ly^a,$$

la caratteristica L indicando il logaritmo naturale, e la quantità a il *modulo* del sistema nel quale AB, AC, AD, ec., sono i logaritmi di BQ, CR, DS, ec.

In questa curva, la *suttangente* è costante, poichè l'espressione generale delle suttangenti è (*vedi* Questa parola.)

$$\frac{ydx}{dy}$$

e si ottiene, differenziando l'equazione $x=aLy$

$$dx=a\frac{dy}{y}, \quad \text{donde} \quad \frac{ydx}{dy}=a,$$

così la suttangente è sempre eguale al *modulo*.

Con facilità si vede che l'asse AM è asintoto alla curva.

Questa curva che è stata trattata dai più abili matematici con lo scopo di esaminare la natura dei logaritmi, offre al giorno d'oggi poco interesse, poichè la teoria di queste funzioni è interamente conosciuta.

LOGARITMO. (*Alg.*) In generale si chiama *logaritmo* di un numero, l'esponente della potenza alla quale fa d'uopo elevare un dato numero invariabile per produrre il primo numero. Per esempio se 2 è il numero invariabile o la *base* dei logaritmi, l'esponente 3, il quale esprime la potenza alla quale bisogna elevare 2 per ottenere 8, è il *logaritmo* di 8.

Il numero invariabile, preso per *base*, essendo interamente arbitrario, esiste un numero infinito di sistemi differenti di logaritmi; il sistema del quale ordinariamente ci serviamo ovvero quello delle tavole ordinarie, ha per base il numero 10. Ciò non ostante esistono tra due sistemi qualunque di logaritmi, delle relazioni fisse e determinate, e le proprietà di questi numeri sono le stesse in tutti i sistemi.

Sia a un numero qualunque, x l'esponente qualunque della potenza alla quale bisogna elevare a per ottenere un numero variabile z, avremo l'eguaglianza

$$a^x = z \; . \; . \; . \; . \; . \; (1),$$

nella quale a sarà la *base* del sistema dei logaritmi x, ed x il *logaritmo* di z.

Vedremo inseguito che, purchè a sia un numero differente dall'unità, esiste sempre un numero x capace di soddisfare all'eguaglianza (1) qualunque sia z. Ma bisogna necessariamente che a differisca dall'unità, poichè tutte le potenze dall'unità essendo esse stesse l'unità, il secondo membro dell'eguaglianza (1) nel caso di $a=1$, sarebbe sempre l'*unità*, per qualunque valore di x, e non potrebbe conseguentemente generare qualunque altro numero.

Cominciamo da esporre le proprietà fondamentali dei logaritmi, quindi esamineremo la *natura particolare* di queste quantità, e il posto che esse occupano nella scienza dei numeri.

1. La base a essendo un numero qualunque differente dall'unità, si ha sempre $a^0 = 1$. (*Vedi* ALGEBRA n.° 24). Così, *in qualunque sistema di logaritmi, il logaritmo dell'unità è eguale a zero.* Siccome si ha ancora $a^1 = a$, *ne resulta che in qualunque sistema di logaritmi, quello della base è l'unità.*

2. Se indichiamo con x ed x' i logaritmi dei numeri z e z', le eguaglianze

$$a^x = z, \qquad a^{x'} = z'$$

essendo moltiplicate termine per termine, somministrano

$$a^x \times a^{x'} = z \, . \, z' ;$$

ma (ALGEBRA n.° 20) $a^x \times a^{x'} = a^{x+x'}$, così

$$a^{x+x'} = z \, . \, z'.$$

Ora $x+x'$ è il logaritmo dal prodotto $z.z'$, dunque *il logaritmo del prodotto di due numeri è uguale alla somma dei logaritmi di questi numeri.*

Con facilità possiamo estendere questa proprietà ad un numero qualunque di fattori, poichè si ha generalmente

$$a^x \, . \, a^{x'} \, . \, a^{x''} \, . \, a^{x'''} \, . , \;\; \text{ec.} \;\; = a^{x+x'+x''+x'''+ec.}$$

Possiamo dunque stabilire per principio, che *il logaritmo di un prodotto qualunque è eguale alla somma dei logaritmi di tutti i fattori.*

3. Dividendo termine per termine l'eguaglianze $a^x = z$, $a^{x'} = z'$, si ottiene (ALGEBRA n.° 23)

$$\frac{a^x}{a^{x'}} = a^{x-x'} = \frac{z}{z'},$$

donde resulta che *il logaritmo del quoziente di due numeri è eguale alla differenza dei logaritmi di questi numeri.*

4. Se si elevano i due membri dell'eguaglianza $a^x = z$, alla potenza m, si ottiene (ALGEBRA n.° 26)

$$(a^x)^m = a^{mx} = z^m.$$

Così, mx è il logaritmo della potenza z^m, dunque *il logaritmo di una potenza, è uguale al logaritmo della base di questa potenza moltiplicato pel suo esponente.*

5. Si troverebbe ugualmente

$$\sqrt[m]{\left(a^x\right)} = a^{\frac{x}{m}} = \sqrt[m]{z}.$$

Vale a dire che *il logaritmo di una radice è uguale a quello del numero diviso per l'esponente.*

6. Sono le quattro proprietà fondamentali precedenti, che rendono l'uso dei logaritmi si prezioso per l'esecuzione dei calcoli; perchè esse danno i mezzi di fare con molta facilità le operazioni elementari, riportando le più complicate ad alcune più semplici. Non bisogna evidentemente per ottenere questi vantaggi che poter conoscere in tutti i casi i logaritmi, che corrispondono a quantità date e reciprocamente. Questo è lo scopo delle tavole dei logaritmi le quali presentano i numeri in una colonna e i logaritmi corrispondenti in un'altra.

7. Nel sistema dei logaritmi volgari o *tabulari*, la base essendo 10, si ha, indicando con *log* il logaritmo,

$$
\begin{array}{lll}
10^0 = 1, & \text{ovvero} & \text{Log } 1 = 0 \\
10^1 = 10, & & \text{Log } 10 = 1 \\
10^2 = 100, & & \text{Log } 100 = 2 \\
10^3 = 1000, & & \text{Log } 1000 = 3 \\
10^4 = 10000, & & \text{Log } 10000 = 4 \\
\text{ec} \ldots\ldots & & \text{ec.} \ldots\ldots
\end{array}
$$

Donde si vede che tutti i logaritmi dei numeri compresi tra 1 e 10 sono minori dell'unità; che quelli dei numeri compresi tra 10 e 100 sono minori di 2; che quelli compresi tra 100 e 1000 sono minori di 3, e così di seguito.

Questi logaritmi dei numeri intermedii tra le potenze intere della base sono, come lo vedremo in seguito, delle quantità incommensurabili che si costuma di esprimere approssimativamente con frazioni decimali, ed essi sono tanto più esatti quanto essi sono espressi con un maggior numero di cifre.

Se si volesse trovare per esempio il logaritmo di 5, numero compreso tra 1 e 10, si potrebbe operare nella seguente maniera, partendo da una delle proprietà fondamentali dei logaritmi. Siano, in generale due numeri y, z i di cui logaritmi sono respettivamente x ed u; cioè: $x = \text{Log} y$, $u = \text{Log} z$. Da ciò che precede si ha

$$\text{Log} . \sqrt{yz} = \frac{1}{2} \text{Log} . yz = \frac{x+u}{2} \ldots . (2).$$

Così il logaritmo del numero medio proporzionale tra y e z è uguale alla metà della somma dei logaritmi di y e di z. Ora v essendo un numero compreso tra y e z possiamo sempre inserire tra y e z un numero assai grande di medj proporzionali, perchè uno tra di essi non differisca da v che di una quantità tanto piccola quanto si vorrà, e che si possa allora prenderlo per v senza errore sensibile; e siccome i logaritmi di tutti questi medj proporzionali si trovano dati facilmente in virtù dell'espressione (2), avremo con questo metodo quello di v. Facendo dunque $y=1$, $z=10$, troveremo per il medio proporzionale tra 1 e 10

$$\sqrt{1 \times 10} = \sqrt{10} = 3,162277,$$

limitandoci a sei decimali nell'estrazione della radice. Ma $\text{Log} . 1 = 0$, $\text{Log} . 10 = 1$, e di più $\text{Log} . \sqrt{1 \times 10} = \frac{0+1}{2} = 0,500000$; vale a dire

$$\text{Log} . (3,162277) = 0,500000.$$

Osservando ora che il numero 5 del quale si vuol conoscere il logarimo, è compreso tra 3,162277 e 10, si cercherà nuovamente un medio proporzionale tra questi ultimi numeri, il che darà

$$\sqrt{[10 \times 3,162277]} = \sqrt{[31,62277]} = 5,623413,$$

e si avrà per il logaritmo di questo medio

$$\text{Log}(5,623413) = \frac{1+0,5}{2} = 0,750000.$$

Osservando di nuovo che 5 è compreso tra i numeri 3,162277 e 5,623413, i cui logaritmi sono conosciuti, si cercherà come sopra un medio proporzionale tra questi numeri, come anche il logaritmo di questo medio, e si proseguirà l'operazione fintantochè si sia giunti a determinare un medio proporzionale, che sia esattamente uguale a 5 nei limiti che abbiamo scelti, vale a dire, in questo punto, il quale non ne differisca che nella settima decimale: il logaritmo corrispondente sarà il logaritmo domandato. Ecco la tavola di tutta l'operazione

Numeri	Logaritmi
1,000000,	0,0000000
10,000000,	1,0000000
3,162277,	0,5000000
5,623413,	0,7500000
4,216964,	0,6250000
4,869674,	0,6875000
5,232991,	0,7187500
5,048065,	0,7031250
4,958069,	0,6953125
5,002865,	0,6992187
4,980416,	0,6972656
6,991627,	0,6982421
4,997242,	0,6987304
5,000052,	0,6989745
4,998647,	0,6988525
4,999350,	0,6989135
4,999701,	0,6989440
4,999876,	0,6989592
4,999963,	0,6989668
5,000008,	0,6989707
5,999984,	0,6989687
4,999997,	0,6989697
5,000003,	0,6989702
5,000000,	0,6989700

Così, dopo 22 estrazioni di radici, si ottiene finalmente un ultimo medio proporzionale uguale a 5, donde si ha

$$\text{Log } 5 = 0{,}6989700$$

a piccolissima differenza.

Ed è con l'aiuto di questo processo lunghissimo e faticosissimo che le prime tavole di logaritmi sono state calcolate; ma in seguito si sono trovati metodi molto più speditivi e molto più comodi.

8. Qualunque sia del rimanente il metodo che s'impiega per trovare i logaritmi, ci si limita sempre a calcolare quelli dei numeri primi, gli altri ottenendosi inseguito mediante semplici moltiplicazioni o addizioni. Infatti il logaritmo di 5, per esempio, fa conoscere immediatamente quelli di 25, 125, 625, ec., vale a dire quelli di tutte le potenze di 5, poichè si ha generalmente

$$\text{Log}.(5^m) = m \text{ Log}.5.$$

Egualmente, conoscendo i logaritmi di 2 e di 3, si hanno quelli di tutti i prodotti formati dai fattori 2 e 3, poichè

$$\text{Log}.[2^m \times 3^n] = m \text{ Log}.3 + n \text{ Log}.2,$$

e così di seguito

9. Riprendiamo ora l'eguaglianza fondamentale

$$a^x = z,$$

nella quale $x = \text{Log}.z$; se si fa successivamente

$$x = 0,\ 1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ \text{ec.}$$

ne resulta

$$z = 1,\ a,\ a^2,\ a^3,\ a^4,\ a^5,\ a^6,\ a^7,\ \text{ec.}$$

donde si vede che tutti i valori di z maggiori dell'unità, sono prodotti da potenze della base a, i cui esponenti sono positivi, intieri o frazionari, e che il valore di z è tanto maggiore quanto quello di x è più grande.

Se in seguito si fa

$$x = 0,\ -1,\ -2,\ -3,\ -4,\ -5,\ -6,\ -7,\ \text{ec.}$$

si trova

$$z = 1,\ \frac{1}{a},\ \frac{1}{a^2},\ \frac{1}{a^3},\ \frac{1}{a^4},\ \frac{1}{a^5},\ \frac{1}{a^6},\ \frac{1}{a^7},\ \text{ec.}$$

vale a dire che tutti i valori di z più piccoli dell'unità, sono prodotti da potenze di a, i cui esponenti sono *negativi* intieri o frazionari, e che il valore di z è tanto più grande, quanto quello di x è più piccolo, astrazione fatta dal segno.

10. Resulta da queste considerazioni che poichè i logaritmi tanto positivi quanto negativi, i cui valori crescono da zero fino all'infinito, corrispondono a tutti i numeri interi e frazionari *positivi*, quelli dei numeri negativi non possono avere che un'esistenza *ideale*, poichè non esiste per x alcun valore che possa dare

$$a^x = -z$$

a essendo un numero positivo. I logaritmi conducono dunque a nuove quantità *immaginarie* (*Vedi* QUESTA PAROLA) delle quali in seguito riconosceremo la natura.

11. La base a di un sistema di logaritmi essendo data, sarà sempre possibile di calcolare i logaritmi di questo sistema, con un processo simile a quello che abbiamo impiegato n.° 7 per la base 10; così possiamo ammettere che fintanto-

chè z è positivo esiste un valore reale per x, il quale rende la quantità esponenziale a^x uguale a z; ciò che per ora importa, è di riconoscere la *natura* di questo valore reale di x, per sapere se i logaritmi non sono che una semplice combinazione delle operazioni o degli algoritmi elementari della scienza dei numeri, ovvero se essi non costituiscono da se medesimi un algoritmo elementare di una natura distinta. A quest' effetto, m essendo un numero qualunque, prendiamo la radice m^{sima} dai due membri dell' eguaglianza

$$a^x = z, \text{ avremo } \left(\sqrt[m]{a}\right)^x = z^{\frac{1}{m}},$$

il radicale $\sqrt{\ }$ indicando solamente le radici reali, e l' esponente frazionario le radici qualunque reali o immaginarie. Poichè la base a deve restare costante, ed è solamente la funzione x che deve corrispondere alle differenti radici $z^{\frac{1}{m}}$.

Ora, possiamo ottenere facilmente lo sviluppo della quantità $\left(\sqrt[m]{\ }\right)^x$ mettendola sotto la forma

$$\left[1+\left(\sqrt[m]{a}-1\right)\right]^x,$$

poichè, dalla formula del binomio (*Vedi* QUESTA PAROLA), si ha

$$\left[1+\left(\sqrt[m]{a}-1\right)\right]^x = 1+x\left(\sqrt[m]{a}-1\right)+\frac{x(x-1)}{1.2}\left(\sqrt[m]{a}-1\right)^2$$
$$+\frac{x(x-1)(x-2)}{1.2.3}\left(\sqrt[m]{a}-1\right)^3+\text{ec.} \dots$$

donde si deduce

$$z^{\frac{1}{m}}-1 = x\left(\sqrt[m]{a}-1\right)+\frac{x(x-1)}{1.2}\left(\sqrt[m]{a}-1\right)^2+\text{ec.} \dots$$

Ma se la quantità arbitraria m è infinitamente grande $\sqrt[m]{a}-1$ sarà una quantità infinitamente piccola, poichè la potenza $a^{\frac{1}{\infty}}$ non differisce dall' unità che di una quantità infinitamente piccola, e, per conseguenza, $\left(\sqrt[m]{a}-1\right)^2$, $\sqrt[m]{a}-1)^3$, ec., saranno quantità infinitamente piccole del secondo, terzo ordine, ec.; ordini i quali non possono influire in alcuna maniera sulla relazione delle quantità $z^{\frac{1}{m}}-1$

e $\left(\sqrt[m]{a-1}\right)$, considerata nella sua realtà. (*Vedi* Differenziale) Si ha dunque rigorosamente, in questo caso

$$z^{\frac{1}{\infty}}-1=x\left(\sqrt[\infty]{a-1}\right),$$

donde

$$x=\frac{z^{\frac{1}{\infty}}-1}{\sqrt[\infty]{a-1}}, \quad \text{ovvero} \quad \text{Log}\,z=\frac{z^{\frac{1}{\infty}}-1}{\sqrt[\infty]{a-1}}.$$

Tale è dunque la *natura* della quantità in questione Log z. » Quest' espressione è evidentemente quella della generazione teorica primitiva di questa funzione; ed è l' *idea* o la *concezione prima* proposta dalla ragione all' intelletto, per effettuarsi nel dominio dell' esperienza. » Ora questa funzione è evidentemente una funzione derivata *elementare*, perchè essa implica nella sua espressione degli esponenti *infiniti*, che fanno uscire le potenze che gli corrispondono dalla classe delle potenze ordinarie, capaci di una significazione immediata. Infatti, risalendo alla sorgente trascendentale, si trova che le potenze ordinarie che corrispondono a esponenti finiti, sono funzioni intellettuali *immanenti*, o funzioni semplici dell' intelletto, e che le potenze che corrispondono a esponenti infiniti non sono possibili che mediante l' applicazione della *ragione* alle funzioni dell' intendimento che abbiamo nominate, e sono quindi funzioni intellettuali superiori, e nominativamente funzioni *trascendentali*, o concezioni della ragione, dalle idee proposte da questa facoltà intellettuale superiore.

» Ne segue che le funzioni chiamate Logaritmi sono funzioni algoritmiche elementari, tra le funzioni algoritmiche possibili per l' uomo, e che la Teoria dei logaritmi forma uno dei rami necessari dell' algoritmia. » (Wronski. *Introduction à la Phil. des Math.*, pagina 12).

12. L' espressione

$$\text{Log}\,z=\frac{z^{\frac{1}{\infty}}-1}{\sqrt[\infty]{a-1}} \;\ldots\ldots\ldots (3),$$

deve contenere, come *espressione teorica primitiva*, il principio di tutta la teoria dei logaritmi, ed infatti è facilissimo dedurne le proprietà fondamentali che abbiamo precedentemente esposte; in questo punto ci contenteremo ricavarne un' espressione *tecnica*, o di sviluppo, che possa servire alla valutazione numerica dei logaritmi.

In primo luogo, A essendo una quantità qualunque, si ha generalmente,

$$A^{\frac{1}{\infty}}=\left[1+(A^n-1)\right]^{\frac{1}{\infty n}}$$

e per conseguenza

$$A^{\frac{1}{\infty}} = 1 + \frac{1}{\infty n}\left(A^n - 1\right) + \frac{\frac{1}{\infty n}\left(\frac{1}{\infty n} - 1\right)}{1 \cdot 2}\left(A^n - 1\right)^2 +$$

$$+ \frac{\frac{1}{\infty n}\left(\frac{1}{\infty n} - 1\right)\left(\frac{1}{\infty n} - 2\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3}\left(A^n - 1\right)^3 + \text{ec.},$$

il che si riduce a

$$A^{\frac{1}{\infty}} = 1 + \frac{1}{\infty n}\left(A^n - 1\right) - \frac{1}{2\infty n}\left(A^n - 1\right)^2 + \text{ec.}$$

In virtù di quest' ultima espressione, p e q essendo due quantità arbitrarie, avremo ugualmente

$$z^{\frac{1}{\infty}} = 1 + \frac{1}{\infty p}\left(z^p - 1\right) - \frac{1}{2\infty p}\left(z^p - 1\right)^2 + \text{ec.}$$

$$a^{\frac{1}{\infty}} = 1 + \frac{1}{\infty q}\left(a^q - 1\right) - \frac{1}{2\infty q}\left(a^q - 1\right)^2 + \text{ec.}$$

e, per conseguenza,

$$z^{\frac{1}{\infty}} - 1 = \frac{1}{\infty p}\left\{\left(z^p - 1\right) - \frac{1}{2}\left(z^p - 1\right)^2 + \text{ec.} \ldots\right\},$$

$$a^{\frac{1}{\infty}} - 1 = \frac{1}{\infty q}\left\{\left(a^q - 1\right) - \frac{1}{2}\left(a^q - 1\right)^2 + \text{ec.} \ldots\right\},$$

donde finalmente

$$\text{Log}\, z = \frac{q}{p} \cdot \frac{\left(z^p - 1\right) - \frac{1}{2}\left(z^p - 1\right)^2 + \frac{1}{3}\left(z^p - 1\right)^3 - \text{ec.}}{\left(a^q - 1\right) - \frac{1}{2}\left(a^q - 1\right)^2 + \frac{1}{3}\left(a^q - 1\right)^3 - \text{ec.}} \ldots \ldots (4).$$

Così, siccome le quantità p e q sono arbitrarie, possiamo sempre sceglierle in modo che $z^p - 1$ e $a^q - 1$ siano frazioni piccolissime, e conseguentemente rendere convergentissime le serie che compongono il numeratore e il denominatore del valore di Log z, in modo che sia sufficiente un piccolo numero di termini per ottenere questo valore approssimatissimo.

13. Il valore della base a entrando come parte costituente in quello del logaritmo, si presenta il problema di determinare se tra tutti i valori arbitrari che possiamo scegliere per questa base, ne esista uno che renda l' espressione del logaritmo la più semplice possibile. Ora, se osserviamo che $z^{\frac{1}{\infty}} - 1$, e $\sqrt[\infty]{a} - 1$

esseodo quantità iofioitamente piccole, i loro prodotti per la quantità infinitamente grande ∞ saranno quantità fiuite, e che l'espressiooe (3) può mettersi sotto la forma

$$\text{Log}\, z = \frac{\infty\left(z^{\frac{1}{\infty}}-1\right)}{\infty\left(\sqrt[\infty]{a}-1\right)} \ldots\ldots (5),$$

è facile vedere che se esistesse uo oumero a, tale che si potesse avere

$$\infty\left(\sqrt[\infty]{a}-1\right)=1,$$

la base a sparirebbe dall' espressione del logaritmo, il quale diveoterebbe per così dire indipeodeote da questa base; e si avrebbe allora per l'espressione teorica dei logaritmi di questo sistema, il più semplice di tutti,

$$\text{Log}\, z = \infty\left(z^{\frac{1}{\infty}}-1\right) \ldots\ldots (6).$$

La questione si riduce dunque a sapere se esista uo numero a capace di dare l'uguaglianza

$$\infty\left(\sqrt[\infty]{a}-1\right)=1.$$

Ora da quest' eguaglianza si ricava

$$a=\left(1+\frac{1}{\infty}\right)^{\infty}$$

e, sviluppando il binomio,

$$\left(1+\frac{1}{\infty}\right)^{\infty}=1+\infty\frac{1}{\infty}+\frac{\infty(\infty-1)}{1\,.\,2}\,\frac{1}{\infty^2}+\frac{\infty(\infty-1)(\infty-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\,.\,\frac{1}{\infty^3}+\text{ec.},$$

il che si ridoce a

$$\left(1+\frac{1}{\infty}\right)^{\infty}=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\,.\,2}+\frac{1}{1\,.\,2\,.\,3}+\frac{1}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}+\text{ec.}$$

ossia

$$a=2,718281828459045 \text{ ec.}$$

Esiste duuque effettivamente un numero reale capace di dare l'uguaglianza in questione, e preodendo questo oumero, 2, 71828 .... per base di uo sistema di logaritmi, l'espressione teorica di questi logaritmi sarà data dalla formula (6).

D' ora in avanti iudicheremo questi logaritmi, che si chiamano *naturali* cou la caratteristica L; così avremo io generale per i logaritmi naturali

$$\text{L}\, z = \infty\left(z^{\frac{1}{\infty}}-1\right) \ldots\ldots (7);$$

e per i logaritmi di un sistema qualunque, la di cui base è a,

$$\text{Log}\,.\,z = \infty\left(z^{\frac{1}{\infty}} - 1\right).\frac{1}{La} = \frac{Lz}{La}\,\ldots\ldots(8).$$

Donde si vede che conoscendo i logaritmi *naturali*, si ottengono quelli di un sistema qualunque moltiplicandoli per la quantità costante $\frac{1}{La}$. Questa quantità costante, che è l'unità divisa pel logaritmo naturale della base del sistema in questione, si chiama il *modulo* di questo sistema.

14. a e b essendo le basi di due sistemi di logaritmi, poichè si ha generalmente, indicando il primo sistema con Log e il secondo con *Log*,

$$\text{Log}\,z = \frac{Lz}{La},\quad \mathit{Log}\,z = \frac{Lz}{Lb},$$

se ne deduce

$$\frac{\text{Log}\,z}{\mathit{Log}\,z} = \frac{Lb}{La}.$$

Vale a dire, che *il rapporto dei logaritmi di un medesimo numero, preso in due sistemi differenti, è una quantità costante.* Proprietà che lega tutti i sistemi, e dà un metodo facile di passare dall'uno all'altro.

15. Partendo dall'espressione teorica (7) possiamo ottenere le generazioni *teoriche* e *tecniche* di un numero per mezzo del suo logaritmo; infatti si trova, per la prima,

$$z = \left(1 + Lz\,.\,\frac{1}{\infty}\right)^{\infty}\,\ldots\ldots(9),$$

e per la seconda, sviluppando il binomio,

$$z = 1 + \frac{1}{1}\,Lz + \frac{1}{1\,.\,2}\left(Lz\right)^2 + \frac{1}{1\,.\,2\,.\,3}\,.\left(Lz\right)^3 + \text{ec.}$$

Se facciamo z uguale alla funzione esponenziale a^x, siccome $L(a^x) = xLa$, otterremo, sostituendo,

$$a^x = 1 + \frac{(La)\,.\,x}{1} + \frac{(La)^2\,.\,x^2}{1\,.\,2} + \frac{(La)^3\,.\,x^3}{1\,.\,2\,.\,3} + \text{ec.},$$

espressione della quale abbiamo fatto uso in altra parte. (*Vedi* INTEGRALE).

16. Per completare la teoria dei logaritmi, ci rimane da rendere generali l'espressioni teoriche (7) e (8) per poterle immediatamente applicare a tutti i casi possibili dei valori positivi e negativi, reali o immaginari di un numero z.

La generazione di un numero negativo per mezzo dell'*unità negativa*, essendo della forma

$$(-1)^{\rho}\,.\,A,$$

nella quale ρ è un numero impari qualunque, cominciamo dal creare la forma la più generale della generazione per potenza $(-1)^{\rho}$ dell'unità negativa, vale

a dire quella che comprende tutte le determinazioni reali e ideali, o *immaginarie*, di questa generazione. Ora, in virtù della teoria dei *seni* (*Vedi* QUESTA PAROLA), μ essendo un numero qualunque, si ha

$$\left(-1\right)^{\frac{\rho}{\mu}} = \cos\frac{\rho\pi}{\mu} + \operatorname{sen}\frac{\rho\pi}{\mu}\sqrt{-1}$$

(*Vedi* EQUAZIONE); così, quando μ è infinitamente grande, siccome allora $\frac{\rho\pi}{\mu}$ è una quantità infinitamenente piccola, il seno è uguale all'*arco* e il coseno uguale al *raggio*, vale a dire, in questo caso, all'*unità*; quest'espressione diventa perciò

$$\left(-1\right)^{\frac{\rho}{\infty}} = 1 + \rho\pi\sqrt{-1}\,.\,\frac{1}{\infty}.$$

Donde,

$$\left(-1\right)^{0} = \left(1 + \rho\pi\sqrt{-1}\,.\,\frac{1}{\infty}\right)^{\infty} \;.\;.\;.\;.\;.\;(10).$$

Ora, z essendo un numero positivo qualunque, abbiamo dalla formula (9)

$$z = \left(1 + \mathrm{L}z\,.\,\frac{1}{\infty}\right)^{\infty},$$

così moltiplicando termine a termine le espressioni (10) e (9) verrà

$$\left(-1\right)^{0}.\,z = \left(1 + \mathrm{L}z\,.\,\frac{1}{\infty}\right)^{\infty}.\left(1 + \rho\pi\sqrt{-1}\,.\,\frac{1}{\infty}\right)^{\infty}$$

$$= \left[1 + \frac{1}{\infty}\left(\rho\pi\sqrt{-1} + \mathrm{L}z\right)\right]^{\infty}.$$

Sostituendo questo valore invece di z nell'espressione (7), e indicando con la caratteristica L′ il logaritmo naturale e generale, nel mentre che L indica solamente il logaritmo naturale reale del numero positivo z, otterremo definitivamente

$$\mathrm{L}'\left[\left(-1\right)^{0}.\,z\right] = \rho\pi\sqrt{-1} + \mathrm{L}z \;.\;.\;.\;.\;(11).$$

Resulta da questa legge, che quando si tratta del logaritmo di un numero negativo, ρ essendo un numero impari qualunque e non potendo essere zero, il secondo membro è una quantità ideale o *immaginaria*; vale a dire che *il logaritmo di un numero negativo è una quantità immaginaria*, e si riduce alla quantità primitiva $\sqrt{-1}$, come tutte le quantità dette *immaginarie*. (*Vedi* QUESTA PAROLA).

Se si tratta del logaritmo di un numero positivo, allora ρ deve considerarsi come un numero pari qualunque, compresoci lo zero; e allora questo logaritmo ammette *un' infinità di valori*, corrispondente all' infinità di valori arbitrari che

si possono dare a ρ, ma tra tutti questi valori non ve ne è che uno *solo* reale, quello che corrisponde a $\rho = 0$.

Quello che abbiamo detto dei logaritmi naturali, si applica necessariamente a quelli di tutti gli altri sistemi.

17. Possiamo facilmente dall' espressione (11) passare ad un' espressione più generale di un sistema qualonque, prendendo per base un numero positivo o negativo, reale o ideale; ma la considerazione di una base reale e positiva basta a tutte le applicazioni, e in questo punto ci limiteremo a ciò.

Un corollario importante dell' espressione (11) è, che facendo successivamente $\rho = 0$, $z = 1$, si ottiene

$$L'\left(+z\right) = Lz\,, \quad L'\left(-1\right)^{0} = \rho\pi\sqrt{-1}\,,$$

e, per conseguenza, in virtù di questa medesima espressione

$$L'\left[\left(-1\right)^{0}.z\right] = L'\left(-1\right)^{0} + Lz.$$

Donde si vede che il teorema semplicissimo $L\left(-x\right) = L\left(-1\right) + Lx$, messo in dubbio dal Kramp (*Analis. des rèfra. ast.*) è interamente legato alla natura dei logaritmi, e rientra nell' oggetto medesimo della loro teoria.

18. La forma di qualunque quantità detta *immaginaria*, essendo

$$z = \alpha + \beta\sqrt{-1}$$

(*Vedi* Immaginario), è facile vedere che si ha

$$z^{\frac{1}{\infty}} = \alpha^{\frac{1}{\infty}}\left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\sqrt{-1}\right)^{\frac{1}{\infty}} = \left(1 + \frac{1}{\infty}L\alpha\right)\left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\sqrt{-1}\right)^{\frac{1}{\infty}}$$

$$= 1 + \frac{1}{\infty}\left\{L\alpha + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{4} + \text{ec.}\right]\right\}$$

$$+ \frac{1}{\infty}\left\{\sqrt{-1}.\left[\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{3} + \text{ec.}\right]\right\}.$$

Ora, dallo sviluppo (4) si ha

$$L\left\{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{2} + 1\right\} = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{4} + \frac{1}{3}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{6} - \text{ec.}$$

e possiamo inoltre osservare, per abbreviare l' espressione, che

$$\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) + \frac{1}{5}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{5} - \frac{1}{7}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{7} + \text{ec.}$$

è lo sviluppo dell' *arco* la cui tangente è uguale a $\frac{\beta}{\alpha}$ (*Vedi* Tangente. *Vedi*

ancora INTEGRALE), così

$$z^{\frac{1}{\infty}} = 1 + \frac{1}{\infty}\left\{\frac{1}{2}L\left(\alpha^2+\beta^2\right)+\sqrt{-1}\,.\,arco.\left[tang=\frac{\beta}{\alpha}\right]\right\}.$$

Sostituendo questo valore nell' equazione (7), verrà

$$L\left(\alpha+\beta\sqrt{-1}\right)=\frac{1}{2}L\left(\alpha^2+\beta^2\right)+\sqrt{-1}\,.arco.\left[\text{tang}=\frac{\beta}{\alpha}\right]\ldots.(12).$$

Il logaritmo di una quantità *immaginaria* è dunque ugualmente immaginario, e si riduce ancora alla semplice radice $\sqrt{-1}$.

19. Se vogliamo ottenere la legge fondamentale, la più generale della teoria dei logaritmi naturali, bisogna introdurre la generazione dell' unità negativa (10) nell' espressione (12), e quest' ultima legge divanta finalmente

$$L'\left\{\left(-1\right)^{\rho}.\left(x+y\sqrt{-1}\right)\right\}=\frac{1}{2}L\left(x^2+y^2\right)+$$
$$\sqrt{-1}\left\{\rho\,\pi+arc.\left[\text{tang}=\frac{y}{x}\right]\right\}\;\ldots.\;(13).$$

Espressione nella quale x ed y sono quantità reali e positive, e π sempre la semicirconferenza del circolo il cui raggio è l' unità.

Dando alle quantità x ed y i valori particolari $x=0$, $y=1$, si ha

$$L'\left(x^2+y^2\right)=L\,1=0,\quad arc.\left[\text{tang}=\frac{1}{0}\right]=\frac{1}{2}\pi,$$

e, per conseguenza,

$$L'\left\{\left(-1\right)^{\rho}.\sqrt{-1}\right\}=\frac{2\rho+1}{2}\pi\sqrt{-1}$$

donde si ottiene semplicemente nel caso di $\rho=0$

$$L'\sqrt{-1}=\frac{1}{2}\pi\sqrt{-1}.$$

Siamo giunti a quest' ultima espressione con un processo assai differente. (*Vedi* INTEGRALE). Se ne ricava ancora

$$\frac{1}{2}\pi=\frac{L'\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}},$$

generazione ideale del famoso numero π, trovata in principio da Giovanni Bernoulli. È facile dedurre dalla formula (13), tutte l' espressioni singolari di questo numero π, ottenute dal conte di Fagnano.

20. Ritorniamo sopra le considerazioni pratiche dei logaritmi. I Logaritmi ordinari, o quelli che hanno per base il numero 10, oltre le proprietà che gli sono comuni con quelli di qualunque altro sistema, ne hanno una assai pre-

ziosa nell' aritmetica decimale, ed è questa che gli ha fatti preferire per le tavole usuali; siccome si esprimono i logaritmi di tutti i numeri, eccettuato quelli delle potenze intere di 10, con decimali, i logaritmi dei numeri contenuti tra 1 e 10 saranno essi stessi contenuti tra 0 e 1, quelli dei numeri da 10 a 100 saranno tra 1 a 2 e così di seguito. Si vede dunque che ciascun logaritmo si compone di un numero intero e di un numero frazionario decimale; e si conosce immediatamente questo numero intero, al quale si dà il nome di *caratteristica*, poichè esso è sempre minore di un'unità di quello delle cifre del numero corrispondente al logaritmo; per esempio la *caratteristica* o il numero intero che entra nel logaritmo di 5348 è 3 perchè 5348 è compreso tra 1000 e 10000. Così conoscendo un logaritmo si sa subito di quante cifre il suo numero si compone, come subito si conosce la caratteristica del logaritmo di qualunque numero proposto. Ed è per questa ragione che le grandi tavole dei logaritmi ordinari, non contengono che la parte decimale dei logaritmi.

Se le frazioni decimali di due logaritmi sono uguali tra loro, con una caratteristica differente, ciò dipende che allora i due numeri corrispondenti sono tra loro nel rapporto dell' unità alla potenza di 10, il di cui esponente è la differenza della caratteristiche, e che questi numeri sono identici rapporto al valore delle loro cifre prese isolatamente; per esempio, i numeri che hanno per logaritmi 4,2092737 e 7,2092737, sono 16191 e 16191000; quelli dei logaritmi 3,6517624 e 0,6517624 sono 4485 e 4,485. La sola frazione decimale fa dunque trovare le cifre del numero corrispondente, a la caratteristica indica quante cifre si debbono dare al numero intero verso la sinistra; le cifre separate verso la destra esprimono delle frazioni decimali. Così avendo trovato che un logaritmo la cui frazione decimale è 8228215, corrisponde nelle tavole al numero 665, si avrà per questo numero, mediante le diverse caratteristiche.

Logaritmi	Numeri
0,8228216	6,65
1,8228216	66,5
2,8228216	665,
3,8228216	6650,
4,8228216	66500,
5,8228216	665000,
ec.	ec.

Se la caratteriscica diventasse -1, -2, -3, ec., il numero diventerebbe 0,665; 0, 0665, 0, 00665, ec. Ma tutte queste particolarità si trovano esposte nell' istruzioni che accompagnano le tavole dei logaritmi, come più latamente si troveranno anche nel seguito di questo articolo.

21. Dobbiamo indicare, una difficoltà che comparisce presentarsi nell' uso numerico dei logaritmi, e che possiamo facilmente eludere. Se si volesse operare la moltiplicazione di due quantità, A e $-$B si avrebbe, servendosi dei logaritmi di queste quantità.

$$\text{Log } A + \text{Log}(-B) = \text{Log}(-AB),$$

e siccome Log($-$B) è una quantità *immaginaria*, sembra al primo aspetto che le tavole ordinarie sieno insufficienti per far conoscere il prodotto $-$AB. Non segue però così, poichè questo prodotto, considerato nella sua sola grandezza, indipendentemente da qualunque segno dei fattori A e B, è sempre AB; così

basta operare come se le quantità A e B fossero tutte due positive, e si ha allora

$$\text{Log}\, A + \text{Log}\, B = \text{Log}\, AB,$$

poi quando si è trovato il prodotto AB, coo l'aiuto del suo logaritmo, gli si dà il segoo che gli conviene. Si opererebbe ugualmente per un numero qualunque di fattori.

22. La scoperta o piuttosto l'invenzione dei logaritmi si deve al celebre Giovanni Napier o Nepero, barone scozzese e geometra assai distinto, i di cui lavori ebbero principalmente per oggetto di rendere i calcoli numerici più facili e più pronti. La maniera con cui egli considerò in principio queste funzioni importanti, presenta qualche analogia con quelle con cui Newton considerò la generazione delle sue flussioni, poichè egli le dedusse dal paragone degli spazj descritti da due punti che si muovono sopra rette indefinite, l'uno con una velocità costante, e l'altro con una velocità accelerata. Questi spazj danno origine a due progressioni: la prima aritmetica, la seconda geometrica, e le proprietà delle due specie di rapporti che le costituiscono, conducono esattamente alle proprietà fondamentali dei logaritmi, vale a dire che i termini della progressione aritmetica sono i logaritmi dei termini corrispondenti della progressione geometrica.

Dopo essersi formato quest' idea dei logaritmi, e aver compreso tutto il partito che si poteva ricavare da tali numeri per abbreviare i calcoli, rimaneva al Nepero il trovargli, e ciò era la cosa più difficile. Egli vi giunse intercalando, come l'abbiamo fatto n.° 7, una serie di medii proporzionali geometrici tra i termini principali della progressione geometrica, e una serie di medii aritmetici tra i termini corrispondenti della progressione aritmetica. I logaritmi ai quali giunse con questo processo si trovarono essere i logaritmi *naturali*, chiamati ancora logaritmi *iperbolici*, perchè essi rappresentano le aree dell'iperbola equilatera tra gli asintoti, quella del quadrato inscritto essendo presa per unità. (*Vedi* Quadratura).

Il Nepero pubblicò la sua scoperta nel 1614 in un'opera intitolata: *Logarithmorum canonis descriptio*, *seu arithmeticarum supputationum mirabilis abbreviatio*, ec. Siccome il suo principale oggetto era di facilitare i calcoli trigonometrici, in quei tempi tanto lunghi e tanto faticosi, i suoi logaritmi non erano applicati che ai seni, dei quali esso dava i logaritmi per tutti i gradi e minuti del quarto di circolo. Il suo metodo di costruzione non era punto descritto in questa prima opera, solamente prometteva darlo. Egli morì nel 1616, avanti di potere adempire la sua promessa; ma il suo figlio, Roberto Nepero, pubblicò in questo stesso anno l'opera postuma di suo padre, sotto il titolo di *Mirifici logarithmorum canonis constructio* ec. Ci si trovò subito lo sviluppo del metodo impiegato dal Nepero per trovare i logaritmi, quindi l'indicazione dei cambiamenti che ulteriori riflessioni l'avevano impegnato a fare nel suo sistema di logaritmi. Il Nepero proponeva di scegliere per le due progressioni fondamentali,

$$\begin{array}{cccccc} 1, & 10, & 100, & 1000, & 10000, & \text{ec.} \\ 0, & 1, & 2, & 3, & 4, & \text{ec.} \end{array}$$

dimodochè il logaritmo di 1 essendo 0, quello di 10 fosse 1, ec. Questo è il sistema dei logaritmi ordinari o tabulari.

Il Nepero ebbe fortunatamente un degno successore in Enrico Briggs, professore del collegio di Gresham. Appena il Nepero ebbe pubblicato la sua prima opera, il Briggs andò a trovarlo ad Edimburgo per conferire con esso. Egli fece ancora due viaggi, ed era sul punto di farne un terzo, quando la morte del Nepero venne ad interrompere il suo progetto. Il Nepero gli aveva fatto parte della sua in-

tenzione di cambiare la forma dei suoi logaritmi, o, per meglio dire, il Briggs aveva avuto concorrentemente con esso il medesimo pensiero. Il Nepero gliene aveva raccomandata l'esecuzione con istanza: così il Briggs vi lavorò con molto impegno, poichè fino dal 1618 pubblicò una tavola di logaritmi ordinari dei mille primi numeri sotto il titolo di *Logarithmorum chilias prima*, come un saggio del lavoro più esteso che esso prometteva. Questo lavoro doveva consistere in due immense tavole, una contenente tutti i logaritmi dai numeri naturali, da 1 fino a 100000, e l'altra quelli dei seni e tangenti per tutti i gradi e *centesimi* di grado del quarto del circolo. Questo zelante e infaticabile calcolatore eseguì una parte dei suoi progetti; poichè esso pubblicò a Londra, nel 1624, sotto il titolo di *Arithmetica logarithmica*, i logaritmi dei numeri naturali da 1 fino a 20000, e quindi da 90000 fino a 100000: essi vi sono calcolati con quattordici decimali. Questa tavola è preceduta da una sapiente introduzione, ove la teoria e l'uso dei logaritmi sono ampiamente sviluppati. Ci si vede la nascita dei metodi d'*interpolazione* (*Vedi* QUESTA PAROLA), come pure un gran numero di nuove e ingegnose considerazioni. Riguardo alla seconda tavola, il Briggs l'aveva assai avanzata, ma la morte lo prevenne e gl'impedì di compirla. Fu Enrico Gallibrand che la terminò, e la pubblicò sotto il titolo di *Trigonometria Britannica* (Londra, 1633).

Non dobbiamo qui omettere un altro cooperatore zelante del Briggs. Questi è il Gunther, professore come esso al collegio di Gersham. Nel mentre che il Briggs lavorava con ardore alla sua gran tavola di logaritmi, il Gunther calcolava con ardore uguale, e con i medesimi principii, quella dei logaritmi dei seni e delle tangenti; e fin dal 1620, pubblicò, per l'utilità degli astronomi, le sue tavole di logaritmi per tutti i gradi e minuti del quarto di circolo sotto il titolo di *Canon of triangles*. I logaritmi vi sono espressi con sette cifre. Queste tavole di seni e tangenti logaritmiche essendo le prime che erano comparse, meritano al Gunther l'onore di essere associato al Briggs, come il Gallibrand.

Si hanno troppe obbligazioni, disse il Montucla, a quelli dai quali prendiamo queste particolarità, a questi primi promotori della teoria dei logaritmi, per non gettare alcuni fiori sopra le loro tombe, facendo conoscere le loro persone e i loro lavori.

L'invenzione dei logaritmi fu accolta con premura da tutti i sapienti dell'Europa: ma il Keplero e il libraio olandese Vlacq sono quelli, ai quali abbiamo più obbligazioni che agli altri. Il Keplero non solamente gettò una gran chiarezza sopra la teoria di questi numeri, fondandola unicamente sopra quella dei rapporti geometrici, ammessa in qualunque tempo, ma egli calcolò ancora delle tavole particolari adattate al calcolo astronomico allora in uso, e per corrispondere alle sue tavole rodolfine che esso pubblicava. Il Vlacq, non contento di ristampare l'*Aritmetica logaritmica* del Briggs, appena che comparve, ne diede una traduzione francese, lo stesso anno 1628, dopo aver ripieno la laguna lasciata dal Briggs, da 20000 fino a 90000. I logaritmi del Vlacq sono calcolati fino a undici decimali. Questo libraio matematico diede in seguito, vale a dire, nel 1636, un compendio di queste tavole, il quale era divenuto il manuale trigonometrico il più comune fino al tempo in cui nuove tavole più corrette furono stabilite.

In Italia, il Cavalleri sembra essere il primo che abbia adottato i logaritmi. Esso pubblicò a Bologna, nel 1632, delle tavole estesissime, nelle quali si trovano i logaritmi delle secanti e dei seni-versi. La Francia deve le sue prime tavole ad un inglese, Edmond Wingate, il quale andò a pubblicarle a Parigi nel 1624. Ma se i sapienti francesi si limitarono in quest'epoca a profittare dei lavori degli estranei, essi hanno dopo concorso in una maniera attiva al perfezionamento delle tavole dei logaritmi, e quelle che portano il nome del Callet, pubblicate da

Firmino Didot, sono al giorno di oggi ciò che esiste di più completo e di più esatto in questo genere. Possiamo vedere le particolarità dei miglioramenti successivi di quest' opera nell' avviso messo in principio.

Nel mentre che l' uso dei logaritmi si estendeva continuamente, e che le tavole acquistavano, con le loro successive edizioni, dei notabili perfezionamenti sotto il rapporto dell' esattezza tipografica, la teoria faceva pochi progressi, poichè non è che nel 1668 che il Mercator diede la prima serie che rappresenta il valore del logaritmo di un numero qualunque, o la prima generazione *tecnica* conosciuta dei logaritmi naturali. Questa serie è la seguente:

$$L\left(1+x\right)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}\ \text{ec.}\ldots\ldots$$

Il Mercator le dedusse dalla quadratura dell' iperbola. Essa è un caso particolare dell' espressione (4).

Per calcolare i logaritmi mediante l' aiuto di questa serie, bisogna prendere per x dei numeri frazionari; più essi sono piccoli, più la serie è convergente, e meno termini bisognano per ottenere valori sufficientemente approssimati. Per esempio, se si fa $x=\frac{1}{5}$, essa dà

$$L\frac{6}{5}=\frac{1}{5}-\frac{1}{2\,.\,25}+\frac{1}{3\,.\,125}-\frac{1}{4\,.\,625}+\text{ec.}\ldots$$

e riducendo i termini in frazioni decimali, bastano i primi dieci per avere $L\frac{6}{5}=0{,}1823215$. Si troveranno egualmente i logaritmi di tutti i numeri che superano di poco l' unità, e con la loro scambievole combinazione si dedurrà quelli dei numeri interi. Poichè avendo il logaritmo di $\frac{9}{8}$ e quello di $\frac{4}{3}$, si avrà quello di 2, poichè

$$L\frac{9}{8}+2L\frac{4}{3}=L\frac{9}{8}+L\left(\frac{4}{3}\right)^2=L\frac{9}{8}+L\frac{16}{9}=L\left(\frac{9}{8}\times\frac{16}{9}\right)=L2.$$

Avendo quello di 2 e quello di $\frac{5}{4}$, si troverà facilmente quello di 10, poichè

$$L\frac{5}{4}+3L2=L\frac{5}{4}+L2^3=L\frac{5}{4}+L8=L\left(\frac{5}{4}\times8\right)=L\,10,$$

e così di seguito. Per passare, quindi, dai logaritmi naturali, ai logaritmi ordinari, si moltiplicheranno i primi pel *modulo* o per la quantità costante $\frac{1}{L10}$, il cui valore è

$$0{,}43429\ \ 44819\ \ 03251\ \ 82765,\ \text{ec.}$$

Dopo il Mercator, si sono trovate delle serie molto più convergenti e altri processi molto più speditivi; ma la sua segna il primo passo del progresso nella

teoria dei logaritmi, quantunque il Newton avesse di già scoperto questa medesima serie, come pure molte altre, avanti la pubblicazione che ne fu fatta dal Mercator, nella *Logarithmotechnica*; poichè il Newton non aveva ancora comunicato i suoi lavori sopra i logaritmi che nelle sue lettere ad Oldenburgo, le quali non erano in cognizione del pubblico.

Giacomo Gregory fu il primo che, andando sulle traccie del Newton e del Mercator, aggiunse alla teoria dei logaritmi. Gli dobbiamo particolarmente le due seguenti serie assai osservabili, per mezzo delle quali si ottengono immediatamente i logaritmi delle tangenti e secanti, senza aver bisogno di cercare le secanti e le tangenti naturali. Sia a l'arco, r il raggio, q il quadrante del circolo, si ha

$$\text{Log . secante } a = \frac{a^2}{r} + \frac{a^4}{12r^3} + \frac{a^6}{45r^5} + \frac{17a^8}{52520r^7} + \text{ec.}$$

$$\text{Log . tangente } a = e + \frac{e^3}{6r^2} + \frac{e^5}{24r^4} + \frac{61e^7}{040r^6} + \text{ec.}$$

nell'ultima serie, $e = 2a - q$. Per fare uso di queste serie, bisogna esprimere gli archi in parti del raggio.

Dopo poco, l'Halley, il Craige, il Taylor, il Côtes e molti altri emessero sopra la teoria dei logaritmi dell'idee ingegnosissime, che siamo forzati passare sotto silenzio; ma fu l'Eulero il quale uscendo finalmente dalle considerazioni geometriche o puramente aritmetiche, stabilì la teoria algebrica di queste funzioni sopra quella delle funzioni esponenziali, donde esse tirano infatti la loro origine. Gli dobbiamo le leggi fondamentali (7) e (8). Quanto alle leggi (11) e (13), esse appartengono al signor Wronski che ha definitivamente classato i logaritmi fra le funzioni derivate elementari. (*Vedi* FILOSOFIA DELLE MATEMATICHE).

Non possiamo interamente passare sotto silenzio una discussione che si elevò tra il Leibnitz e il Bernoulli, e in seguito tra l'Eulero e il D'Alembert, rapporto ai logaritmi dei numeri negativi. Il Leibnitz e dopo di lui l'Eulero sostenevano che i numeri negativi non hanno logaritmi reali, nel mentre che il Bernoulli e il D'Alembert pretendevano il contrario. Gli argomenti delle due parti erano particolarmente fondati sopra la natura della curva chiamata *logaritmica* (*Vedi* QUESTA PAROLA). Fu l'Eulero, il quale se non risolvette, almeno troncò la questione, riportando i logaritmi a funzioni circolari. La legge fondamentale (11) che abbraccia tutti i valori positivi e negativi del numero z, dà completamente ragione al Leibnitz e all'Eulero.

Passiamo ora a considerare le funzioni importanti dei logaritmi come un istrumento di calcolo, di cui è essenziale di rendere l'uso popolare. Ed è con questo scopo che si dà la seguente tavola, che, malgrado la sua poca estensione, presenta immediatamente i logaritmi dei numeri fino a 10000, e gli dà fino a 1000000 con l'aiuto di una piccola operazione sopra le differenze. I principii della sua composizione essendo i medesimi di quelli delle grandi tavole del Callet e del Borda, le spiegazioni che daremo sopra il suo uso potranno applicarsi a quest'ultime; ma si può contentarsi della nostra per tutte le questioni relative al commercio e all'industria.

23. I logaritmi volgari dei numeri interi si compongono di due parti: l'una intera, che si chiama la *caratteristica*, e l'altra *frazionaria*, espressa in decimali. La caratteristica avendo sempre tante unità quante la parte intera del numero ha cifre meno una, si omette ordinariamente nelle tavole, il che non può mai essere una causa di errore, poichè l'ispezione sola del numero di cui si cerca il logaritmo fa conoscere questa caratteristica. Così i logaritmi dei nu-

meri da 1 fino a 9 inclusivamente, hanno zero per caratteristica; quelli dei numeri da 10 fino a 99 hanno 1; 2, da 100 fino 999; 3, da 100 fino a 9999, ec. Un numero qualunque essendo dato, si conosce dunque immediatamente la caratteristica del suo logaritmo, e basta trovare nelle tavole la parte frazionaria di questo logaritmo perchè sia immediatamente determinato.

24. La tavola qui unita si compone di undici colonne, intitolate N, o, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. La prima colonna a sinistra, indicata N, contiene i numeri naturali, da 100 fino a 999; la seconda colonna, segnata o, offre i logaritmi di questi numeri, o almeno le loro parti frazionarie, poichè le caratteristiche non ci si trovano. Siccome ciascun logaritmo ha le sue due prime cifre decimali comuni con alcuni di quelli che lo seguono, ci siamo contentati di scrivere una sola volta queste cifre comuni in luogo di ripeterle; dimodochè, quando non si trovano che quattro cifre, nella colonna o, avanti il numero proposto, bisogna fargli precedere dal gruppo isolato delle due cifre, il più prossimo risalendo. Se si domandasse, per esempio, il logaritmo del numero 201, davanti il quale non si trova, nella colonna o, che le quattro cifre 3196, si scriverebbe alla sinistra di queste quattro cifre il numero isolato 30, che s' incontra il primo risalendo la colonna; la parte decimale del logaritmo cercato è mediante ciò 303196, e si avrebbe, aggiungendo la caratteristica,

$$\text{Log } 201 = 2,303196.$$

25. La colonna o non dà solamente i logaritmi dei numeri da 100 fino a 999, ma ancora quelli di tutti i numeri che sono multipli o summultipli decimali di questi primi; poichè si sa che i numeri decupli gli uni degli altri hanno dei logaritmi, i quali non differiscono che per le loro caratteristiche. Il numero 303196, che abbiamo trovato per le parti decimali del logaritmo di 201, è dunque nel medesimo tempo la parte decimale dei logaritmi dei numeri 2,01, 20,1, 201, 2010, 20100, 201000, ec., vale a dire che si ha

$$\begin{aligned}
\text{Log } 2,01 &= 0,303196\\
\text{Log } 20,1 &= 1,303196\\
\text{Log } 201 &= 2,303196\\
\text{Log } 2010 &= 3,303196\\
\text{Log } 20100 &= 4,303196\\
\text{ec.} &= \text{ec.}
\end{aligned}$$

e così ugualmente per tutti gli altri.

È mediante questa proprietà dei logaritmi volgari che abbiamo creduto non dover dare a parte i logaritmi dei numeri da 1 fino a 99, i quali si trovano compresi tra quelli dei numeri da 100 fino a 999. Così per avere il logaritmo di 8 o quello di 80, si cercherà quello di 800, e siccome la parte decimale di quest' ultimo, data dalla tavola è 903090, si avrà

$$\text{Log } 8 = 0,903090; \quad \text{Log } 80 = 1,903090,$$

In generale tutte le volte che il numero proposto sarà più piccolo di 100, gli si aggiungeranno uno o due zeri a destra, in modo che esso diventi uno di quelli compresi nella colonna N; poi si darà una caratteristica conveniente alla parte decimale del logaritmo che si troverà nella colonna o. Proponiamoci per esempio di trovare il logaritmo di 19; cercheremo quello di 190, che ha per parte

decimale nella colonna *zero*, 278754, ed avremo

$$\text{Log } 19 = 1,278754.$$

26. Si vede da quello che precede, che la colonna o può considerarsi come quella che dà immediatamente i logaritmi dei numeri, 1000, 1010, 1020, 1030, ec. Per avere i logaritmi dei numeri intermediari 1001, 1002, 1003, ec., 1011, 1012, 1013, ec.; 1021, 1022, 1023, ec., bisogna ricorrere alle colonne indicate 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9; queste offrono i quattro ultimi decimali dei logaritmi dei numeri terminati da queste medesime cifre 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, vale a dire che la colonna 1 corrisponde ai numeri terminati da 1, tali come 1001, 1011, 1021, 1031, 1041, ec., ec., che la colonna 2 corrisponde ai numeri terminati da 2, tali come 1002, 1012, 1022, 1032, 1042, ec., ec., e così dell'altre. Si dimandi, per esempio il logaritmo di 2475; si cercherà nella colonna N il numero 247, poi si prenderà nella linea delle cifre situate davanti questo numero le quattro cifre comprese nella colonna 5, cioè 3575: si scriverà alla loro sinistra il numero 39, che si trova isolato nella colonna o risalendo, e si avrà, aggiungendo la caratteristica 3, perchè 2475 è compreso tra 1000 e 9999.

$$\text{Log } 2475 = 3,393575$$

La tavola presenta dunque immediatamente i logaritmi di tutti i numeri da 1 fino a 10000, e ciò ben compreso, è facile risolvere le due seguenti questioni, alle quali possiamo riportare tutto ciò che riguarda il suo uso.

27. Problema I. *Un numero qualunque essendo dato trovare il suo logaritmo.*

Se il numero non ha che quattro cifre significative, si cercheranno le tre prime nella colonna N, poi si seguerà con l'occhio la linea sopra la quale si saranno trovate, fino a tanto che si sia nella colonna che porta per indice la quarta cifra. Le quattro cifre o figure che sono in quest'ultima colonna, e nell'allineamento delle tre prime cifre del numero dato, sono i quattro ultimi decimali del logaritmo cercato. Quanto alle due prime, si troveranno nella colonna o, ove esse sono isolate mediante un punto, tanto immediatamente davanti le tre prime cifre del numero, quanto risalendo fino al primo gruppo isolato delle due cifre che s' incontrano al di sopra del loro allineamento. Sia, per esempio, il numero 7568 di cui si domanda il logaritmo; si cercherà 756 nella colonna N, e, percorrendo la linea del numero 756, ci arresteremo alla colonna segnata 8, nella quale si troverà 8981; queste cifre sono i quattro ultimi decimali del logaritmo di 7568. Per avere le due prime, esamineremo se nella colonna o nell'allineamento di 756, si trovano due cifre isolate dall'altre mediante un punto, e siccome non se ne incontrano, si risalirà fino alle prime cifre isolate, le quali sono 87; la parte decimale del logaritmo è dunque 878981, e non rimane da dargli che una conveniente caratteristica. Nel caso del numero intern 7568, questa caratteristica sarebbe 3; essa sarebbe 2 se il numero fosse 756,8; 1, se esso fosse 75,68; e finalmente o, se esso fosse 7,568. Inseguito esamineremo quali caratteristiche si debbono dare ai numeri interamente frazionari o più piccoli dell'unità, tali come 0,7568, 0,07568, ec.

28. Se il numero proposto ha meno di tre cifre significative, si troverà il suo logaritmo per mezzo della sola colonna o, come l'abbiamo indicato sopra.

29. Qualunque sia il numero degli zeri che terminano un numero dato, purchè esso non abbia più di quattro cifre significative, si troverà dunque immediatamente il suo logaritmo nella tavola. Per esempio, se invece del numero 7568 si trattasse del numero 756800, la parte decimale del logaritmo sarebbe

sempre stata 878981; solamente si sarebbe preso 5 per caratteristica, perchè 756800 ha sei cifre intere.

30. Quando il numero ha più di quattro cifre significative, la tavola non presenta immediatamente il suo logaritmo, ma possiamo trovarlo col calcolo seguente: sia 255686 il numero proposto; separiamo con una virgola le quattro prime cifre a sinistra, e consideriamo per un momento le cifre rimaste a destra come decimali, si tratterà allora di trovare il logaritmo di 2556,86. Cominciamo dal cercare il logaritmo di 2556, e prendiamo nel medesimo tempo quello del numero immediatamente più grande 2457; troveremo operando come abbiamo detto, e senza tener conto delle caratteristiche,

Log 2557 407731

Log 2556 407561

Differenza = 170

Ora, diremo, se la differenza di un' unità tra i numeri porta una differenza di 170 tra i logaritmi, qual sarà la differenza di questi ultimi quando quella dei numeri non sarà che 0,86, cioè stabiliremo la proporzione

$$1 : 170 = 0,86 : x;$$

donde

$$x = 170 \times 0,86 = 146,2.$$

Così, aggiungendo 146 al logaritmo di 2556, otterremo per la parte decimale del logaritmo di 2556,86, ovvero, ciò che è la medesima cosa, del logaritmo di 255686, il numero 407707, ed avremo per conseguenza

Log 255686 = 5,407707.

Proponiamoci per secondo esempio il numero 4,856359. Avendolo scritto come segue: 4856,359, cercheremo nella tavola i logaritmi di 4857 e di 4856, il che ci darà

Log 4857 686368

Log 4856 686279

Differenza = 98

Moltiplicando la differenza 89 per 0,359, avremo

$$89 \times 0,359 = 31,951;$$

questa differenza 31,951, essendo più vicina a 32 che a 31, aggiungeremo 32 al logaritmo di 4856, ed avremo, sempre astrazione fatta dalle caratteristiche,

Log 4856,359 . . . . . 686311.

Ora, il numero proposto essendo 4,856359, la caratteristica del suo logaritmo è 0, così

Log 4,856359 = 0,686311.

Nelle grandi tavole dei logaritmi, le differenze formano un' ultima colonna che non avremmo potuto introdurre nella nostra senza troppo complicarla; ma basta un poco di abitudine per prendere queste differenze con l'occhio ed evitare la pena di scrivere i due logaritmi che comprendono il logaritmo cercato.

31. Quando il numero dato è una frazione, si ottiene il suo logaritmo, sottraendo il logaritmo del suo denominatore da quello del suo numeratore. Questa sottrazione non potendo effettuarsi in tutti i casi in cui la frazione è più piccola dell'unità, bisogna allora eseguire l'operazione invarsa, vale a dire sottrarre il logaritmo del numeratore da quello del denominatore e dare il segno — al resultamento; si ottiene così un logaritmo interamente *negativo*, di cui non bisognerà perdera di vista la significazione, in tutti i calcoli iu cui si può farlo entrare. Si abbia da trovare, per esempio, il logaritmo di $\frac{8}{13}$, si avrà

$$\begin{array}{r} \text{Log } 13 = 1{,}113943 \\ \text{Log } 8 = 0{,}903090 \\ \hline \text{Differenza} = 0{,}210853. \end{array}$$

Dunque avremo

$$\text{Log } \frac{8}{13} = -0{,}210853.$$

32. Possiamo ancora esprimere in due altre maniere i logaritmi delle frazioni più piccole dell'unità, dando una significazione particolare alla caratteristica. Per quest'effetto, si aggiunge alla caratteristica del logaritmo del numaratore abbastanza unità perchè la sottrazione sia possibile, ordinariamente 10; ne resulta che il logaritmo della frazione è un numero interamente positivo, ma di cui la caratteristica è più grande che essa non dovrebbe essere; dimodochè dopo avere impiegato questo logaritmo nel calcoli qualunque, bisogna tener conto, per il resultamento finale, dell'eccedente della caratteristica. Nel caso della frazione $\frac{8}{13}$, aggiungeremo 10 alla caratteristica del logaritmo di 8, e la sottraziona darebbe

$$\begin{array}{r} 10{,}903090 \\ 1{,}113943 \\ \hline \text{Differenza} = 9{,}789147; \end{array}$$

donde avremmo

$$\text{Log } \frac{8}{13} = 9 \cdot 789147.$$

Il punto situato dopo la caratteristica 9, invece di una virgula, indica cha quest'ultima caratteristica è troppo grande di dieci unità.

Se si vuole sottrarre immediatamente la dieci unità di cui la caratteristica 9 è troppo grande, resta una caretteristica negativa -1, e la parte decimale del logaritmo rimane positiva: si esprime questa circostanza col segno — situato *al di sopra* della caratteristica, come segue:

$$\text{Log } \frac{8}{13} = \overline{1}{,}789147.$$

I tre logaritmi

$$-0{,}210753,\quad 9 \cdot 789147,\quad \overline{1}{,}789147,$$

appartengono dunque alla medesima frazione $\frac{8}{13}$, ed è soltanto la facilità che

può resultarne nel seguito dei calcoli, che si deve consultare per scegliere tra loro.

Se la frazione proposta fosse decimale, si potrebbe operare nella stessa maniera, ristabilendo il suo denominatore. Sia, per esempio, 0,086 questa frazione è la medesima cosa di $\frac{86}{1000}$, e, quindi

$$\text{Log } 1000 = 3,000000$$
$$\text{Log } \ \ 86 = 1,934498$$
$$\text{Differenza} = 1,065502.$$

Così si ottiene

$$\text{Log } 0,086 = -1,065502.$$

Se vogliamo il logaritmo sotto una forma positiva, si ottiene, aggiungendo 10 alla caratteristica del logaritmo di 86,

$$11,934498$$
$$3,000000$$
$$\text{Differenza} = 8,934498;$$

donde si deduce

$$\text{Log } 0,086 = 8\ 934498, \quad e \quad \text{Log } 0,086 = \bar{2},934498.$$

Possiamo giungere immediatamente a quest'ultimi resultamenti mediante un'osservazione semplicissima: la parte decimale del logaritmo di un numero di cui le sole cifre significative sono 86, essendo 934498, se questo numero è 86, il suo logaritmo è 1,934498; se esso è solamente 8,6, il suo logaritmo diventa 0,934498. e siccome la sua caratteristica deve sempre diminuire di un' unità a misura che il numero diventa dieci volte più piccolo, è evidente che si ha, la parte decimale del logaritmo rimanendo sempre positiva,

$$\text{Log } 0,86 = \bar{1},934498$$
$$\text{Log } 0,086 = \bar{2},934498$$
$$\text{Log } 0,0086 = \bar{3},934498$$
$$\text{ec.} = \text{ec.}$$

Così, per trovare il logaritmo di una frazione decimale senza interi, bisogna fare astrazione dagli zeri che precedono, a sinistra, le cifre significative; cercare nella tavola la parte decimale del logaritmo, come se le cifre significative esprimessero degl' interi, e dare per *caratteristica negativa* un numero di unità uguale a quello degli zeri tolti. In questo modo si vede sul momento che il logaritmo di 0,000086 è $\bar{5},934498$. Se si vuole avere un logaritmo positivo, si sostituisce alla caratteristica negativa il suo *complemento aritmetico* o la sua differenza con 10, astrazione fatta dal suo segno, e bisogna allora rammentarsi che la nuova caratteristica è troppo grande di dieci unità.

33. PROBLEMA II. *Un logaritmo essendo dato, trovare il numero a cui esso appartiene.*

Lasciando in principio da parte la caratteristica, si cercherà nella colonna o, nel posto dei gruppi di due cifre, le due prime figure della parte decimale del logaritmo; avendole trovate, si cercheranno le quattro ultime figure del logaritmo tra i numeri di quattro cifre che sono in questa medesima colonna o, a partire da quelli che si trovano in faccia delle due prime figure e discendendo, se si trovano queste quattro ultime figure, il numero situato sul loro allineamento nella colonna N conterrà le cifre significative del numero domandato, e non rimarrà che da completarlo con degli o, o dividerlo mediante una virgola, secondo la grandezza della caratteristica.

Si abbia, per esempio, da trovare il numero il cui logaritmo è 2,195900; avendo trovato le due prime figure 19 nelle cifre isolate della colonna o, si scenderà fino a tanto che si sia incontrato in questa medesima colonna le quattro ultime 5900, e osservando allora che queste sono situate nell'allineamento del numero 157, se ne concluderà che le cifre significative del numero cercato sono 157. Ora la caratteristica essendo 2, il numero cercato deve avere tre figure agli interi: dunque questo numero è 157. Se la caratteristica fosse 3, il numero sarebbe dieci volte più grande, cioè 1570; come sarebbe 15700 se la caratteristica fosse 4, e così in seguito. Per la medesima ragione, il numero non sarebbe che 15,7 ovvero, 1,57 se la caratteristica fosse 1 ovvero o.

24. Quando non si trovano nella colonna o le quattro ultime figure del logaritmo, bisogna arrestarsi a quelle le quali se ne avvicinano il più, *in meno*, quindi seguitare il loro allineamento nell'altre colonne 1, 2, 3, ec., per riconoscere se vi si scoprono queste quattro figure. Nel caso in cui non si trovassero, il numero cercato non avrebbe che quattro cifre significative, di cui le tre prime sono nella colonna N, sul medesimo allineamento, e di cui l'ultima, a destra, è data dall'indice della colonna nella quale si è riscontrato le quattro ultime figure del logaritmo. Si domandi, per esempio, il numero il cui logaritmo è 0,937367? Dopo aver trovato nella colonna o le due prime figure 93, si comincerà da cercare in questa colonna le quattro ultime 7367, e siccome il numero più vicino *in meno* che ci si troverà è 7016, si seguirà l'allineamento di quest'ultime nell'altre colonne, e si troverà 7367 nella colonna segnata 8; osservando che sopra questo allineamento risponde il numero 865 nella colonna N, si scriverà 8 alla destra di questo numero e si avrà 8658; questo è il numero che si trattava di trovare. Osservando che esso non deve avere che una sola cifra agli interi, perchè la caratteristica è o, si scriverà, 8,658.

35. Se le quattro ultime figure del logaritmo non si trovano nè nella colonna o nè nell'altre colonne 1, 2, 3, ec., il numero domandato non è compreso nei limiti della tavola, e immediatamente non possiamo trovare che le sue quattro prime cifre significative, arrestandosi al logaritmo che si avvicina *in meno* al logaritmo proposto. Sia per esempio, il logaritmo 0,497150; è facile riconoscere che questo logaritmo è tra i logaritmi 0,497058 e 0,497206, i cui numeri corrispondenti dati dalle tavole sono 3141, e 3142, ovvero 3,141 e 3,142 avendo riguardo alla caratteristiche. Sappiamo così sul momento che il numero domandato è maggiore di 3,141 e minore di 3,142, dimodochè possiamo prendere l'uno o l'altro di questi numeri pel suo valore approssimato a meno di un millesimo di unità presso a poco. Quando vogliamo avere un'approssimazione maggiore, ovvero che si domandi sei o sette cifre significative, bisogna eseguire sopra le differenze dei logaritmi un'operazione inversa da quella che abbiamo indicato sopra (n° 30) e a quest'effetto bisogna cominciare dal procurarsi la differenza tra il logaritmo proposto e il logaritmo della tavola che si avvicina il più *in meno*, come pure la differenza di quest'ultimo con quello che lo se-

gue immediatamente nella tavola. Avremo sempre, astrazione fatta dalle caratteristiche.

Log proposto 497150
Log 3141. 497068

Differenza = 82

Log 3142. 497206
Log 3141. 497068

Differenza = 138

Ciò fatto, si deve dire: se una differenza di 138 tra i logaritmi dà un' unità di differenza tra i numeri, che darà la differenza 82? si porrà dunque la proporzione

$$138 : 1 = 82 : x;$$

donde arrestandoci alla terza decimale,

$$x = \frac{82}{138} = 0,594.$$

Così, il logaritmo proposto 497150 è quello del numero 3141,594, o a motivo della caratteristica 0, quello del numero 3,141594.

È inutile di proseguire la divisione delle differenze più lungi della terza decimale, perchè, con logaritmi a sei decimali, non possiamo ottenere, nei casi i più favorevoli, che sette cifre significative esatte; generalmenta, dovremo limitarsi ai due primi decimali, e per conseguenza a sei cifre significative.

36. Se la caratteristica del logaritmo proposto fosse negativa, si procederebbe nella medesima maniera nella ricerca delle sei o sette cifre significative del numero, poi si scriverebbe alla sinistra di queste cifre tanti zeri quante unità ha la caratteristica, e si metterebbe la virgola dopo il primo zero. Nel caso, per esempio, in cui il logaritmo precedente fosse stato $\overline{4},497150$ invece di 0,397150, si sarebbero scritti quattro zeri alla sinistra delle sette cifre significative trovate 3141594, e dopo aver posto la virgola alla destra del primo, si sarebbe avuto la frazione 0,0003141594 per il numero il cui logaritmo è $\overline{4},497150$. Il caso di una caratteristica complementaria si riporta sempre a quello di una caratteristica negativa, e non presenta per conseguenza veruna difficoltà.

37. Finalmente, se il logaritmo proposto fosse interamente negativo, si cercherebbe nella tavola, come se esso fosse positivo, e dopo aver trovato il numero corrispondente, si farebbe di questo numero il denominatore di una frazione, alla quale si darebbe l' unità per numeratore. Si abbia da trovare il numero del logaritmo —0,210853. Cercando nella tavola il logaritmo 0,210853, si trova che esso corrisponde al numero 1,625, e se ne conclude che la frazione cercata è $\frac{1}{1,625}$, ovvero $\frac{1000}{1625}$, la quale si riduce a $\frac{8}{13}$.

Per persuadersi di questa regola, bisogna osservare che indicando con x il numero il cui logaritmo è $-m$, si ha

$$10^{-m} = x.$$

Ma

$$10^{-m} = \frac{1}{10^m};$$

così si ottiene

$$x = \frac{1}{10^m}.$$

Ora, se z è il numero il cui logaritmo è $+m$, si ha ancora

$$10^m = z;$$

dunque

$$x = \frac{1}{z}.$$

Quando vogliamo ottenere in cifre decimali la frazione corrispondente ad un logaritmo negativo, bisogna sottrarre questo logaritmo da quello dell' unità, e siccome quest' ultimo è zero, si aumenta di 10 la sua caratteristica, il che conduce ad un logaritmo tutto positivo, ma la cui caratteristica è *complementaria*, vale a dire troppo grande di dieci unità (n.° 32). Il logaritmo che abbiamo considerato $-0,210853$, trattato in questo modo, dà

$$\begin{array}{r} 10,000000 \\ 0,210853 \\ \hline 9.789147 \end{array}$$

ovvero ancora $\overline{1},789147$, ponendo invece della caratteristica complementaria una caratteristica negativa. Quest' ultimo logaritmo cercato (n.° 36) nella tavola somministra il numero 0,615385; così

$$\frac{8}{13} = 0,615385;$$

il che è esatto, a meno di un' unità presso a poco sull' ultima decimale.

Si vede che tutto si riduce a prendere il complemento aritmetico (*Vedi* Complemento) del logaritmo proposto, e a considerare la caratteristica del resultamento come una caratteristica *complementaria* (n.° 32). Del rimanente, questa trasformazione è legata con le proprietà dei logaritmi esposte antecedentemente. Quanto all' uso dei logaritmi nei calcoli, vi sono pochi articoli di questo dizionario ove non se ne trovino degli esempj, il che ci dispensa di darne in questo punto dei particolari, il nostro oggetto essendo stato di spiegare la composizione e l' uso della nostra tavola.

Se si avesse bisogno di conoscere il logaritmo naturale o iperbolico di un numero dato, bisognerebbe moltiplicare il logaritmo volgare di questo numero, trovato nella tavola, per il fattore costante 2,302585093, il prodotto, ridotto a sei decimali, sarebbe il logaritmo naturale domandato. Reciprocamente, per trasformare un logaritmo naturale dato in logaritmo volgare, si dividerebbe per il medesimo fattore, ovvero, ciò che equivale al medesimo, si moltiplicherebbe per il modulo 0,4342944482 (*Vedi* n.° 7).

Prenderemo quest' occasione per far conoscere una generazione per mezzo delle fattorielle, che crediamo nuova, della base dei logaritmi naturali, di questo numero e, tanto degno di osservazione per la sua generazione teorica primitiva

interamente ideale,

$$e=\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}.$$

Indicando con π, come è l' uso, il rapporto del diametro alla circonferenza, ovvero il numero 3,1415926 . . . . . abbiamo

$$e=\frac{\left(1-\frac{\sqrt{-1}}{\pi}\right)^{\frac{\sqrt{-1}}{\pi}|1}}{1^{\frac{\sqrt{-1}}{\pi}|1}}+\frac{\left(-1\,\frac{2\sqrt{-1}}{\pi}\right)^{\frac{\sqrt{-1}}{\pi}|2}}{1^{\frac{\sqrt{-1}}{\pi}|2}}$$

Lo sviluppo di quest' espressione, mediante il binomio delle fattorielle, dà la serie singolare

$$e=A_0+A_1\cdot\frac{1}{\pi^2}+A_2\,\frac{(1+\pi^2)}{\pi^4}$$

$$+A_3\,\frac{(1+\pi^2)(1+4\pi^2)}{\pi^6}$$

$$+A_4\,\frac{(1+ -^{2})(1+4\pi^2)(1+9\pi^2)}{\pi^8}$$

$$=A_5\,\frac{(1+\pi^2)(1+4\pi^2)(1+9\pi^2)(1+16\pi^2)}{\pi^{10}}$$

$$+\text{ ec.}$$

nella quale i coefficienti numerici A_0, A_1, A_2, ec., sono:

$$A_0=2,\quad A_1=3,\quad A_2=\frac{11}{12},\quad A_3=\frac{7}{60},\ \text{ec.}$$

In generale,

$$A_{\mu}=\frac{1^{\mu|2}+2^{\mu|2}}{1^{\mu|1}\cdot 1^{\mu|1}\cdot 1^{\mu|2}}.$$

TAVOLA DEI LOGARITMI

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
100	00. 0000	0434	0868	1301	1734	2166	2598	3029	3461	3891
01	4321	4751	5181	5609	6038	6466	6894	7321	7748	8174
02	8600	9026	9451	9876						
	01.				0300	0724	1147	1570	1993	2415
03	2837	3259	3680	4100	4521	4940	5360	5779	6197	6616
04	7033	7451	7868	8284	8701	9116	9532	9947		
	02.								0361	0775
105	1189	1603	2016	2428	2841	3252	3664	4075	4486	4896
06	5306	5715	6124	6533	6942	7350	7757	8164	8571	8978
07	9384	9789								
	03.		0195	0800	1004	1408	1812	2216	2619	3021
08	3424	3826	4227	4628	5029	5430	5830	6230	6629	7028
09	7427	7825	8223	8620	9017	9414	9811			
	04.							0207	0602	0998
110	1393	1787	2182	2576	2969	3362	3755	4148	4540	4932
11	5323	5714	6105	6495	6885	7275	7664	8053	8442	8830
12	9218	9606	9993							
	05.			0380	0766	1153	1538	1924	2309	2694
13	3078	3463	3846	4230	4613	4996	5378	5760	6142	6524
14	6905	7286	7666	8046	8426	8805	9185	9563	9942	
	06.									0320
115	0698	1075	1452	1829	2206	2582	2958	3333	3709	4083
16	4458	4832	5206	5580	5953	6326	6699	7071	7443	7815
17	8186	8557	8928	9298	9868					
	07.					0038	0407	0776	1145	1514
18	1882	2250	2617	2985	3352	3718	4085	4451	4816	5182
19	5547	5912	6276	6640	7004	7368	7731	8094	8457	8819
120	9181	9543	9904							
	08.			0266	0626	0987	1347	1707	2067	2426
21	2785	3144	3503	3861	4219	4576	4934	5291	5647	6004
22	6360	6716	7071	7426	7781	8136	8490	8845	9198	9552
23	9905									
	09.	0258	0611	0963	1315	1667	2018	2370	2721	3071
24	3422	3772	4122	4471	4820	5169	5518	5866	6215	6562
125	6910	7257	7604	7951	8298	8644	8990	9335	9681	
	10.									0026
26	0371	0715	1059	1403	1747	2091	2434	2777	3119	3462
27	3804	4146	4487	4828	5169	5510	5851	6191	6531	6871
28	7210	7549	7888	8227	8505	8903	9241	9579	9916	
	11.									0253
29	0590	0926	1263	1599	1934	2270	2605	2940	3275	3609
130	3943	4277	4611	4944	5278	5611	5943	6276	6608	6940
31	7271	7603	7934	8285	8595	8926	9256	9586	9915	
	12.									0245
32	0574	0903	1231	1560	1888	2116	2544	2871	3198	3525
33	3852	4178	4504	4830	5156	5481	5806	6131	6456	6781
34	7105	7429	7753	8076	8399	8722	9045	9368	9690	
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

SEGUE LA TAVOLA DEI LOGARITMI

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
134	13.									0012
135	0334	0655	0977	1298	1619	1939	2260	2580	2900	3219
36	3539	3858	4177	4496	4814	5133	5451	5768	6086	6403
37	6721	7037	7354	7670	7987	8303	8618	8934	9249	9564
38	9879									
	14.	0194	0508	0822	1136	1450	1763	2076	2389	2702
39	3015	3327	3639	3951	4263	4574	4885	5196	5507	5818
140	6128	6438	6748	7058	7367	7676	7985	8294	8603	8911
41	9219	9527	9835							
	15.			0142	0449	0756	1063	1370	1676	1982
42	2288	2594	2900	3205	3510	3815	4120	4424	4728	5032
43	5336	5640	5943	6246	6549	6852	7154	7457	7759	8061
44	8362	8664	8965	9266	9567	9868				
	16.						0168	0468	0769	1068
145	1368	1667	1967	2266	2564	2863	3161	3460	3758	4055
46	4353	4650	4947	5244	5541	5838	6134	6430	6726	7022
47	7317	7613	7908	8203	8497	8792	9086	9381	9674	9968
48	17. 0262	0555	0848	1141	1434	1726	2019	2311	2603	2895
49	3186	3478	3769	4060	4351	4641	4932	5222	5512	5802
150	6091	6381	6670	6960	7248	7536	7825	8113	8401	8689
51	8977	9264	9552	9839						
	18.				0126	0413	0699	0986	1272	1558
52	1844	2129	2455	2700	2985	3270	3554	3839	4123	4407
53	4691	4975	5259	5542	5825	6108	6391	6674	6956	7239
54	7521	7803	8084	8366	8647	8928	9209	9490	9771	
	19.									0051
155	0332	0612	0892	1171	1451	1630	2010	2289	2567	2846
56	3125	3403	3681	3959	4237	4514	4792	5069	5346	5623
57	5900	6176	6452	6729	7005	7281	7556	7832	8107	8382
58	8657	8932	9206	9481	9755					
	20.					0029	0303	0577	0850	1124
59	1397	1670	1943	2216	2488	2761	3033	3305	3577	3848
160	4120	4391	4662	4933	5204	5475	5745	6016	6286	6556
61	6826	7095	7365	7634	7903	8172	8441	8710	8978	9247
62	9515	9783								
	21.		0051	0318	0586	0853	1120	1388	1654	1921
63	2188	2454	2720	2986	3252	3518	3783	4049	4314	4579
64	4844	5109	5373	5638	5902	6166	6430	6694	6957	7221
165	7484	7747	8010	8273	8535	8798	9060	9322	9584	9846
66	22. 0108	0370	0631	0892	1153	1414	1675	1936	2196	2456
67	2716	2976	3236	3496	3755	4015	4274	4533	4792	5051
68	5309	5568	5826	6084	6342	6600	6858	7115	7372	7630
69	7887	8144	8400	8657	8913	9170	9426	9682	9938	
	23.									0193
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

SEGUE LA TAVOLA DEI LOGARITMI

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
170	23. 0449	0704	0960	1215	1470	1724	1980	2233	2488	2742
71	2996	3250	3504	3757	4011	4264	4517	4770	5023	5276
72	5528	5781	6033	6285	6537	6789	7041	7292	7544	7795
73	8046	8297	8548	8799	9049	9299	9550	9800		
	24.								0050	0300
74	0549	0799	1048	1297	1546	1795	2044	2293	2541	2790
175	3038	3286	3534	3782	4030	4277	4524	4772	5019	5266
76	5513	5760	6006	6252	6499	6745	6991	7236	7482	7729
77	7973	8219	8464	8709	8954	9198	9443	9687	9932	
	25.									0176
78	0420	0664	0908	1151	1395	1638	1881	2125	2367	2610
79	2853	3096	3338	3580	3822	4064	4306	4548	4790	5031
180	5272	5755	5755	5996	6236	6477	6718	6958	7198	7439
81	7679	7918	8158	8398	8637	8877	9116	9355	9594	9833
82	26. 0071	0310	0548	0787	1025	1263	1501	1738	1976	2214
83	2451	2688	2925	3162	3399	3636	3873	4109	4345	4582
84	4818	5054	5290	5525	5761	5996	6231	6467	6702	6937
185	7172	7406	7641	7875	8110	8344	8578	8811	9046	9279
86	9513	9746	9980							
	27.			0213	0446	0679	0912	1144	1377	1609
87	1842	2074	2306	2538	2770	3001	3233	3464	3696	3927
88	4158	4389	4620	4850	5081	5311	5542	5772	6002	6232
89	6462	6691	6921	7151	7380	7609	7838	8067	8296	8525
190	8754	8982	9210	9439	9667	9895				
	28.						0123	0351	0578	0806
91	1033	1261	1488	1715	1942	2169	2395	2622	2849	3075
92	3301	3527	3753	3979	4205	4431	4656	4882	5107	5332
93	5557	5782	6007	6232	6456	6681	6905	7130	7354	7578
94	7802	8025	8249	8473	8696	8920	9143	9366	9589	9812
195	29. 0035	0257	0480	0702	0925	1147	1369	1591	1813	2034
96	2256	2478	2699	2920	3141	3363	3583	3804	4025	4246
97	4466	4687	4907	5127	5347	5567	5787	6007	6226	6446
98	6665	6884	7104	7323	7542	7700	7979	8198	8416	8635
99	8853	9071	9289	9507	9725	9943				
	30.						0160	0378	0595	0813
200	1030	1247	1464	1681	1898	2114	2331	2547	2764	2980
01	3196	3412	3628	3844	4059	4275	4490	4706	4921	5136
02	5351	5566	5781	5996	6210	6425	6639	6854	7068	7282
03	7496	7710	7924	8137	8351	8564	8778	8991	9204	9417
04	9630	9843								
	31.		0056	0268	0481	0693	0906	1118	1330	1542
205	1754	1966	2177	2389	2600	2812	3023	3234	3445	3656
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

SEGUE LA TAVOLA DEI LOGARITMI

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
206	31. 3867	4078	4289	4499	4710	4920	5130	5340	5550	5760
07	5970	6180	6390	6599	6809	7018	7227	7436	7645	7854
08	8063	8272	8481	8689	8898	9106	9314	9522	9730	9938
09	32. 0146	0354	0562	0769	0977	1184	1391	1598	1805	2012
210	2219	2426	2633	2839	3046	3252	3458	3664	3871	4077
11	4282	4488	4694	4899	5105	5310	5516	5721	5926	6131
12	6336	6541	6745	6950	7154	7359	7563	7767	7972	8176
13	8380	8583	8787	8991	9194	9398	9601	9804		
	33.								0008	0211
14	0414	0617	0819	1022	1225	1427	1630	1832	2034	2236
215	2430	2640	2842	3044	3246	3447	3649	3850	4051	4253
16	4454	4655	4856	5056	5257	5458	5658	5859	6059	6260
17	6460	6660	6860	7060	7259	7459	7659	7858	8058	8257
18	8456	8656	8855	9054	9253	9451	9650	9849		
	34.								0047	0246
19	0444	0642	0840	1039	1237	1434	1632	1830	2028	2225
220	2423	2620	2817	3014	3212	3409	3605	3802	3999	4196
21	4392	4589	4785	4981	5178	5374	5570	5766	5961	6157
22	6353	6549	6744	6939	7135	7330	7525	7720	7915	8110
23	8305	8500	8694	8889	9083	9277	9472	9666	9860	
	35.									0054
24	0248	0442	0636	0829	1023	1216	1410	1603	1796	1989
225	2182	2375	2568	2761	2954	3146	3339	3532	3724	3916
26	4108	4304	4493	4685	4876	5068	5260	5551	5643	5834
27	6026	6217	6408	6599	6790	6981	7172	7363	7554	7744
28	7935	8125	8316	8506	8696	8886	9076	9266	9456	9646
29	9835									
	36.	0025	0215	0404	0593	0783	0972	1161	1350	1539
230	1728	1917	2105	2294	2482	2671	2859	3048	3236	3424
31	3612	3800	3988	4176	4363	4551	4739	4926	5113	5301
32	5488	5675	5862	6049	6236	6423	6610	6796	6983	7169
33	7356	7542	7728	7915	8101	8287	8473	8659	8844	9030
34	9216	9401	9587	9772	9958					
	37.					0143	0328	0513	0698	0883
235	1068	1253	1437	1622	1806	1991	2175	2360	2544	2728
36	2912	3096	3280	3464	3647	3831	4015	4198	4382	4565
37	4748	4932	5115	5298	5481	5664	5846	6029	6212	6394
38	6577	6759	6942	7124	7306	7488	7670	7852	8034	8216
39	8398	8580	8761	8943	9124	9305	9487	9668	9849	
	38.									0030
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

SEGUITO DELLA TAVOLA DEI LOGARITMI

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
240	.38. 0211	0392	0573	0754	0934	1115	1296	1476	1656	1837
41	2017	2197	2377	2557	2732	2917	3097	3277	3457	3636
42	3815	3995	4174	4353	4533	4712	4891	5070	5249	5427
43	5606	5785	5964	6142	6321	6499	6677	6855	7034	7212
44	7390	7568	7746	7923	8101	8279	8456	8634	8811	8989
245	9166	9343	9520	9697	9875					
	39.					0051	0228	0405	0582	0758
46	0935	1112	1288	1464	1641	1817	1993	2169	2345	2521
47	2697	2873	3048	3224	3400	3575	3751	3926	4101	4276
48	4452	4627	4802	4977	5152	5326	5501	5676	5850	6025
49	6199	6374	6548	6722	6896	7070	7245	7418	7592	7766
250	7940	8114	8287	8461	8634	8808	8981	9154	9327	9504
51	9674	9847								
	40.		0020	0192	0365	0538	0711	0883	1056	1228
52	1400	1573	1745	1917	2089	2261	2433	2605	2777	2949
53	3120	3292	3464	3635	3807	3978	4149	4320	4492	4663
54	4834	5005	5175	5346	5517	5688	5858	6029	6199	6370
255	6540	6710	6881	7051	7221	7391	7561	7731	7900	8070
56	8240	8410	8579	8749	8918	9087	9257	9426	9595	9764
57	9933									
	41.	0102	0271	0440	0608	0777	0946	1114	1283	1451
58	1620	1788	1956	2124	2294	2460	2628	2796	2964	3132
59	3300	3467	3635	3802	3970	4137	4305	4472	4639	4806
260	4973	5140	5307	5474	5641	5808	5974	6141	6308	6474
61	6640	6807	6973	7139	7306	7472	7638	7804	7970	8135
62	8301	8467	8633	8798	8964	9129	9295	9460	9625	9791
63	9956									
	42.	0121	0286	0451	0616	0781	0945	1110	1275	1439
64	1604	1768	1933	2097	2261	2426	2590	2754	2918	3082
265	3246	3410	3573	3737	3901	4064	4228	4392	4555	4718
66	4882	5045	5208	5371	5534	5697	5860	6023	6186	6349
67	6511	6674	6836	6999	7161	7324	7486	7648	7811	7973
68	8135	8297	8459	8621	8782	8944	9106	9268	9429	9591
69	9752	9914								
	43.		0075	0236	0398	0559	0720	0881	1042	1203
270	1364	1525	1685	1846	2007	2167	2328	2488	3649	2809
71	2969	3129	3290	3450	3610	3770	3930	4090	4249	4409
72	4569	4728	4888	5048	5207	5366	5526	5685	5844	6003
73	6163	6322	6481	6640	6798	6957	7116	7275	7433	7592
74	7751	7909	8067	8226	8384	8542	8700	8859	9017	9175
275	9333	9491	9648	9806	9964					
	44.					0122	0279	0437	0594	0752
76	0909	1066	1224	1381	1538	1695	1852	2009	2166	2323
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

SEGUE LA TAVOLA DEI LOGARITMI

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
277	44. 2480	2636	2793	2950	3106	3263	3419	3576	3732	3888
78	4045	4201	4357	4513	4669	4825	4981	5137	5293	5448
79	5604	5760	5915	6071	6226	6382	6537	6692	6848	7003
280	7158	7313	7468	7623	7778	7933	8088	8242	8397	8552
81	8706	8861	9015	9170	9324	9478	9633	9787	9941	
	45.									0095
82	0249	0403	0557	0711	0865	1018	1172	1326	1479	1633
83	1786	1940	2093	2247	2400	2553	2706	2859	3012	3165
84	3318	3471	3624	3777	3930	4082	4235	4387	4540	4692
285	4845	4997	5149	5302	5454	5606	5758	5910	6062	6214
86	6366	6518	6670	6821	6973	7125	7276	7428	7579	7730
87	7882	8033	8184	8336	8487	8638	8789	8940	9091	9242
88	9392	9543	9694	9845	9995					
	46.					0146	0296	0447	0597	0747
89	0898	1048	1198	1348	1498	1649	1799	1948	2098	2248
290	2398	2548	2697	2847	2997	3146	3296	3445	3594	3744
91	3893	4042	4191	4340	4489	4639	4787	4936	5085	5234
92	5383	5532	5680	5829	5977	6126	6274	6423	6571	6719
93	6868	7016	7164	7312	7460	7608	7756	7904	8052	8200
94	8347	8495	8643	8790	8938	9085	9233	9380	9527	9675
295	9822	9969								
	47.		0116	0263	0410	0557	0704	0851	0998	1145
96	1292	1438	1585	1732	1878	2025	2171	2317	2464	2610
97	2756	2903	3049	3195	3341	3487	3633	3779	3925	4070
98	4216	4362	4508	4653	4799	4944	5090	5235	5381	5526
99	5671	5816	5962	6107	6252	6397	6542	6687	6832	6976
300	7121	7266	7411	7555	7700	7844	7989	8133	8278	8422
01	8566	8711	8855	8999	9143	9287	9431	9575	9719	9863
02	48. 0007	0151	0294	0438	0582	0725	0869	1012	1156	1299
03	1443	1586	1729	1872	2016	2159	2302	2445	2588	2731
04	2874	3016	3159	3302	3445	3587	3730	3872	4015	4157
305	4300	4442	4584	4727	4869	5011	5153	5295	5437	5579
06	5721	5863	6005	6147	6289	6430	6572	6714	6855	6997
07	7138	7280	7421	7563	7704	7845	7986	8127	8269	8410
08	8551	8692	8833	8973	9114	9255	9396	9537	9677	9818
09	9958									
	49.	0099	0239	0380	0520	0661	0801	0941	1081	1222
310	1362	1502	1642	1782	1922	2062	2201	2341	2481	2621
11	2760	2900	3040	3180	3319	3458	3597	3737	3876	4015
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

SEGUE LA TAVOLA DEI LOGARITMI

N	0	1	2	3	4	5	9	7	8	9
312	49. 4155	4294	4433	4572	4711	4850	4989	5128	5267	5406
13	5544	5683	5822	5960	6099	6237	6376	6514	6653	6791
14	6930	7068	7206	7344	7482	7621	7759	7897	8035	8173
315	8311	8448	8586	8724	8862	8999	9137	9275	9412	9550
16	9687	9824	9962							
	50.			0099	0236	0374	0511	0648	0785	0922
17	1059	1196	1333	1470	1607	1744	1880	2017	2154	2290
18	2427	2564	2700	2837	2973	3109	3246	3382	3518	3654
19	3791	3927	4063	4199	4335	4471	4607	4743	4878	5014
320	5150	5286	5421	5557	5692	5828	5963	6099	6234	6370
21	6505	6640	6775	6911	7046	7181	7316	7451	7586	7721
22	7856	7991	8126	8280	8395	8530	8664	8799	8933	9068
23	9203	9337	9471	9606	9740	9874				
	51.						0008	0143	0277	0411
34	0545	0679	0813	0947	1081	1214	1348	1482	1616	1750
25	1883	2017	2150	2284	2417	2551	2684	2818	2951	3084
26	3218	3351	3484	3617	3750	3883	4016	4149	4282	4415
27	4548	4680	4813	4946	5079	5211	5344	5476	5609	6741
28	5874	6006	6139	6271	6403	6535	6668	6800	6932	7064
29	7196	7328	7460	7592	7724	7855	7987	8119	8251	8382
230	8514	8645	8777	8909	9040	9172	9303	9434	9566	9697
31	9828	9959								
	52.		0090	0221	0352	0483	0614	0745	0876	1007
32	1138	1269	1400	1530	1661	1792	1922	2053	2183	2314
33	2444	2575	2705	2835	2966	3096	3226	3356	3486	3616
34	3746	3876	4008	4136	4266	4396	4526	4656	4785	4915
335	5045	5174	5304	5434	5563	5693	5822	5951	6081	6210
36	6339	6489	6598	6727	6856	6985	7114	7243	7372	7501
37	7630	7759	7888	8016	8145	8274	8402	8531	8660	8788
38	8917	9045	9174	9302	9430	9559	9687	9815	9943	
	53.									0072
39	0200	0328	0456	0584	0712	0840	0968	1096	1223	1351
340	1479	1607	1734	1862	1990	2117	2245	2372	2500	2627
41	2754	2882	3009	3136	3263	3391	3518	3645	3772	3899
42	4026	4153	4280	4407	4534	4661	4787	4914	5041	5167
43	5294	5421	5547	5674	5800	5927	6053	6180	6306	6432
44	6558	6685	6811	6937	7063	7189	7315	7441	7567	7693
345	7819	7945	8071	8197	8322	8448	8574	8699	8825	8951
46	9076	9202	9327	9453	9578	9703	9829	9954		
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

SEGUITO DELLA TAVOLA DEI LOGARITMI

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	54.								0079	0204
347	0329	0455	0580	0705	0830	0955	1080	1205	1330	1454
48	1579	1704	1829	1954	2078	2203	2327	2452	2576	2701
49	2825	2950	3074	3199	3323	3447	3571	3696	3820	3944
350	4068	4192	4316	4440	4564	4688	4812	4936	5060	5183
51	5307	5431	5554	5678	5802	5925	6049	6172	6926	6419
52	6543	6666	6789	6913	7036	7159	7282	7405	7529	7652
53	7775	7898	8021	8144	8267	8389	8512	8535	8758	8881
54	9003	9126	9249	9371	9494	9616	9739	9861	9984	
	55.									0106
355	0228	0351	0473	0595	0717	0840	0962	1084	1206	1328
56	1450	1572	1694	1816	1938	2060	2181	2303	2425	2546
57	2668	2790	2911	3033	3154	3276	3397	3519	3640	3762
58	3883	4004	4126	4247	4368	4489	4610	4731	4852	4973
59	5094	5215	5336	5457	5578	5699	5820	5940	6061	6482
360	6302	6423	6544	6664	6785	6905	7026	7146	7266	7387
61	7507	7627	7748	7868	7988	8108	8228	8348	8469	8589
62	8709	8829	8948	9068	9188	9308	9428	9548	9667	9787
63	9907									
	56.	0026	0146	0265	0385	0504	0624	0743	0863	0982
64	1101	1221	1340	1459	1578	1697	1817	1936	2055	2174
365	2293	2412	2531	2650	2768	2887	3006	3125	3244	3362
66	3481	3600	3718	3837	3955	4074	4192	4311	4429	4548
67	4666	4784	4903	5021	5139	5257	5375	5493	5612	5730
68	5848	5966	6084	6202	6320	6437	6555	6673	6791	6909
69	7026	7144	7262	7379	7497	7614	7732	7849	7967	8084
370	8202	8319	8436	8553	8671	8788	8905	9023	9140	9257
71	9374	9491	9608	9725	9842	9959				
	57.						0076	0193	0309	0426
72	0543	0660	0776	0893	1010	1126	1243	1359	1476	1592
73	1709	1825	1942	2058	2174	2291	2407	2523	2639	2755
74	2872	2988	3104	3220	3336	3452	3568	3684	3800	3915
375	4031	4147	4263	4379	4494	4610	4726	4841	4957	5072
76	5188	5303	5419	5534	5650	5765	5880	5996	6111	6226
77	6341	6456	6572	6687	6802	6917	7032	7147	7262	7377
78	7492	7607	7721	7836	7951	8066	8181	8295	8410	8525
79	8639	8754	8868	8983	9097	9212	9326	9441	9555	9669
380	9784	9898								
	58.		0012	0126	0240	0355	0469	0583	0697	0811
81	0925	1039	1153	1267	1381	1494	1608	1722	1836	1950
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

TAVOLA DEI LOGARITMI

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
382	58, 2063	2177	2291	2404	2518	2631	2745	2858	2972	3085
83	3199	3312	3425	3539	3652	3765	3879	3992	4105	4218
84	4331	4444	4557	4670	4783	4896	5009	5152	5234	5348
385	5461	5573	5680	5799	5912	6024	6137	6250	6362	6475
86	6587	6700	6812	6925	7037	7149	7262	7374	7486	7599
87	7711	7823	7935	8047	8160	8272	9394	8496	8608	8720
88	8832	8944	9055	9167	9279	9391	9503	9614	9726	9838
89	9950									
	59.	0061	0173	0284	0396	0508	0619	0730	0842	0953
390	1065	1176	1287	1399	1510	1621	1732	1843	1955	2066
91	2177	2288	2399	2510	2621	2732	3843	3954	3064	3175
92	3286	3397	3508	3618	3729	3840	3950	4061	4171	4282
93	4393	4503	4613	4724	4834	4945	5055	5165	5276	5386
94	5496	5606	5717	5827	5937	6047	6157	6267	6377	6487
395	6597	6707	6817	6927	7037	7146	7256	7366	7476	7586
96	7695	7805	7914	8024	8134	8243	8353	8462	8572	8681
97	8791	8900	9009	9119	9228	9337	9446	9556	9665	9774
98	9883	9992								
	60.		0101	0210	0319	0428	0537	0640	0755	0864
99	0973	1082	1190	1299	1408	1517	1625	1734	1843	1951
400	2060	2169	2277	2386	2494	2602	2711	2819	2928	3036
01	3144	3253	3361	3469	3577	3685	3794	3902	4010	4118
02	4226	4334	4442	4550	4658	4766	4874	4982	5089	5197
03	5305	5413	5520	5628	5756	5843	5951	6059	6166	6274
04	6381	6489	6596	6704	6811	6918	7026	7133	7240	7348
405	7455	7562	7669	7777	7884	7991	8098	8205	8312	8419
06	8526	8633	8740	8847	8954	9060	9167	9274	9381	9488
07	9594	9701	9808	9914						
	61.				0021	0128	0234	0341	0417	0554
08	0660	0767	0875	0979	1086	1192	1298	1405	1511	1617
09	1723	1829	1936	2042	2148	2254	2360	2466	2572	2678
410	2784	2890	2996	3101	3207	3313	3419	3525	3630	3736
11	3842	3947	4053	4159	4264	4370	4475	4581	4686	4792
12	4897	5003	5108	5213	5349	5424	5529	5634	5740	5845
13	5950	6055	6160	6265	6370	6475	6580	6685	6790	6895
14	7000	7105	7210	7315	7420	7525	7629	7734	7839	7943
415	8048	8153	8257	8362	8466	8571	8675	8780	8881	8989
16	9003	9198	9302	9406	9511	9815	9719	9823	9928	
	62.									0032
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

SEGUE LA TAVOLA DEI LOGARITMI

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
417	62. 0136	0240	0344	0448	0552	0656	0760	0864	0968	1072
18	1176	1280	1384	1488	1592	1695	1799	1903	2007	2110
19	2214	2318	2421	2525	2628	2732	2835	2939	3042	3146
420	3249	3353	3456	3559	3663	3766	3869	3972	4076	4179
21	4282	4385	4488	4591	4694	4798	4901	5004	5107	5209
22	5312	5415	5518	5621	5724	5827	5930	6032	6135	6238
23	6340	6443	6546	6648	6751	6853	6956	7058	7161	7263
24	7366	7468	7571	7673	7775	7878	7980	8082	8184	8287
425	8389	8491	8593	8695	8797	8900	9002	9104	9206	9308
26	9410	9511	9613	9715	9817	9919				
	63.						0021	0123	0224	0326
27	0428	0530	0631	0733	0834	0936	1038	1139	1241	1342
28	1444	1545	1647	1748	1849	1951	2052	2153	2255	2356
29	2457	2558	2660	2760	2862	2963	3064	3165	3266	3367
430	3468	3569	3670	3771	3872	3973	4074	4175	4276	4376
31	4477	4578	4679	4779	4880	4981	5081	5182	5283	5383
32	5484	5584	5685	5785	5886	5986	6086	6187	6287	6388
33	6488	6588	6688	6789	6889	6989	7089	7189	7289	7390
34	7490	7590	7690	7790	7890	7990	8090	8190	8289	8389
435	8489	8589	8689	8789	8888	8988	9088	9188	9287	9387
36	9486	9586	9686	9785	9885	9984				
	64.						0084	0183	0283	0382
37	0481	0581	0680	0779	0879	0978	1077	1176	1276	1375
38	1474	1573	1672	1771	1870	1970	2069	2168	2267	2366
39	2464	2563	2662	2761	2860	2959	3058	3156	3255	3354
440	3453	3551	3650	3749	3847	3946	4044	4143	4242	4340
41	4439	4537	4635	4734	4832	4931	5029	5127	5226	5324
42	5422	5520	5619	5717	5815	5913	6011	6109	6208	6306
43	6404	6502	6600	6698	6796	6894	6991	7089	7187	7285
44	7383	7481	7579	7676	7774	7872	7969	8067	8165	8262
445	8360	8458	8552	8653	8750	8848	8945	9043	9140	9237
46	9335	9432	9530	9627	9724	9821	9919			
	65.							0016	0113	0210
47	0308	0405	0502	0599	0696	0793	0890	0987	1084	1181
48	1278	1375	1472	1569	1666	1762	1859	1956	2053	2150
49	2246	2343	2440	2536	2633	2730	2826	2923	3019	3116
450	3213	3309	3405	3502	3598	3695	3791	3888	3984	4080
51	4177	4273	4369	4465	4562	4678	4754	4850	4946	5042
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

SEGUE LA TAVOLA DEI LOGARITMI

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
452	65 . 5138	5234	5331	5427	5523	5619	5714	5810	5906	6002
53	6098	6194	6290	6386	6481	6577	6673	6769	6864	6960
54	7056	7151	7247	7343	7438	7534	7629	7725	7820	7916
455	8011	8107	8202	8298	8393	8488	8584	8679	8774	8870
56	8965	9060	9155	9250	9346	9441	9536	9631	9726	9821
57	9916									
	66.	0011	0106	0201	0296	0391	0486	0581	0676	0771
58	0865	0960	1055	1150	1245	1339	1434	1529	1623	1718
59	1813	1907	2002	2096	2191	2285	2380	2474	2569	2663
460	2758	2852	2947	3041	3135	3230	3324	3418	3512	3607
61	3701	3795	3889	3983	4078	4172	4266	4360	4454	4548
62	4642	4736	4830	4924	5018	5112	5206	5299	5393	5487
63	5581	5675	5769	5862	5956	6050	6143	6237	6331	6424
64	6518	6612	6705	6799	6892	6986	7079	7173	7266	7359
465	7453	7546	7640	7733	7826	7920	8013	8106	8199	8293
66	8386	8479	8572	8665	8758	8852	8945	9038	9181	9224
67	9317	9410	9503	9596	9689	9782	9874	9967		
	67.								0060	0153
68	0246	0339	0431	0524	0617	0710	0802	0895	0988	1080
69	1173	1265	1358	1451	1543	1636	1728	1821	1913	2005
470	2098	2190	2283	2375	2467	2560	2652	2744	2836	2929
71	3021	3113	3205	3297	3390	3482	3574	3666	3758	3850
72	3942	4034	4126	4218	4310	4402	4494	4586	4677	4769
73	4861	4953	5045	5136	5228	5320	5412	5503	5595	5687
74	5778	5870	5961	6053	6145	6236	6328	6419	6511	6602
475	6694	6785	6876	6968	7059	7150	7242	7333	7424	7516
76	7607	7698	7789	7881	7972	8063	8154	8245	8336	8427
77	8518	8609	8700	8791	8882	8973	9064	9155	9246	9337
78	9428	9519	9610	9700	9791	9882	9973			
	68.							0063	0154	0245
79	0336	0426	0517	0607	0698	0789	0879	0070	1060	1151
480	1241	1332	1422	1513	1603	1693	1784	1874	1964	2055
81	2145	2235	2326	2416	2506	2596	2686	2777	2867	2957
82	3047	3137	3227	3317	3407	3497	3587	3677	3767	3857
83	3947	4037	4127	4217	4307	4396	4486	4576	4666	4756
84	4845	4935	5025	5114	5204	5294	5383	5473	5563	5652
485	5742	5831	5921	6010	6100	6189	6279	6368	6457	6547
86	6636	6726	6815	6904	6994	7083	7172	7261	7351	7440
87	7529	7618	7707	7796	7885	7975	8064	8153	8242	8331
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

SEGUE LA TAVOLA DEI LOGARITMI

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
488	68. 8420	8509	8598	8687	8776	8865	8953	9042	9131	9220
89	9309	9398	9486	9575	9664	9753	9841	9930		
	69.								0019	0107
490	0196	0285	0373	0462	0550	0639	0727	0816	0905	0993
91	1081	1170	1258	1347	1435	1523	1612	1700	1788	1877
92	1965	2053	2142	2230	2318	2406	2494	2583	2671	2759
93	2847	2935	3023	3111	3199	3287	3375	3463	3551	3639
94	3727	3815	3903	3991	4078	4166	4254	4342	4430	4517
495	4605	4693	4781	4868	4956	5044	5131	5219	5306	5394
96	5482	5569	5657	5744	5832	5919	6007	6094	6182	6269
97	6356	6444	6531	6618	6706	6793	6880	6968	7055	7142
98	7229	7316	7404	7491	7578	7665	7752	7839	7926	8013
99	8101	8188	8275	8362	8448	8535	8622	8709	8796	8883
500	8970	9057	9144	9230	9317	9404	9491	9578	9664	9751
01	9838	9924								
	70.		0011	0098	0184	0271	0375	0444	0531	0617
02	0704	0790	0878	0963	1050	1136	1222	1309	1395	1482
03	1568	1654	1741	1827	1913	1999	2086	2172	2258	2344
04	2431	2517	2603	2689	2775	2861	2947	3033	3119	3205
505	3291	3377	3463	3549	3635	3721	3807	3893	3979	4065
06	4151	4236	4322	4408	4494	4579	4665	4751	4837	4922
07	5008	5094	5179	5265	5350	5436	5522	5607	5693	5778
08	5864	5949	6035	6120	6205	6291	6376	6462	6547	6632
09	6718	6803	6888	6974	7059	7144	7229	7315	7400	7485
510	7570	7655	7740	7826	7911	7996	8081	8166	8251	8336
11	8421	8506	8591	8676	8761	8846	8930	9015	9100	9185
12	9270	9355	9440	9524	9609	9694	9779	9863	9948	
	71.									0033
13	0117	0202	0287	0371	0456	0540	0625	0710	0794	0879
14	0963	1048	1132	1216	1301	1385	1470	1554	1638	1723
515	1807	1891	1976	2060	2144	2229	2313	2397	2481	2565
16	2650	2734	2818	2902	2986	3070	3154	3238	3322	3405
17	3491	3574	3658	3742	3826	3910	3994	4078	4162	4246
18	4330	4414	4497	4581	4665	4749	4832	4916	5000	5084
19	5167	5251	5335	5418	5502	5586	5669	5753	5836	5920
520	6003	6087	6170	6254	6337	6421	6504	6588	6671	6754
21	6838	6921	7004	7088	7171	7254	7338	7421	7504	7587
22	7671	7754	7837	7920	8003	8086	8169	8252	8336	8419
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

SEGUE LA TAVOLA DEI LOGARITMI

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
523	71. 8502	8585	8668	8751	8834	8917	9000	9083	9165	9248
24	9331	9414	9497	9580	9663	9745	9828	9911	9994	
	72.									0077
525	0159	0242	0325	0407	0490	0573	0655	0738	0821	0903
26	0986	1068	1151	1213	1316	1398	1481	1563	1646	1728
27	1811	1893	1975	2058	2140	2222	2305	2387	2469	2552
28	2634	2716	2798	2881	2963	3045	3127	3209	3291	3374
29	3456	3538	3620	3702	3784	3866	3948	4030	4112	4194
530	4276	4358	4440	4522	4603	4685	4767	4849	4931	5013
31	5095	5176	5258	5340	5422	5503	5585	5667	5748	5830
32	5912	5993	6075	6156	6238	6320	6401	6483	6564	6646
33	6727	6809	6890	6972	7053	7134	7216	7297	7379	7460
34	7141	7623	7704	7785	7866	7948	8029	8110	8191	8273
535	8354	8435	8516	8597	8678	8759	8841	8922	9003	9084
36	9165	9246	9327	9408	9489	9570	9651	9732	9812	9893
37	9974									
	73.	0055	0136	0217	0298	0378	0459	0540	0621	0701
38	0782	0863	0944	1024	1105	1186	1266	1347	1428	1508
39	1589	1669	1750	1830	1911	1991	2072	2152	2233	2313
540	2394	2474	2555	2635	2715	2796	2876	2956	3037	3117
41	3197	3277	3358	3438	3518	3598	3679	3759	3839	3919
42	3999	4079	4159	4240	4320	4400	4479	4560	4640	4720
43	4800	4880	4960	5040	5120	5199	5279	5359	5439	5519
44	5599	5679	5758	5838	5918	5999	6078	6157	6237	6317
45	6396	6476	6556	6635	6715	6795	6874	6954	7033	7113
46	7193	7272	7352	7431	7511	7590	7670	7749	7828	7908
47	7987	8067	8146	8225	8305	8384	8463	8543	8622	8701
48	8781	8860	8939	9018	9097	9177	9256	9335	9414	9493
49	9572	9651	9730	9810	9889	9968				
	74.						0047	0126	0205	0284
550	0363	0442	0521	0599	0678	0757	0836	0915	0994	1073
51	1152	1230	1309	1388	1467	1545	1624	1703	1782	1860
52	1939	2018	2096	2175	2254	2332	2411	2489	2568	2647
53	2725	2804	2882	2961	3039	3118	3196	3274	3353	3431
54	3510	3588	3666	3745	3823	3902	3980	4058	4136	4215
555	4293	4371	4449	4528	4606	4684	4762	4840	4918	4997
56	5075	5153	5231	5309	5387	5465	5543	5621	5699	5777
57	5855	5933	6011	6089	6167	6245	6323	6401	6478	6556
58	6634	6712	6790	6868	6945	7023	7101	7179	7256	7334
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

SEGUE LA TAVOLA DEI LOGARITMI

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
559	74 . 7412	7489	7567	7645	7722	7800	7878	7955	8033	8110
560	8188	8266	8343	8421	8498	8576	8653	8731	8808	8885
61	8963	9040	9118	9195	9272	9550	9427	9504	9582	9659
62	9736	9814	9891	9968						
	75 .				0045	0122	0200	0277	0354	0431
63	0508	0585	0663	0740	0817	0894	0971	1048	1125	1202
64	1279	1356	1433	1510	1587	1664	1741	1818	1895	1972
565	2048	2125	2202	2279	2356	2433	2509	2586	2663	2740
66	2816	2893	2970	3047	3123	3200	3277	3353	3430	3506
67	3583	3660	3736	3813	3889	3966	4042	4119	4195	4272
68	4348	4425	4501	4578	4654	4730	4807	4883	4960	5036
69	5112	5189	5265	5341	5417	5494	5570	5646	5722	5799
570	5875	5951	6027	6103	6179	0256	6332	6408	6484	6560
71	6636	6712	6788	6864	6940	7016	7092	7168	7244	7320
72	7396	7472	7548	7624	7700	7775	7851	7927	8003	8079
73	8155	8230	8306	8382	8458	8533	8609	8685	8760	8836
74	8912	8987	9063	9139	9214	9290	9366	9441	9517	9592
575	9668	9743	9819	9894	9970					
	76 .					0045	0121	0196	0272	0347
76	0422	0498	0573	0649	0724	0799	0875	0950	1025	1100
77	1176	1251	1326	1402	1477	1552	1627	1702	1777	1855
78	1928	2003	2078	2153	2228	2303	2378	2453	2528	2603
79	2679	2754	2829	2903	2978	3053	3128	3203	3278	3553
580	3428	3503	3578	3653	3727	3802	3877	3952	4027	4101
81	4176	4251	4326	4400	4475	4550	4624	4699	4774	4848
82	4923	4998	5072	5147	5221	5296	5370	5445	5510	5594
83	5669	5743	5817	5892	5966	6041	6115	6190	6264	6338
84	6413	6487	6562	6636	6710	6784	6859	6933	7007	7082
585	7156	7230	7304	7378	7453	7527	7601	7675	7749	7823
86	7898	7972	8046	8120	8194	8268	8342	8416	8490	8564
87	8638	8712	8786	8860	8934	9008	9082	9156	9230	9303
88	9377	9451	9525	9599	9673	9746	9820	9894	9968	
	77 .									0042
89	0115	0189	0263	0336	0410	0484	0557	0631	0705	0778
590	0852	0926	0999	1073	1146	1220	1293	1367	1440	1514
91	1587	1661	1734	1808	1881	1955	2028	2102	2175	2248
92	2322	2395	2468	2542	2615	2688	2762	2835	2908	2981
93	3055	3128	3201	3274	3347	3421	3494	3567	3640	3713
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

SEGUE LA TAVOLA DEI LOGARITMI

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
594	77 . 3786	3860	3933	4006	4079	4152	4225	4298	4371	4444
95	4517	4590	4663	4736	4809	4882	4955	5028	5100	5173
96	5246	5319	5392	5465	5538	5610	5683	5756	5829	5902
97	5974	6047	6120	6192	6265	6338	6411	6483	6556	6229
98	6701	6774	6846	6919	6992	7064	7137	7209	7282	7351
99	7427	7499	7572	7644	7717	7789	7862	7934	8006	8079
600	8151	8224	8296	8368	8441	8513	8585	8658	8730	8802
01	8874	8947	9019	9091	9163	9236	9308	9380	9452	9524
02	9596	9669	9741	9813	9885	9957				
	78 .						0029	0101	0173	0245
03	0317	0389	0461	0533	0605	0677	0749	0821	0893	0965
04	1037	1109	1181	1253	1324	1396	1468	1540	1612	1684
605	1755	1827	1899	1971	2042	2114	2186	2258	2329	2401
06	2472	2544	2616	2688	2759	2831	2902	2974	3046	3117
07	3189	3260	3332	3403	3475	3546	3618	3689	3761	3832
08	3904	3975	4046	4118	4189	4261	4332	4403	4475	4546
09	4617	4689	4760	4831	4902	4974	5045	5116	5187	5259
10	5330	5401	5472	5543	5614	5686	5759	5828	5899	5970
11	6041	6112	6183	6254	6325	6396	6467	6538	6609	6880
12	6751	6822	6893	6964	7035	7106	7177	7248	7319	7390
13	7460	7531	7602	7673	7744	7815	7885	7956	8027	8098
14	8168	8239	8310	8380	8451	8522	8593	8663	8734	8804
615	8875	8946	9016	9087	9157	9228	9299	9369	9440	9510
16	9581	9651	9722	9792	9863	9933				
	79 .						0003	0074	0144	0215
17	0285	0355	0426	0496	0567	0637	0707	0778	0848	0918
18	0988	1059	1129	1199	1269	1340	1410	1480	1550	1620
19	1691	1761	1831	1901	1971	2041	2111	2181	2252	2322
620	2392	2462	2532	2602	2672	2742	2812	2882	2952	3022
21	3092	3161	3231	3301	3371	3441	3511	3581	3651	3721
22	3790	3860	3930	4000	4070	4139	4209	4279	4349	4418
23	4488	4558	4627	4697	4767	4836	4906	4976	5045	5115
24	5185	5254	5324	5393	5463	5532	5602	5671	5741	5810
25	5880	5949	6019	6088	6158	6227	6297	6366	6436	6505
26	6574	6644	6713	6782	6852	6921	6990	7060	7129	7198
27	7268	7337	7406	7475	7544	7614	7683	7752	7821	7890
28	7960	8029	8098	8167	8236	8305	8374	8443	8512	8582
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

SEGUE LA TAVOLA DEI LOGARITMI

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
629	79 . 8651	8720	8789	8858	8927	8996	9065	9134	9203	9272
30	9341	9409	9478	9547	9616	9685	9754	9823	9892	9960
31	80 . 0029	0098	0167	0256	0305	0373	0442	0511	0580	0648
32	0717	0786	0854	0923	0992	1060	1129	1198	1266	1335
33	1404	1472	1541	1609	1678	1747	1815	4884	1952	2021
34	2089	2158	2226	2295	2363	2432	2500	2568	2637	2705
635	2774	2842	2910	2979	3047	3116	3184	3252	3320	3389
36	3457	3525	3594	3662	3730	3798	3867	3935	4003	4071
37	4139	4208	4276	4344	4412	4480	4548	4616	4684	4753
38	4821	4889	4957	5025	5093	5161	5229	5297	5365	5433
39	5501	5569	5637	5705	5773	5840	5908	5976	6044	6112
640	6180	6248	6316	6383	6451	6519	6587	6655	6722	6790
41	6858	6926	6994	7061	7129	7197	7264	7332	7400	7467
42	7535	7603	7670	7738	7805	7873	7941	8008	8076	8143
43	8211	8278	8346	8414	8481	8549	8616	8683	8751	8818
44	8886	8953	9021	9088	9155	9223	9290	9358	9425	9492
645	9560	9627	9694	9762	9829	9896	9963			
	81 .							0031	0098	0165
46	0233	0300	0367	0434	0501	0568	0636	0703	0770	0837
47	0904	0971	1038	1106	1173	1240	1307	1374	1441	1508
48	1575	1642	1709	1776	1843	1910	1977	2044	2111	2178
49	2245	2312	2378	2445	2512	2579	2646	2713	2780	2846
650	2913	2980	3047	3114	3180	3247	3314	3381	3447	3514
51	3581	3648	3714	3781	3848	3914	3981	4048	4114	4181
52	4248	4314	4381	4447	4514	4580	4647	4714	4780	4847
53	4913	4980	5046	5113	5179	5246	5312	5378	5445	5511
54	5578	5644	5710	5777	5843	5910	5976	6042	6109	6175
655	6241	6308	6374	6440	6506	6573	6639	6705	6771	6838
56	6904	6970	7036	7102	7169	7235	7301	7367	7433	7490
57	7565	7631	7698	7764	7830	7896	7962	8028	8094	8160
58	8226	8292	8360	8424	8490	8556	8622	8688	8754	8819
59	8885	8951	9017	9083	9149	9215	9281	9346	9412	9478
660	9544	9610	9675	9741	9807	9873	9932			
	82 .							0004	0070	0136
61	0201	0267	0333	0398	0464	0530	0595	0661	0729	0792
62	0858	0924	0989	1055	1120	1186	1251	1317	1382	1448
63	1513	1579	1644	1710	1775	1841	1906	1972	2037	2103
64	2168	2233	2299	2364	2430	2495	2560	2626	2691	2756
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

SEGUE LA TAVOLA DEI LOGARITMI

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
665	82. 2822	2887	2952	3017	3083	3148	3213	3279	3344	3409
66	3474	3539	3605	3670	3735	3800	3865	3930	3996	4061
67	4126	4191	4256	4321	4386	4451	4516	4581	4646	4711
68	4776	4841	4906	4071	5036	5101	5166	5231	5296	5361
69	5426	5491	5556	5621	5686	5751	5815	5880	5945	6010
70	6075	6140	6204	6269	6334	6399	6463	6528	6593	6658
71	6723	6787	6852	6617	6981	7046	7111	7153	7240	7305
72	7369	7434	7498	7563	7628	7692	7757	7821	7886	7950
73	8015	8080	8144	8209	8273	8338	8402	8466	8531	8595
74	8660	8724	8789	8853	8918	8982	9046	9111	9175	9239
75	9304	9368	9432	9497	9561	9625	9690	9754	9818	9882
76	9947									
	83.	0011	0075	0139	0204	0268	0332	0396	0460	0524
77	0589	0653	0717	0781	0845	0909	0973	1037	1102	1166
78	1230	1294	1358	1422	1486	1550	1614	1678	1742	1806
79	1870	1934	1998	2062	2125	2189	2253	2317	2381	2445
680	2509	2573	2637	2700	2764	2828	2892	2956	3019	3083
81	3147	3211	3275	3338	3402	3466	3530	3593	3657	3721
82	3784	3848	3912	3975	4039	4103	4166	4230	4293	4357
83	4421	4484	4548	4611	4675	4738	4802	4866	4929	4993
84	5056	5120	5183	5246	5310	5373	5437	5500	5564	5627
685	5991	5754	5817	5881	5944	6007	6071	6134	6197	6261
86	6324	6387	6451	6514	6577	6640	6704	6767	6830	6893
87	6957	7020	7083	7146	7209	7273	7336	7399	7466	7525
88	7588	7652	7715	7778	7841	7904	7967	8030	8093	8156
89	8219	8282	8345	8408	8471	8534	8597	8660	8723	8786
690	8849	8912	8975	9038	9101	9164	9227	9289	9352	9415
91	9478	9541	9604	9667	9729	9792	9855	9918	9981	
	84.									0043
92	0106	0169	0232	0294	0357	0420	0482	0545	0608	0671
93	0733	0796	0859	0921	0984	1046	1109	1172	1234	1297
94	1359	1422	1485	1547	1610	1672	1735	1797	1860	1922
695	1985	2047	2110	2172	2235	2297	2360	2422	2484	2545
96	2609	2672	2734	2796	2859	2921	2983	3046	3108	3170
97	3233	3295	3357	3420	3482	3544	3606	3669	3731	3793
98	3855	3918	3980	4042	4104	4166	4229	4291	4353	4415
99	4477	4539	4601	4663	4726	4788	4850	4912	4974	5036
700	5098	5160	5222	5284	5346	5408	5470	5532	5594	5656
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

SEGUE LA TAVOLA DEI LOGARITMI

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
701	84. 5718	5780	5842	5904	5966	6028	6090	6151	6213	6275
02	6337	6399	6461	6523	6584	6646	6708	6770	6832	6893
03	6955	7017	7079	7141	7202	7264	7326	7388	7449	7511
04	7573	7634	7696	7758	7819	7881	7943	8004	8066	8127
705	8189	8251	8312	8374	8435	8497	8559	8620	8682	8743
06	8805	8866	8928	8989	9051	9112	9174	9235	9296	9358
07	9419	9481	9542	9604	9665	9726	9788	9849	9911	9972
08	85. 0033	0095	0156	0217	0279	0340	0401	0462	0524	0585
09	0646	0707	0789	0830	0891	0952	1014	1075	1136	1197
710	1258	1319	1381	1442	1503	1564	1625	1686	1747	1808
11	1870	1931	1992	2053	2114	2175	2236	2297	2358	2419
12	2480	2541	2602	2663	2724	2785	2846	2907	2968	3029
13	3090	3150	3211	3272	3333	3394	3455	3516	3576	3637
14	3698	3759	3820	3881	3941	4002	4063	4124	4184	4245
15	1306	4367	4427	4488	4549	4610	4670	4731	4792	4852
16	4913	4974	5034	5095	5156	5216	5277	5337	5398	5459
17	5519	5580	5640	5701	5761	5822	5882	5943	6003	6064
18	6124	6185	6245	6306	6366	6427	6487	6548	6608	6668
19	6729	6789	6850	6910	6970	7031	7091	7151	7212	7272
720	7332	7393	7453	7513	7574	7634	7694	7754	7815	7875
21	7935	7995	8056	8116	8176	8236	8296	8357	8417	8477
22	8537	8597	8657	8718	8778	8838	8898	8958	9018	9078
23	9138	9198	9258	9318	9378	9438	9499	9559	9619	9679
24	9739	9798	9858	9918	9978	0038	0098	0158	0218	0278
725	86. 0338	0398	0458	0518	0578	0637	0697	0757	0817	0877
26	0936	0996	1056	1116	1176	1236	1295	1355	1415	1475
27	1534	1594	1654	1714	1773	1833	1893	1952	2012	2072
28	2131	2191	2251	2310	2370	2430	2489	2549	2608	2668
29	2728	2787	2847	2906	2966	3025	3085	3144	3204	3263
730	3323	3382	3442	3501	3561	3620	3680	3739	3798	3858
31	3917	3977	4036	4096	4155	4214	4274	4333	4392	4452
32	4511	4570	4630	4689	4748	4808	4867	4926	4985	5045
33	5104	5163	5222	5282	5341	5400	5459	5518	5578	5637
34	5696	5755	5814	5873	5933	5992	6051	6110	6169	6228
735	6287	6346	6405	6465	6524	6583	6642	6701	6760	6819
36	6878	6937	6996	7055	7114	7173	7232	7291	7350	7409
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

SEGUE LA TAVOLA DEI LOGARITMI

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
737	86. 7467	7526	7585	7644	7703	7762	7821	7880	7939	7997
38	8056	8115	8174	8233	8292	8350	8409	8468	8527	8586
39	8644	8703	8762	8821	8879	8938	8997	9056	9114	9173
740	9232	9290	9349	9408	9466	9525	9584	9642	9701	9760
41	9818	9877	9935	9994						
	87.				0053	0111	0170	0228	0287	0345
42	0404	0462	0521	0579	0638	0696	0755	0813	0872	0930
43	0989	1047	1106	1164	1223	1281	1339	1398	1456	1515
44	1573	1631	1690	1748	1806	1865	1923	1981	2040	2098
745	2156	2215	2273	2331	2389	2448	2506	2564	2622	2681
46	2739	2797	2855	2913	2972	3030	3088	3146	3204	3262
47	3321	3379	3437	3495	3553	3611	3669	3727	3785	3843
48	3902	3960	4018	4076	4134	4192	4250	4308	4366	4424
49	4482	4540	4598	4656	4714	4772	4830	4887	4945	5003
750	5061	5119	5177	5235	5293	5351	5409	5466	5524	5582
51	5640	5698	5756	5813	5871	5929	5987	6045	6102	6160
52	6218	6276	6333	6391	6449	6506	6564	6622	6680	6737
53	6795	6853	6910	6968	7026	7083	7141	7198	7256	7314
54	7371	7429	7486	7544	7602	7659	7717	7774	7832	7889
755	7947	8004	8062	8119	8177	8234	8292	8349	8407	8464
56	8522	8579	8637	8694	8751	8809	8866	8924	8981	9038
57	9096	9153	9211	9268	9325	9383	9440	9497	9555	9612
58	9669	9726	9784	9841	9898	9956				
	88.						0013	0070	0127	0185
59	0242	0299	0356	0413	0471	0528	0585	0642	0699	0756
760	0814	0871	0928	0985	1042	1099	1156	1213	1270	1328
61	1385	1442	1499	1556	1613	1670	1727	1784	1841	1898
62	1955	2012	2069	2126	2183	2240	2297	2354	2411	2468
63	2524	2581	2638	2695	2752	2809	2866	2923	2980	3036
64	3093	3150	3207	3264	3321	3377	3434	3491	3548	3605
765	3661	3718	3775	3832	3888	3945	4002	4059	4115	4172
66	4229	4285	4342	4399	4455	4512	4569	4625	4682	4739
67	4795	4852	4909	4965	5022	5078	5135	5191	5248	5305
68	5361	5418	5474	5531	5587	5644	5700	5757	5813	5870
69	5926	5983	6039	6096	6152	6209	6265	6321	6378	6434
770	6491	6547	6603	6660	6716	6773	6829	6885	6942	6998
71	7054	7111	7167	7223	7280	7336	7392	7448	7505	7561
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

SEGUE LA TAVOLA DEI LOGARITMI

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
772	88. 7617	7674	7730	7786	7842	7898	7955	8011	8067	8123
73	8179	8236	8292	8348	8404	8460	8516	8573	8629	8685
74	8741	8797	8853	8909	8965	9021	9077	9134	9190	9246
775	9302	9358	9414	9470	9526	9582	9638	9694	9750	9806
76	9862	9918	9974							
	89.			0030	0085	0141	0197	0253	0309	0365
77	0421	0477	0533	0589	0644	0700	0756	0812	0870	0924
78	0980	1035	1091	1147	1203	1259	1314	1370	1426	1482
79	1537	1593	1649	1705	1760	1816	1872	1927	1983	2039
780	2095	2150	2206	2262	2317	2373	2428	2484	2540	2595
81	2651	2707	2762	2818	2873	2929	2985	3040	3096	3151
82	3207	3262	3318	3373	3429	3484	3540	3595	3651	3706
83	3762	3817	3873	3928	3984	4039	4094	4150	4205	4261
84	4316	4371	4427	4482	4538	4593	4648	4704	4759	4814
785	4870	4925	4980	5036	5091	5146	5201	5257	5312	5367
86	5423	5478	5533	5588	5643	5699	5754	5809	5864	5919
87	5975	6030	6085	6140	6195	6251	6306	6361	6416	6471
88	6526	6581	6636	6691	6747	6802	6857	6912	6967	7022
89	7077	7132	7187	7242	7297	7352	7407	7462	7517	7572
790	7627	7682	7737	7792	7847	7902	7957	8012	8067	8122
91	8176	8231	8286	8341	8396	8451	8506	8561	8615	8670
92	8725	8780	8835	8890	8944	8999	9054	9109	9164	9218
93	9273	9328	9383	9437	9492	9547	9602	9656	9711	9766
94	9821	9875	9930	9985						
	90.				0039	0094	0149	0203	0258	0312
795	0367	0422	0476	0531	0586	0640	0695	0749	0804	0858
96	0913	0968	1022	1077	1131	1186	1240	1295	1349	1404
97	1458	1513	1567	1622	1676	1731	1785	1840	1894	1948
98	2003	2057	2112	2166	2220	2275	2329	2384	2438	2492
99	2547	2601	2655	2710	2764	2818	2873	2927	2981	3036
800	3090	3144	3198	3253	3307	3361	3416	3470	3524	3578
01	3633	3687	3741	3795	3849	3903	3958	4012	4066	4120
02	4174	4228	4283	4337	4391	4445	4499	4553	4607	4661
03	4716	4770	4824	4878	4932	4986	5040	5094	5148	5202
04	5256	5310	5364	5418	5472	5526	5580	5634	5688	5742
805	5796	5850	5904	5958	6012	6065	6119	6173	6227	6281
06	6335	6389	6443	6497	6550	6604	6658	6712	6766	6820
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

SEGUE LA TAVOLA DEI LOGARITMI

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
807	90. 6874	6927	6981	7035	7089	7142	7196	7250	7304	7358
08	7411	7465	7519	7573	7626	7680	7734	7787	7841	7895
09	7949	8002	8056	8109	8163	8217	8270	8324	8378	8431
810	8485	8539	8592	8646	8699	8753	8807	8860	8914	8967
11	9021	9074	9128	9181	9235	9288	9342	9395	9449	9502
12	9556	9609	9663	9716	9770	9823	9877	9930	9984	91. 0037
13	91. 0091	0144	0197	0251	0304	0358	0411	0464	0518	0571
14	0624	0678	0731	0784	0838	0891	0944	0998	1051	1104
815	1158	1211	1264	1317	1371	1424	1477	1530	1584	1637
16	1690	1743	1797	1850	1903	1956	2009	2063	2116	2169
17	2222	2275	2328	2381	2435	2488	2541	2594	2647	2700
18	2753	2806	2859	2913	2966	3019	3072	3125	3178	3231
19	3284	3337	3390	3443	3496	3549	3602	3655	3708	3761
820	3814	3867	3920	3973	4026	4079	4131	4184	4237	4290
21	4343	4396	4449	4502	4555	4608	4660	4713	4766	4819
22	4872	4925	4977	5030	5083	5136	5189	5241	5294	5347
23	5400	5453	5505	5558	5611	5664	5716	5769	5822	5874
24	5927	5980	6033	6085	6138	6191	6243	6290	6349	6401
825	6454	6507	6559	6612	6664	6717	6770	6822	6875	6927
26	6980	7033	7085	7138	7190	7243	7295	7348	7400	7453
27	7506	7558	7610	7663	7715	7768	7820	7873	7925	7978
28	8030	8083	8135	8188	8240	8292	8345	8397	8450	8502
29	8555	8607	8659	8712	8764	8816	8869	8921	8973	9026
830	9078	9130	9183	9235	9287	9340	9392	9444	9493	9549
31	9601	9653	9705	9758	9810	9862	9914	9967	92. 0019	0071
32	92. 0123	0175	0228	0280	0332	0384	0436	0489	0541	0593
33	0645	0697	0749	0801	0853	0906	0958	1010	1062	1114
34	1166	1218	1270	1322	1374	1426	1478	1530	1582	1634
835	1686	1738	1790	1842	1894	1946	1998	2050	2102	2154
36	2206	2258	2310	2362	2414	2466	2518	2570	2622	2674
37	2725	2777	2829	2881	2933	2985	3037	3088	3140	3192
38	3244	3296	3348	3399	3451	3503	3555	3607	3658	3710
39	3762	3814	3865	3917	3969	4021	4072	4124	4176	4228
840	4279	4331	4383	4434	4486	4538	4589	4641	4693	4744
41	4796	4848	4899	4951	5002	5054	5106	5157	5209	5260
42	5312	5364	5415	5467	5518	5570	5621	5673	5724	5776
43	5828	5879	5931	5982	6034	6085	6137	6188	6239	6291
44	6342	6394	6445	6497	6548	6600	6651	6702	6754	6805
845	6857	6908	6959	7011	7062	7114	7165	7216	7268	7319
46	7370	7422	7473	7524	7576	7627	7678	7730	7781	7832
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

SEGUE LA TAVOLA DEI LOGARITMI

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
847	92. 7883	7935	7986	8037	8088	8140	8191	8242	8293	8345
48	8396	8447	8498	8549	8601	8652	8703	8754	8805	8856
49	8908	8959	9010	9061	9112	9163	9214	9266	9317	9368
850	9419	9470	9521	9572	9623	9674	9725	9776	9827	9878
51	9930	9981								
	93.		0032	0083	0134	0185	0236	0287	0338	0389
52	0440	0491	0541	0592	0643	0694	0745	0796	0847	0898
53	0949	1000	1051	1102	1153	1203	1254	1305	1356	1407
54	1458	1509	1560	1610	1661	1712	1763	1814	1864	1915
855	1966	2017	2068	2118	2169	2220	2271	2321	2372	2423
56	2474	2524	2575	2626	2677	2727	2778	2829	2879	2930
57	2981	3031	3082	3133	3183	3234	3285	3335	3386	3437
58	3487	3538	3588	3639	3690	3740	3791	3841	3892	3943
59	3993	4044	4094	4145	4195	4246	4296	4347	4397	4448
860	4498	4549	4599	4650	4700	4751	4801	4852	4902	4953
61	5003	5054	5104	5154	5205	5255	5306	5356	5406	5457
62	5507	5558	5608	5658	5709	5759	5809	5860	5910	5960
63	6011	6061	6111	6162	6212	6262	6313	6363	6413	6463
64	6514	6564	6614	6664	6715	6765	6815	6865	6916	6966
865	7016	7066	7116	7167	7217	7267	7317	7367	7418	7468
66	7518	7568	7618	7668	7718	7769	7819	7869	7919	7969
67	8019	8069	8119	8169	8219	8269	8319	8370	8420	8470
68	8520	8570	8620	8670	8720	8770	8820	8870	8920	8970
69	9020	9070	9120	9170	9220	9270	9319	9369	9419	9469
570	9519	9569	9619	9669	9719	9769	9819	9868	9918	9968
71	94. 0018	0068	0118	0168	0218	0267	0317	0367	0417	0467
72	0516	0566	0616	0666	0716	0765	0815	0865	0915	0964
73	1014	1064	1114	1163	1213	1263	1313	1362	1412	1462
74	1511	1561	1611	1660	1710	1760	1809	1859	1909	1958
875	2008	2058	2107	2157	2206	2256	2306	2355	2405	2454
76	2504	2554	2603	2653	2702	2752	2801	2851	2900	2950
77	3000	3049	3099	3148	3198	3247	3297	3346	3396	3445
78	3495	3544	3593	3643	3692	3742	3791	3841	3890	3939
79	3989	4038	4088	4137	4186	4236	4285	4335	4384	4433
880	4483	4532	4581	4631	4680	4729	4779	4828	4877	4927
81	4976	5025	5074	5124	5173	5222	5272	5321	5370	5419
82	5469	5518	5567	5616	5665	5715	5764	5813	5862	5911
83	5961	6010	6059	6108	6157	6207	6256	6305	6354	6403
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

SEGUE LA TAVOLA DEI LOGARITMI

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
884	94 . 6452	6501	6550	6600	6649	6698	6747	6796	6845	6894
85	6943	6992	7041	7090	7139	7189	7238	7287	7336	7385
86	7434	7483	7532	7581	7630	7679	7728	7777	7826	7875
87	7924	7973	8022	8070	8119	8168	8217	8266	8315	8364
88	8413	8462	8511	8560	8608	8657	8706	8755	8804	8853
89	8902	8951	8999	9048	9097	9146	9195	9234	9292	9341
890	9390	9439	9488	9536	9585	9634	9683	9731	9780	9829
91	9878	9926	9975							
	95 .			0024	0073	0121	0170	0219	0267	0316
92	0365	0413	0462	0511	0560	0608	0657	0705	0754	0803
93	0851	0900	0949	0997	1046	1095	1143	1192	1240	1289
94	1338	1386	1435	1483	1532	1580	1629	1677	1726	1774
895	1823	1872	1920	1969	2017	2066	2114	2163	2211	2259
96	2308	2356	2405	2453	2502	2550	2599	2647	2696	2744
97	2792	2841	2889	2938	2986	3034	3083	3131	3180	3228
98	3276	3325	3373	3421	3470	3518	3566	3615	3663	3711
99	3760	3808	3856	3905	3953	4001	4049	4098	4146	4194
900	4243	4291	4339	4387	4435	4484	4532	4580	4628	4677
01	4725	4773	4821	4869	4918	4966	5014	5062	5110	5158
02	5207	5255	5303	5351	5399	5447	5495	5543	5592	5640
03	5688	5736	5784	5832	5880	5928	5976	6024	6072	6120
04	6168	6216	6264	6312	6361	6409	6457	6505	6553	6601
905	6649	6697	6744	6792	6840	6888	6936	6984	7032	7080
06	7128	7176	7224	7272	7320	7369	7416	7464	7511	7559
07	7607	7655	7703	7751	7799	7847	7894	7942	7990	8038
08	8086	8134	8181	8229	8277	8325	8373	8420	8468	8516
09	8564	8612	8659	8707	8755	8803	8850	8898	8946	8994
910	9041	9089	9137	9184	9232	9280	9328	9375	9423	9471
11	9518	9566	9614	9661	9709	9757	9804	9852	9900	9947
12	9995									
	96 .	0042	0090	0138	1085	0233	0280	0328	0376	0423
13	0471	0518	0566	0613	0661	0709	0756	0804	0851	0899
14	0946	0994	1041	1089	1136	1184	1231	1279	1326	1374
815	1421	1469	1516	1563	1611	1658	1706	1753	1801	1848
16	1895	1943	1990	2038	2085	2132	2180	2227	2275	2322
17	2369	2417	2464	2511	2559	2606	2653	2701	2748	2795
18	2843	2890	2937	2985	3032	3079	3126	3174	3221	3268
19	3316	3363	3410	3457	3504	3552	3599	3646	3693	3741
920	3788	3835	3882	3929	3977	4024	4071	4118	4165	4212
21	4260	4307	4354	4401	4448	4495	4542	4590	4637	4684
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

SEGUE LA TAVOLA DEI LOGARITMI

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
922	96 . 4731	4778	4825	4872	4919	4966	5013	5060	5108	5155
23	5202	5249	5296	5343	5390	5437	4554	5531	5578	5625
24	5672	5719	5766	5813	5860	5907	5954	6001	6048	6095
925	6142	6189	6236	6283	6329	6376	6423	6470	6517	6564
26	6611	6658	6705	6752	6798	6845	6892	6939	6986	7033
27	7080	7127	7173	7220	7267	7314	7361	7408	7451	7501
28	7548	7595	7642	7688	7735	7782	7829	7875	7922	7969
29	8016	8062	8109	8156	8203	8249	8296	8343	8389	8436
930	8483	8530	8576	8623	8670	8716	8763	8810	8856	8903
31	8950	8996	9043	9090	9136	9183	9229	9276	9323	9369
32	9416	9462	9509	9556	9602	9649	9695	9742	9788	9835
33	9882	9928	9975							
	97 .			0021	0068	0114	0161	0207	0254	0300
34	0347	0393	0440	0486	0533	0579	0626	0672	0719	0765
935	0812	0858	0904	0951	0997	1044	1090	1137	1183	1229
36	1276	1322	1369	1415	1461	1508	1554	1600	1647	1693
37	1740	1786	1832	1879	1925	1971	2018	2064	2110	2156
38	2203	2249	2295	2342	2388	2434	2480	2527	2573	2619
39	2666	2712	2758	2804	2851	2897	2943	2989	3035	3082
940	3128	3174	3220	3266	3313	3359	3405	3451	3497	3543
41	3590	3636	3682	3728	3774	3820	3866	3913	3959	4005
42	4051	4097	4143	4189	4235	4281	4327	4373	4420	4466
43	4512	4558	4604	4650	4696	4742	4788	4834	4880	4926
44	4972	5018	5064	5110	5156	5202	5248	5294	5340	5386
945	5432	5478	5524	5570	5616	5661	5707	5753	5799	5845
46	5891	5937	5983	6029	6075	6121	6166	6212	6258	6304
47	6350	6396	6442	6487	6533	6579	6625	6671	6717	6762
48	6808	6854	6900	6946	6991	7037	7083	7129	7175	7220
49	7266	7312	7358	7403	7449	7495	7541	7586	7632	7678
950	7724	7769	7815	7861	7906	7952	7998	8043	8089	8135
51	8180	8226	8272	8317	8363	8409	8454	8500	8546	8591
52	8637	8683	8728	8774	8819	8865	8911	8956	9002	9047
53	9093	9138	9184	9230	9275	9321	9366	9412	9457	9503
54	9548	9594	9639	9685	9730	9776	9821	9867	9912	9958
955	98 . 0003	0049	0094	0140	0185	0231	0276	0322	0367	0412
56	0458	0503	0549	0594	0640	0685	0730	0776	0821	0867
57	0912	0957	1003	1048	1093	1139	1184	1229	1275	1320
58	1366	1411	1456	1501	1547	1592	1637	1683	1728	1773
59	1819	1864	1909	1954	2000	2045	2090	2135	2181	2226
960	2271	2316	2362	2407	2452	2497	2543	2588	2633	2678
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

SEGUE LA TAVOLA DEI LOGARITMI

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
961	98. 2723	2769	2814	2859	2904	2949	2994	3040	3085	3130
62	3175	3220	3265	3310	3356	3401	3446	3491	3536	3581
63	3626	3671	8716	3762	3807	3852	3897	3942	3987	4032
64	4077	4122	4167	4212	4257	4302	4347	4392	4437	4482
965	4527	4572	4617	4662	4707	4752	4797	4842	4887	4932
66	4977	5022	5067	5112	5157	5202	5247	5292	5337	5382
67	5426	5471	5516	5561	5606	5651	5696	5741	5786	5830
68	5875	5920	5961	6010	6055	6100	6144	6189	6234	6279
69	6324	6369	6413	6458	6503	6548	6593	6637	6682	6727
970	6772	6816	6861	6906	6951	6995	7040	7085	7130	7174
71	7219	7264	7309	7353	7398	7443	7487	7532	7577	7622
72	7666	7711	7756	7800	7845	7890	7934	7979	8024	8068
73	8113	8157	8202	8247	8291	8336	8381	8425	8470	8514
74	8559	8603	8648	8693	8737	8782	8826	8871	8915	8960
975	9005	9049	9094	9138	9183	9227	9272	9316	9361	9405
76	9450	9494	9539	9583	9628	9672	9717	9761	9806	9850
77	9895	9939	9983	0028	0072	0117	0161	0206	0250	0294
	99.									
78	0339	0383	0428	0472	0516	0561	0605	0650	0694	0738
79	0783	0827	0871	0916	0960	1004	1049	1093	1137	1182
980	1226	1270	1315	1359	1403	1448	1492	1536	1580	1625
81	1669	1713	1757	1802	1846	1890	1934	1979	2023	2067
82	2111	2156	2200	2244	2288	2333	2377	2421	2465	2509
83	2554	2598	2642	2686	2730	2774	2818	2863	2907	2951
84	2995	3039	3083	3127	3172	3216	3260	3304	3348	3392
985	3436	3480	3524	3568	3613	3657	3701	3745	3789	3833
86	3877	3921	3965	4009	4053	4097	4141	4185	4229	4273
87	4317	4361	4405	4449	4493	4537	4581	4625	4669	4713
88	4757	4801	4845	4889	4933	4977	5021	5064	5108	5152
89	5196	5240	5284	5328	5372	5416	5460	5504	5547	5591
990	5635	5679	5723	5767	5811	5854	5898	5942	5986	6030
91	6074	6117	6161	6205	6249	6293	6336	6380	6424	6468
92	6512	6555	6599	6643	6687	6730	6774	6818	6862	6905
93	6949	6993	7037	7080	7124	7168	7212	7255	7299	7343
94	7386	7430	7474	7517	7561	7605	7648	7692	7736	7779
995	7823	7867	7910	7954	7998	8041	8085	8128	8172	8216
96	8259	8303	8346	8390	8434	8477	8521	8564	8608	8652
97	8695	8739	8782	8826	8869	8913	8956	9000	9043	9087
98	9131	9174	9218	9261	9305	9348	9392	9435	9478	9522
99	9565	9609	9652	9696	9739	9783	9826	9870	9913	9957
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

LOGISTICA. (*Geom.*). Nome che in principio è stato dato alla curva detta *logaritmica* e il quale non è più in uso.

Si chiama *Logaritmo logistico*, l'eccesso del logaritmo ordinario di 3600'', sopra il logaritmo di un numero di secondi. L'uso principale dei logaritmi logistici è di poter calcolare più prontamente, col loro mezzo, il quarto termine di una proporzione di cui il primo è 60 minuti o 3600'', il che succede continuamente nell'astronomia. Non si ha che una sola addizione da fare, perchè nelle tavole di questi logaritmi, quello di 3600'' è zero.

LONG (Ruggero), matematico inglese, nato nel 1680 e morto nel 1770, fu professore di astronomia nell'università di Cambridge. Costruito aveva nel 1765 in una sala del collegio di Pembroke un globo celeste di 18 piedi di diametro, disposto in modo che un osservatore posto nel centro di esso vedeva le costellazioni, lo zodiaco, le orbite dei pianeti, ec., mentre tutto veniva posto in movimento per mezzo di ruote. Sembra che sia la macchina più grande di tal genere che sia stata mai fatta (*Vedi* Lalande, *Bibliografia astronomica*, pag. 350). Long ha pubblicato: I *Astronomy*, Cambridge, 1742, 2 vol. in-4; Il *Description and use of sliding rule*; e vari altri opuscoli.

LONGIMETRIA (*Geom.*) Parte della geometria pratica che ha per oggetto la misura delle lunghezze o delle distanze, tanto accessibili, quanto inaccessibili.

La *longimetria*, come l'*altimetria* e la *planimetria* non sono che suddivisioni dell'*ogrimensura*, e queste diverse denominazioni sono molto invecchiate.

LONGITUDINE. (*Geogr.*). Distanza del meridiano di un luogo terrestre da un meridiano fisso che si considera come il primo. Questa distanza si misura coll'arco dell'equatore compreso tra i due meridiani. *Vedi* Latitudine.

La scelta del primo meridiano essendo del tutto arbitraria, i geografi di ciascuna nazione sono lungi dall'essersi accordati su questo punto; il che del resto è assai indifferente, perchè è chiaro che si conoscerà la *longitudine* di un punto della terra quando sarà nota la posizione del suo meridiano rapporto al meridiano di qualunque altro punto determinato. Così, le longitudini riferite, per esempio, al meridiano di Londra, potranno riferirsi facilmente al meridiano di Parigi, perchè la distanza equatoriale o la differenza di longitudine di questi due meridiani è nota.

Come già abbiamo detto più volte, la posizione di un punto sulla superficie della terra è interamente determinata quando si conosce la sua *latitudine* e la sua *longitudine*: ma se la latitudine può sempre trovarsi senza difficoltà, non può dirsi altrettanto della longitudine, la cui ricerca forma il problema il più importante della geografia matematica, e soprattutto della scienza della navigazione. Fino dai primi tempi dell'astronomia fu riconosciuto che il quesito di determinare la differenza di longitudine tra due punti della terra si riduceva a quello di osservare le ore differenti che segnansi in questi due punti in un medesimo istante.

Infatti, siccome per un punto della terra è *mezzogiorno* quando il sole passa pel suo meridiano, due punti terrestri qualunque non possono avere la stessa ora nello stesso istante assoluto, se non hanno lo stesso meridiano, perchè se il primo punto è all'oriente del secondo, il mezzogiorno giunge per esso più presto che per l'altro; mentre, se trovasi all'occidente, quando per esso è mezzogiorno, per l'altro il mezzogiorno è già passato. Ora, se si sa, per esempio, che nell'istante in cui è mezzogiorno pel primo non sono ancora che 10 ore della mattina pel secondo, si può concludere che il sole impiega una durata di tempo di due ore per passare da un meridiano all'altro. Ma il sole, eseguendo la sua rivoluzione diurna in 24 ore, o percorrendo in 24 ore un circolo parallelo all'equatore, percorre in due ore la dodicesima parte di questo circolo, vale a dire un

arco eguale al dodicesimo di 360°, cioè un arco di 30°, dunque le longitudini dei due meridiani differiscono di 30°, perchè l'arco del circolo parallelo descritto dal sole, e che si trova compreso tra i meridiani, ha lo stesso numero di gradi dell'arco dell'equatore intercetto tra questi meridiani, poichè due meridiani qualunque tagliano necessariamente l'equatore e tutti i circoli che gli sono paralleli in parti proporzionali. Dunque, se si sceglie per primo meridiano quello in cui è mezzogiorno, si dirà che la longitudine del punto terrestre che ha il secondo meridiano è di 30°, e che è *occidentale*. Facendo una scelta inversa, la longitudine sarà sempre di 30°, ma sarà invece *orientale*.

Il quesito della longitudine, considerato sotto questo punto di vista, si riduce dunque a determinare l'ora che è al primo meridiano nel momento di un'ora osservata sotto un altro meridiano, quesito divenuto sì celebre sotto il nome di Problema della Longitudini.

Sebbene i nostri limiti non ci permettano di entrare in tutte le particolarità che merita questo importante problema, cercheremo almeno di dare un'idea dei diversi metodi proposti per la sua soluzione. La prima idea che si presenta è di regolare un buono orologio sull'ora del primo meridiano, o di qualunque altro la cui posizione rapporto al primo sia nota, e di trasportarlo nei luoghi dei quali vuol conoscersi la longitudine. L'ora di questi luoghi, trovata facilmente mediante l'osservazione dell'altezza del sole o di una stella (*Vedi* Ora), confrontata con quella che segna l'orologio nel momento dell'osservazione, farà conoscere la differenza delle ore e conseguentemente quella delle longitudini. Ma questo mezzo sì semplice ed oggigiorno sì praticabile, per effetto degl'immensi perfezionamenti dell'orologeria, era del tutto illusorio pei primi navigatori: gli strumenti destinati a segnare il tempo, già inesattissimi in terra, lo divenivano assai più in mare; era dunque impossibile di osservare sopra una nave l'ora del luogo di partenza, anco volendosi contentare di grossolane approssimazioni; e si dovette fin da principio ricercare nei fenomeni celesti dei metodi più sicuri per determinare le longitudini.

Non ci fermeremo all'osservazione degli ecclissi, fenomeni troppo rari perchè possano essere utili ai naviganti, ma dobbiamo far menzione di quella dei movimenti proprj della luna, perchè è il fondamento del metodo migliore che oggi si conosca. Il movimento proprio della luna essendo sufficientemente rapido da farla cangiare sensibilmente di posto in un tempo assai breve, le distanze di quest'astro da una o più stelle fisse variano ad ogni istante. Così, dopo avere osservato il *luogo* della luna nel cielo, confrontandolo con quello di queste stelle la cui posizione è data, non si tratta più che di calcolare, per mezzo delle tavole dei movimenti della luna, l'ora alla quale deve essa trovarsi in questo luogo pel paese ove sono state costruite le tavole, e confrontare poscia quest'ora con quella dell'osservazione.

Tale è presso a poco il metodo proposto da diversi astronomi del XVI secolo, come Apiano, Munster, Oronzio Fineo, Gemma Frisio e Nonio. Non si poterono però ritrarne allora i vantaggi che esso sembrava promettere, a motivo della imperfezione della teoria della luna di cui non si conoscevano che le due prime ineguaglianze.

La determinazione delle longitudini in mare era troppo essenziale ai progressi della navigazione, perchè i sovrani non vi annettessero tosto un grande interesse. Il re di Spagna, Filippo II, volendo incoraggire i matematici ad occuparsene, propose una ricompensa di centomila scudi a quello che avesse sciolto il problema; e gli Stati di Olanda, sul principio del XVII secolo, promisero un premio di trentamila fiorini.

Molti rivolsero allora a questo oggetto le loro meditazioni. Guglielmo il Noc-

chiero, sire di Castelfranc, pretese, verso il 1610, di aver meritato le ricompense promesse, indicando la declinazione dell'ago magnetico come un mezzo infallibile per trovare le longitudini. Ei credè di avere scoperto due poli magnetici fissi, verso i quali costantemente si dirigesse l'ago magnetico. Questi due poli opposti diametralmente erano, secondo lui, situati a 23° dal polo boreale e dal polo australe sopra un meridiano poco distante da quello dell'Isola del Ferro. In questa supposizione, chi si fosse trovato ad una latitudine qualunque sul meridiano che tagliava perpendicolarmente quello sul quale trovavansi i poli magnetici, avrebbe avuto una declinazione più grande che sopra qualunque altro meridiano ed una stessa latitudine, e tale declinazione sarebbe andata scemando avvicinandosi al meridiano che comprendeva i poli magnetici sul quale essa sarebbe divenuta nulla. Così il determinare la longitudine e la latitudine di un luogo, essendo data la declinazione dell'ago magnetico, e viceversa, riducevasi ad un semplice quesito di trigonometria. Disgraziatamente le osservazioni fatte sull'ago calamitato hanno condotto a conoscere che le sue inclinazioni e declinazioni vanno soggette a continue variazioni; e quantunque nel secondo viaggio del capitano Ross nelle regioni polari artiche sia stato scoperto un polo magnetico, come del pari ne sia stato scoperto un altro nelle terre australi nel viaggio di Dumont d'Urville, ambedue però diversi assai da quelli del sire di Castelfranc, e non diametralmente opposti tra loro, e siansi recentemente costruite perfino delle carte magnetiche delle quali in certi casi servonsi i naviganti, pure è d'uopo confessare non esser questo, almeno nello stato attuale della scienza, un metodo adottabile per la ricerca delle longitudini.

Ci è impossibile di qui riferire una moltitudine di altri tentativi più o meno ingegnosi, ma senza resultato nessuno. Uno che fece gran rumore al suo tempo e che fu soggetto di una gran querela è quello di G. B. Morin, professore reale ed astronomo francese: esso consisteva nell'uso delle osservazioni della luna in un modo più dotto e più ragionato di quello degli astronomi che prima di lui avevano avuta la istessa idea. Morin propose nel 1635 la sua scoperta al cardinale di Richelieu, ed il ministro penetrato dell'utilità dell'impresa, nominò dei commissarj per esaminarla e rendergliene conto. Il loro rapporto non fu favorevole, e quantunque in realtà i mezzi proposti da Morin, mezzi rigorosissimi e dottissimamente stabiliti, fossero presso a poco gli stessi di quelli di cui si fa uso presentemente, ei non raccolse delle sue fatiche che lunghe tribolazioni: nulladimeno nel 1645 il cardinale Mazarino gli fece ottenere una pensione di 2000 lire.

Nel 1714, il Parlamento d'Inghilterra ordinò un comitato per l'esame delle longitudini. Newton, Whiston e Clarke vi assisterono. Newton presentò una memoria nella quale espose diversi metodi atti a trovare le longitudini in mare e le difficoltà che in ognuno di essi s'incontravano. Il primo di tali metodi è quello di un orologio che misura il tempo con una esattezza sufficiente; ma, egli soggiunge, il moto del vascello, le variazioni della temperatura, i cangiamenti della gravità nei differenti punti della terra sono stati finqui ostacoli troppo grandi per un simil lavoro. Newton espose pure le difficoltà dei metodi nei quali si fa uso dei satelliti di Giove e delle osservazioni della luna. La sua conclusione era che dovesse ammettersi un bill per incoraggire una ricerca di tanta importanza.

Questo bill, ammesso ad unanimità, conteneva le seguenti disposizioni: veniva promessa una ricompensa di 10000 lire sterline (250000 franchi) all'autore di una scoperta o di un metodo per trovare la longitudine con una differenza non maggiore di un grado, o di 25 leghe comuni di Francia. Questa ricompensa dovea portarsi a 15000 lire se l'esattezza fosse giunta a due terzi di grado, e finalmente a 20000 lire se il metodo avesse potuto far trovare la longitudine con un'approssimazione di un mezzo grado.

Promesse così splendide allettarono e condussero a Londra Giovanni Harrison, allora semplice falegname in una provincia d'Inghilterra, ma cui una particolare inclinazione traeva all'orologeria: senz'altro soccorso che il suo ingegno e il suo talento naturale, mirò tosto alla più alta perfezione, e fino dall'anno 1726 giunse a correggere la dilatazione delle aste dei pendoli in modo che riuscì a fare un orologio, ch'ei asserì non aver mai fallito più di un secondo per mese. Verso la stessa epoca costruì un altro orologio destinato a subire il movimento dei vascelli senza perdere la sua regolarità. Dopo avere esperimentata egli stesso in più viaggi l'esattezza della sua macchina, Harrison credè di poter presentarsi ai commissarj delle longitudini; ei fu bene accolto a ricevette nel 1737 dei soccorsi che lo posero in grado di proseguire i suoi studj, talchè nel 1739 produsse una seconda macchina che, sottoposta a nuove esperienze, fece sperare che si sarebbero potute ottenere le longitudini nei limiti richiesti dall'atto del parlamento. Nel 1741, Harrison presentò una nuova macchina superiore alle due prime e molto più piccola; ma non fu che nel 1773 e dopo non poche opposizioni e contrasti, ch'ei ricevette finalmente il compimento delle 20000 lire sterline, di cui diversi acconti erangli stati pagati nel corso de' lunghi suoi lavori. *Vedi* HARRISON.

In Francia, Berthoud e Leroy, incoraggiti dal racconto dei successi di Harrison, presero a costruire degli orologi marini, e questi due grandi artisti risolvettero ognuno dal canto suo il problema, producendo strumenti non meno esatti di quelli del meccanico inglese.

È noto come il governo francese, mentre per verità favoriva i lavori di questi uomini ingegnosi, non imitasse però la generosità del governo inglese. Quest'ultimo, non contento delle 20000 lire sterline che aveva accordate ad Harrison, assegnò nel tempo stesso una ricompensa di 3000 lire sterline all'illustre Eulero, un'altra di 5000 lire sterline agli eredi di Tobia Mayer, in riconoscenza delle *tavole lunari* che questi avea costruite, e promise una nuova ricompensa di 5000 lire sterline a quelli che in seguito facessero scoperte utili alla navigazione.

La scoperta degli strumenti a reflessione fece che fino dal 1746 si tornasse alla misura delle distanze lunari; e le perfezioni successive della teoria della luna e di tutti i movimenti celesti hanno finalmente condotto questo metodo ad un grado di utilità se non superiore, pei naviganti, almeno eguale a quello degli orologi marini. I naviganti oggigiorno fanno uso contemporaneamente di tutti e due questi metodi. Noi ci faremo ad esporre più dettagliatamente il primo, mentre il secondo rimane sufficientemente spiegato da quanto abbiamo detto di sopra.

L'oggetto del metodo delle distanze lunari è di far conoscere la distanza vera della luna dal sole o da una stella in un istante qualunque, onde concluderne l'ora che si segna in quell'istante sul primo meridiano: si cerca l'ora del luogo che corrisponde allo stesso istante, per mezzo di un'osservazione dell'altezza del sole o di una stella: e conosciute queste due ore, la loro differenza ridotta in gradi è eguale alla longitudine.

Quando non si ha nè orologio marino, nè orologio a secondi, l'osservazione delle distanze esige il concorso di tre osservatori: mentre uno di essi misura la distanza dell'orlo della luna da quello del sole o da una stella, gli altri due debbono prendere le altezze di questi astri al di sopra dell'orizzonte; in questo modo, la distanza lunare e le due altezze sono date da tre osservazioni simultanee. Ma quando si ha un orologio a secondi, basta un solo osservatore, il che è sempre da preferirsi. Allora, tenendo conto dell'ora in cui è stata fatta l'osservazione della distanza, si possono calcolare le altezze che hanno luogo in quell'istante per mezzo di più osservazioni successive delle altezze, le cui differenze fanno conoscere il movimento in altezza confrontandole colle differenze delle ore delle osservazioni

stesse. Dopo che queste osservazioni hanno fatto conoscere la distanza *apparente*, si calcola la distanza *vera* spogliando le altezze dall' influenza della refrazione e della parallasse. In seguito questa *distanza vera*, riferita al primo meridiano, determina l' ora di questo meridiano.

Per facilitare i calcoli per mezzo dei quali si deduce l' ora del primo meridiano dalla distanza lunare, la *Connaissance des temps*, egualmentechè le diverse *Effemeridi*, contengono adesso delle tavole che danno le distanze del centro della luna dal sole, dai pianeti e dalle principali stelle, di 3 in 3 ore in tempo medio del primo meridiano. L' introduzione di queste tavole semplifica considerabilmente le operazioni, le cui minute particolarità non possono trovar posto in questo Dizionario.

LONGITUDINE (*Astron.*). Arco dell' ecclittica compreso tra il primo punto dell' Ariete o dell' equinozio e il circolo che passa per un astro e pei poli dell' ecclittica. *Vedi* LATITUDINE e CATALOGO.

Il sole è il solo astro di cui possa trovarsi immediatamente la *longitudine*, osservando la sua altezza al di sopra dell' orizzonte nell' istante del suo passaggio pel meridiano. Quest' altezza, tolta da quella dall' equatore se il sole è nell' emisfero meridionale, e in caso contrario diminuita dell' altezza dell' equatore, fa conoscere la *declinazione* del sole, e questa declinazione è il terzo lato di un triangolo sferico rettangolo, del quale gli altri due lati sono gli archi dell' equatore e dell' ecclittica compresi tra il punto equinoziale e il meridiano. Ora in questo triangolo si conosce, oltre la declinazione e l' angolo retto, l' angolo dell' equatore coll' ecclittica, cioè l' obliquità dell' ecclittica: così si possono facilmente calcolare gli altri due lati, uno dei quali, l' arco dell' equatore, è l' ascensione retta del sole, e l' altro, l' arco dell' ecclittica, è la sua longitudine. Quanto ai pianeti e alle stelle, bisogna preventivamente trovare le loro ascensioni rette e le loro declinazioni, e quindi la risoluzione di due triangoli sferici farà conoscere le loro latitudini e longitudini. Tutti questi problemi di astronomia sferica non richiedono altri soccorsi che i principj elementari della trigonometria.

LONGOMONTANO (CRISTIANO), discepolo di Ticone Brahé, è noto nella scienza per non poche pregiate osservazioni, per le sue tavole dei movimenti dei pianeti, e specialmente per un trattato di astronomia nel quale ha esposto le sue idee sopra un sistema misto del movimento della terra, poco noto non ostante la sua bizzarria. Sembra che Longomontano si prefiggesse di conciliare le dottrine di Tolomeo e di Copernico con quelle del suo maestro Ticone, che egli più particolarmente ammetteva, sebbene con alcune restrizioni. Così, egualmente che questo celebre osservatore, attribuiva un moto annuo al sole; ma, per ispiegare la successione dei giorni e delle notti, faceva girare come Copernico la terra sopra se stessa in ventiquattro ore da occidente in oriente. Le altre sue ipotesi, per la maggior parte contrarie ad una sana fisica, non meritano di essere rammentate. Il sistema di Longomontano ha avuto pochi partigiani; esso venne alla luce in un' epoca in cui l' immortale Kepplero si elevava alla cognizione delle leggi generali dei movimenti celesti, ed in cui per conseguenza nuovi errori non potevano più arrestare il progresso della scienza.

Longomontano, nato nel 1562 a Langsberg nella Danimarca, è un nuovo esempio di ciò che può una decisa volontà d' istruirsi di fronte ad un' assoluta mancanza di mezzi. Figlio di un povero agricoltore, a mala pena potè imparare a leggere e scrivere nella scuola del luogo nativo. Orfano in età di otto anni, fu costretto a procacciarsi la sussistenza col proprio lavoro, impiegando i pochi momenti di ozio che gli restavano nella lettura di qualche libro che a caso riuscivagli di trovare. Nel 1577 si recò a Wiborg, ove dimorò undici anni lavorando una parte della notte onde procurarsi del pane, e frequentando le lezioni dei

professori durante il giorno. Si trasferì in seguito a Copenaghen, e vi acquistò in breve tempo la stima de'.membri dell' università. Procurato essendosi alcune raccomandazioni per Tieone Brahé, andò a trovare quest' astronomo, il quale lo accolse cortesemente e lo rattenne presso di se dal 1589 al 1597 nell'isola di Huène in cui stabilito aveva il suo osservatorio. Longomontano gli fu utilissimo pei suoi calcoli e per le sue osservazioni astronomiche; ed essendoglisi affezionato lo accompagnò a Wandeuburg e quindi al castello di Benach presso Praga, che l'imperatore Rodolfo II aveva donato a Tieone. Ma dopo alcun tempo avendo esternato il desiderio di tornare in Danimarca, Tieone gli rilasciò un certificato espresso nei termini i più onorevoli. Longomontano andò a stabilirsi a Copenaghen, ove nel 1605 fu fatto professore di matematiche, impiego cui esercitò per quarant'anni nel modo il più distinto. Egli morì in quest' ultima città l' 8 Ottobre 1647. Ha scritto un numero grande di opere, ma la principale e la più importante è l' *Astronomia danica in duas partes distributa*, Amsterdam, 1622, in-4, ristampata parecchie volte. Longomontano nocque alla sua reputazione coi suoi scritti sulla quadratura del circolo che s' immaginava di aver trovata, senza che valessero a trarlo dal suo errore le rimostranze di G. Pell matematico inglese e di altri dotti. Si può su questo proposito consultare quanto ne ha scritto Montucla nella sua *Storia della quadratura del circolo*.

LORENZINI (Lorenzo), dotto matematico fiorentino, nato il 5 Luglio 1652 e morto il 25 Aprile 1721, fu discepolo del Viviani, e compose un trattato in dodici libri sulle sezioni coniche, nel quale giudicarono i dotti essere egli andato più oltre di Apollonio e dello stesso suo maestro. Tale opera non vide mai la luce, e conservasi con altri scritti del Lorenzini nella Biblioteca Magliabechiana. Di lui non si ha a stampa che un opuscolo intitolato: *Exercitatio geometrica, in qua agitur de dimensione omnium conicarum sectionum, curvae parabolicae, ec.*, Firenze, 1721, in-4. Su questo dotto si consulti l' elogio che ne ha scritto Fabroni nel tom. XI delle sue *Vitae Italorum doctrina excellentium*.

LORGNA (Antonio Maria), distinto matematico italiano, nato a Verona verso il 1730 da famiglia nobile, si applicò di buon' ora allo studio delle scienze e vi fece grandi e rapidi progressi: entrò nel corpo degl' ingegneri militari, di cui divenne colonnello, ed ottenne in seguito la cattedra di matematiche nel collegio militare di Verona. Fu allora ch' ei fondò la *Società Italiana per l' incoraggiamento delle scienze*, la quale pubblicò nel 1782 il primo volume de' suoi *Atti* col titolo di *Memorie di matematica e di fisica della Società Italiana*, Verona e Modena, in-4. Nel 1784 il cavalier Lorgna riportò dall' Accademia delle Scienze di Parigi un premio per una memoria sulla natura del salnitro. Ei godeva meritamente la reputazione di uno dei migliori geometri dell' Italia, quando morì a Verona il 28 Giugno 1796. Delle molte sue opere non citeremo che le seguenti: I *Della graduazione dei termometri a mercurio e della rettificazione dei barometri semplici*, Verona, 1765, in-4; II *Opuscula mathematica et physica*, ivi, 1770, in-4. Vi si osservano tra le altre le appresso memorie: *De locis planetarum in arbitiis ellipticis*; e *De thermometri usu in definiendis productionibus et contractionibus pendulorum*; III *De casu irreductibili tertii gradus, et seriebus infinitis exercitatio analytica*, ivi, 1771, in-4; IV *Specimen de seriebus convergentibus*, 1775, in-fol.; V *Saggi di statica e di meccanica applicata alle arti*, Verona, 1782, in-8; VI *Principj di geografia astronomica-geometrica*, ivi, 1789, in-8; VII Un numero grande di memorie inserite nella raccolta della *Società Italiana*, tra le quali sono specialmente da notarsi le appresso: *Sulla projezione delle carte marine* nel tom. V, e *Sulle variazioni finite nella trigonometria* nel tom. VII. Per altre notizie si ricorra all' elogio del Lorgna scritto da Luigi Palcani e che si legge nel tom. VIII della Raccolta della Società Italiana.

LOSANGA (*Geom.*). Paralellogrammo i di cui quattro lati sono eguali senza che i suoi angoli siano retti; si chiama ancora Rombo (*Vedi* Paralellogrammo).

LOSSODROMIA (*Navig.*). Linea che un vascello descrive sul mare facendo sempre vela con un medesimo vento. Essa è una curva che taglia tutti i meridiani sotto un angolo costante. Il suo nome è derivato da λοξὸς, *obliquo*, e da δρόμος, *corso*.

La *Lossodromia*, chiamata anco *linea lossodromica*, è una specie di *spirale logaritmica* la quale gira intorno del polo, che essa non incontra che all' infinito. *Vedi* Spirale.

LOUBÈRE (Antonio de la), gesuita e matematico francese, nato nel 1600 nella diocesi di Rieux in Linguadoca e morto a Tolosa nel 1664, ha scritto: I *Quadratura circuli et hyperbolae segmentorum, ex dato eorum centro gravitatis*, Tolosa, 1651, in-8; II *Propositiones geometricae sex, quibus ostenditur . . . non recte inferri a Galilaeo motum fore in instanti*, ivi, 1658, in-4; III *Veterum geometria promota in VII de cycloide libris*, ivi, 1660, in-4. Si veda ciò che dice Montucla nella sua *Storia delle Matematiche*, tom. II, pag. 68 e segg., sui metodi del p. La Loubère.

LOUVILLE (Giacomo Eugenio d'Allonville, cavaliere di), matematico francese, nato nel 1671, corse dapprima l' arringo delle armi che poi nel 1713 abbandonò per darsi interamente all' astronomia. In breve fu ammesso all' Accademia delle Scienze di Parigi, alla cui Raccolta somministrò non poche memorie ed osservazioni. Notasi tra le altre quella in cui espone un nuovo metodo per calcolare gli ecclissi e che leggesi nel tomo del 1724. Louville morì nel 1732.

LOWITZ (Giorgio Maurizio), dotto astronomo, nato nel 1722 a Furth presso Norimberga, si occupò assai della costruzione dei globi e delle carte geografiche. Dopo aver professato le matematiche a Gottinga ed essere stato alcun tempo direttore dell' osservatorio di Norimberga, si recò nel 1766 a Pietroburgo, ove fu fatto membro dell' Accademia delle scienze. Nel 1769 fu inviato a Gourief per osservare il passaggio di Venere, e nel tempo stesso fu incaricato di fare le livellazioni necessarie per lo scavo di un canale onde unire il Don col Volga. Egli era appunto occupato presso Dmitrefsk a tracciare il canale, quando fu preso e fatto trucidare dal ribelle Pougatschew che si era impadronito di quella città. I principali suoi scritti sono: I *Avviso intorno ai nuovi globi terrestri* (in tedesco), Norimberga, 1746, in-fol.; II *Spiegazione di due carte astronomiche, per l' intelligenza della projezione dell' ecclissi del di 25 Luglio* (in tedesco), ivi, 1748, in-4. Tale opera tradotta venne in francese da Delisle e ristampata a Parigi; III *Description complète ou second avertissement sur les grands globes célestes*, ivi, 1749, in-4; IV *Descrizione di un quarto di circolo astronomico* (in tedesco), ivi, 1751 in-4; V Parecchie memorie nelle Raccolte di Gottinga e di Pietroburgo.

LUCE (*Ottica*). Principio trascendente dell' universo materiale, che si manifesta particolarmente come causa della *visibilità*.

1. Le impressioni sensibili che ci fanno provare gli oggetti esterni sono generalmente prodotte dall' azione dell' urto immediato o mediato di questi oggetti sugli organi materiali dei nostri sensi. L' urto è immediato, quando vi ha *contatto* tra l' oggetto e l' organo, come nelle sensazioni del *tatto* e del *gusto*, ed anco come in quelle dell' *odorato*, perchè gli oggetti non ci sembrano odorosi che spargendo nello spazio delle particelle capaci di fare impressione sulle membrane che ricoprono i nervi olfattorj. È poi mediato, quando è trasmesso da una materia intermedia tra l' oggetto e l' organo, come nelle sensazioni dell' *udito*, nella quali il moto vibratorio dei corpi sonori è trasmesso all' orecchio dalle ondulazioni eccitate nell' aria circostante (*Vedi* Suono). Le sensazioni proprie dell' organo della *vista* effettuandosi sempre senza alcun contatto tra l' occhio e l' oggetto, è cosa

naturale l'ammettere, per analogia, o che i corpi *visibili* spargano intorno ad essi delle particelle sottilissime, il cui urto sugli organi della vista produca la visione di questi corpi, o che esistano nelle loro parti costituenti dei movimenti interni particolari, che si propaghino fino ai nervi ottici per mezzo delle ondulazioni che essi generano in una materia fluida intermedia.

Queste due ipotesi sono infatti le basi di due sistemi differenti scorti fino dalla più remota antichità, ma esposti con precisione soltanto da Cartesio e da Newton, e che dopo questi due grandi uomini tengono divise le opinioni dei fisici. Il primo supponeva l'universo ripieno di un fluido estremamente sottile ed elastico, ch'ei chiama *etere*, le cui ondulazioni prodotte dall'azione dei corpi *visibili*, agiscono sull'occhio, come le ondulazioni dell'aria prodotte dall'azione dei corpi *sonori* agiscono sull'orecchio. In questo sistema, che porta il nome di *sistema delle vibrazioni*, la causa della visibilità, la *luce*, è un movimento di vibrazione eccitato nell'etere dai corpi visibili, e che propagato di mano in mano in tutte le direzioni, si modifica a seconda delle resistenze che incontra. Newton ammetteva al contrario che la luce fosse una materia propria, un agente distinto della sostanza dei corpi, un fluido estremamente sottile, le cui molecole, lanciate in tutti i sensi dai corpi luminosi, muovonsi con una rapidità grandissima, e provano per parte degli oggetti materiali che esse incontrano diverse azioni, la natura e le intensità delle quali variano a seconda della natura degli oggetti. Questo sistema porta il nome di *sistema di emissione*.

Tutti i fenomeni conosciuti al tempo di Newton potendosi spiegare in un modo semplice e preciso per mezzo del sistema dell'emissione, l'autorità del suo autore, che aveva stabilito le leggi fondamentali della fisica celeste, aveva fatto abbandonare l'ipotesi di Cartesio, sì bene sviluppata in tutte le sue conseguenze matematiche da Huygens e da Eulero; ma le ultime scoperte di Young e soprattutto quelle di Fresnel hanno ricondotto i fisici moderni verso questa ipotesi, che sembra accordarsi più esattamente coi fatti. Ciò appunto avremo occasione di fare osservare nel corso della seguente esposizione.

2. *Propagazione della luce*. I corpi visibili si dividono in *luminosi* e in *illuminati*. Diconsi corpi luminosi quelli che spargono la luce intorno a sè, come il sole, le stelle, la fiamma e tutti i corpi in ignizione. I corpi illuminati sono quelli che non divengono visibili che per effetto della luce che essi ricevono dai primi.

Può facilmente riscontrarsi che la luce emanata da un corpo luminoso si sparge in tutte le direzioni intorno a questo corpo; perchè la fiamma di una bugia, per esempio, è visibile da tutti i punti della sfera della quale può immaginarsi che essa occupi il centro.

Ogni corpo luminoso può esser considerato come una riunione di *punti luminosi*, nella stessa guisa che ogni corpo materiale può considerarsi come la riunione di punti materiali. Basta allora esaminare il modo di azione di un solo punto luminoso per giungere a conoscere quello del loro aggregato. Supporremo dunque in ciò che saremo per dire che un corpo luminoso sia ridotto ad un solo punto.

3. La luce emanata da un punto luminoso penetra a traverso a tutti i gas, alla maggior parte dei liquidi e a non pochi solidi. I corpi che lasciano così passare la luce prendono il nome di *trasparenti*; quelli al contrario che la trattengono diconsi corpi *opachi*. Tra i corpi trasparenti, gli uni trasmettono completamente la luce, e lasciano scorgere distintamente a traverso alla loro sostanza tutte le forme degli oggetti, e si chiamano *diafani*; gli altri non trasmettono che una parte della luce che ricevono, e non permettono di distinguere la forma degli oggetti, essi diconsi *translucidi*. Il cristallo polito è diafano, il cristallo spulito è translucido.

4. In un mezzo diafano e perfettamente omogeneo, la trasmissione della luce si fa in linea retta. Questo fatto fondamentale si rileva dall' impossibilità che vi è di scorgere un punto luminoso se si trova un corpo opaco nella linea retta che può condursi dal punto luminoso al nostro occhio.

La direzione che segue la luce propagandosi si dice un *raggio luminoso*. Da ciò che ora abbiamo detto si rileva che questo raggio è una linea retta in tutti i mezzi trasparenti omogenei.

5. Quando un raggio di luce passa da un mezzo trasparente in un altro, prova alla superficie di contatto dei due mezzi un cangiamento di direzione, e si propaga nel secondo mezzo per una linea retta che non è più la stessa di quella della sua propagazione nel primo mezzo. Questo fenomeno porta il nome di *refrazione*.

6. Se, nel propagarsi a traverso di un mezzo trasparente, la luce cade sopra un corpo opaco, essa prova diverse modificazioni a seconda della natura della superficie del corpo. Quando la superficie è levigata, il raggio luminoso viene respinto indietro o *reflesso* in una direzione determinata; quando non è levigata, il raggio è anco allora reflesso, ma subisce alcuni cangiamenti importanti: il corpo diviene *illuminato*, vale a dire che ognuno dei punti della sua superficie agisce come se fosse luminoso di per se stesso, e respinge la luce verso tutti i punti del mezzo trasparente che possono ad esso unirsi con linee rette. Tutta questa luce respinta, e in virtù della quale questo corpo è divenuto visibile, non provenendo che dalla dispersione del raggio luminoso, è facile il comprendere che ogni raggio reflesso è sempre debolissimo comparativamente a quello che si trova per così dire suddiviso all' infinito: perciò l' impressione che produce sull' occhio un corpo illuminato è sempre meno forte di quella che resulta dalla luce abbagliante di un corpo luminoso.

Un' altra causa concorre ancora potentemente a indebolire l' impressione della luce reflessa: la reflessione non è mai completa, perchè tutti i corpi opachi, anco i più levigati, assorbiscono una quantità più o meno grande della luce che ricevono. Ma ciò che interessa di osservare si è che la luce irregolarmente reflessa produce un' impressione sull' occhio differente assai da quella della luce primitiva; questa impressione è il *colore* che attribuiamo agli oggetti visibili, e che realmente non appartiene a questi oggetti, perchè come meglio vedremo in seguito, esso risiede nel principio stesso della luce.

7. La propagazione della luce presenta dunque tre modi differenti: 1° propagazione diretta, o in linea retta; 2° propagazione indiretta per *reflessione*; 3° propagazione indiretta per *refrazione*. Le leggi della propagazione diretta formano l' oggetto dell' *ottica propriamente detta*; le leggi della propagazione per reflessione quello della *catottrica*; e le leggi della propagazione per refrazione sono l' oggetto della *diottrica*. Si comprende ancora sotto il nome di *ottica generale* il complesso di questi tre rami fondamentali della teoria della luce. *Vedi* Ottica.

8. *Propagazione diretta*. Abbiamo già indicato il fenomeno principale che ci ha fatto concludere che, *in un mezzo omogeneo, la luce si trasmette in linea retta*. Si può ancora verificare questo principio lasciando penetrare per un piccolo foro un fascio di luce solare in una camera oscura: la polvere in sospensione nell'aria trovandosi illuminata in tutta la direzione del fascio luminoso fa vedere che questa direzione è rettilinea.

9. La luce emanata da un punto luminoso, propagandosi per tutti i raggi della sfera di cui questo punto è il centro, deve necessariamente diminuire d'intensità a misura che si allontana dalla sua sorgente; perchè, se s' immaginano due sfere concentriche a questa sorgente, ognuna di esse riceverà tutta la luce emanata

dal punto luminoso; dimanierachè una estensione qualunque presa sulla sfera più grande riceverà una quantità di luce minore della stessa estensione presa sulla più piccola. Le quantità di luce ricevute da queste due estensioni eguali saranno in ragione inversa delle superficie intere di cui fanno parte, o in ragione inversa dei quadrati delle distanze loro dal punto luminoso. Così, *l'intensità della luce emanata da un punto luminoso diminuisce in ragione diretta del quadrato della distanza.*

Questa legge non è esatta che quando la luce si propaga nel vuoto; perchè, nei mezzi diafani materiali, una parte ne rimane sempre assorbita, e il decrescimento d'intensità si effettua più rapidamente. Ma nell'aria atmosferica si può considerare come vera, specialmente se le distanze non sono grandissime.

Da ciò che precede si rileva che qualunque superficie illuminata può considerarsi come la base di una piramide il cui vertice è nel punto luminoso donde emana la luce. Se invece di un solo punto luminoso se ne immaginano parecchi, la superficie riceverà una luce tanto più intensa quanto più questi punti saranno numerosi e vicini ad essa.

Avremo però luogo di osservare che esistono delle circostanze particolari nelle quali un corpo illuminato può divenire più oscuro quando si aggiunge una nuova luce a quella che esso riceveva primitivamente, il che non sarebbe possibile in nessun caso immaginabile se la luce fosse una sostanza distinta emessa dai corpi luminosi.

10. Si è cercato di confrontare l'intensità della luce somministrata da sorgenti diverse; ma fino ad ora i metodi impiegati hanno dato risultati così discrepanti che non si possono considerare nemmeno come lontane approssimazioni; perchè, per citare un esempio, l'intensità della luce solare è stata trovata 94500 volte più grande di quella della luna da Leslie, 800000 volte più grande da Wollaston, e 256289 da Bouguer. Confrontata colla luce di una bugia, quella del sole è 12000 volte più grande, secondo Leslie, e 30000 volte secondo Bouguer. Faremo però osservare che non deva confondersi l'intensità dell'*illuminazione* colla intensità della *luce*; perchè quest'ultima dipende dalla natura del corpo luminoso, mentre la prima dipende dalla natura del corpo illuminato, vale a dire dalla maniera colla quale assorbe esso o riflette la luce.

11. Quando un corpo opaco intercetta una parte dei raggi emanati da un punto luminoso, esiste dietro a questo corpo uno spazio più o meno grande privo di luce, che dicesi l'*ombra* del corpo. Se in questo spazio si trovasse un altro corpo, il quale non ricevesse alcun raggio di luce, esso sarebbe invisibile. *Vedi* Ombra.

12. Quantunque la trasmissione della luce si faccia con una rapidità così grande da rendere impossibile il misurarla sulla superficie della terra, non è per questo che essa sia istantanea; ma, per osservare la più piccola differenza tra l'istante dell'apparizione di un punto luminoso e quello in cui la sua luce illumina i corpi da cui si trova separato da un mezzo trasparente, bisogna ricorrere alle osservazioni astronomiche. Il pianeta di Giove è accompagnato da varj satelliti che girano intorno a lui, e che per noi sono alternativamente visibili e invisibili secondo che sono illuminati dalla luce del sole o trovansi nell'ombra che dietro di sè Giove projetta nello spazio. Ora, il primo di questi satelliti descrive la sua orbita nell'intervallo di 42 ore 28′ 35″ o di circa 42 ore e mezzo; talmentechè in ogni periodo di 42 ore e mezzo s'immerge una volta nell'ombra del pianeta e poco dopo ne esce. Questo fenomeno, simile in tutto agli ecclissi di luna, si chiama un'*occultazione*. Ora, se la terra fosse sempre ad una stessa distanza da Giove, o se la luce tramandata dal satellite giungesse e noi sempre nello stesso tempo, 42 ore e mezzo dopo che si fosse osservato uscire dall'ombra

il satellite, dovrebbe potersi osservare di nuovo lo stesso fenomeno, vale a dire che gli ecclissi si succederebbero ad intervalli esatti di 42 ore e mezzo. Ma ciò non ha luogo: perchè, quando si osservano successivamente gli ecclissi dei satelliti, nel periodo di tempo durante il quale la terra si avvicina a Giove, si trova che l'intervallo tra il primo ed il secondo ecclisse è più lungo dell'intervallo tra il secondo e il terzo, che questo è più lungo dell'intervallo tra il terzo e il quarto e così successivamente; mentre, al contrario, se si fanno le stesse osservazioni nel periodo di tempo nel quale la terra si allontana da Giove, si trova che l'intervallo tra il primo e il secondo ecclisse è più corto dell'intervallo tra il secondo e il terzo e così di seguito. In generale, l'intervallo tra due ecclissi aumenta se nella sua durata la terra si è allontanata, diminuisce se la terra si è avvicinata. Questi fatti, osservati per la prima volta dall'astronomo danese Roemer, dimostrano ad evidenza che la luce impiega un tempo tanto più lungo per giungere da Giove alla terra quanto più grande è la distanza tra questi due corpi.

Misurando con accuratezza la differenza dei tempi tra i due limiti estremi delle distanze, si è trovato che il tempo impiegato dalla luce a percorrere la lunghezza del diametro dell'orbita terrestre è di 16′ 26″; e questa lunghezza essendo di 68 in 69 milioni di leghe, ne resulta che la velocità della luce è di circa 70000 leghe per secondo. Dalle stesse osservazioni si è rilevato ancora che questa celerità è uniforme. Non possiamo formarci un'idea di questa velocità prodigiosa che confrontandola con quelle che ci sembrano grandissime. Par esempio, una palla di cannone impiegherebbe più di 17 anni per giungere al sole, supponendo che conservasse la sua velocità iniziale; cosicchè farebbe in un anno la metà del cammino che la luce fa in un minuto.

13. *Reflessione della luce.* Quando si fa penetrare un raggio solare in una camera perfettamente oscura, se si pone un corpo levigato nella sua direzione, il raggio luminoso si rompe sulla superficie del corpo e porta sulla pareti della camera un'immagine del sole. Oltre questa reflessione regolare, se n'effettua un'altra irregolare, poichè dai diversi punti della camera oscura si distingue la porzione dello specchio sulla quale cade il raggio. Quest'ultima, all'opposto della prima, è tanto più vivace quanto meno il corpo è levigato.

Per non considerare adesso che la reflessione regolare, diremo che se s'immagina una retta perpendicolare alla superficie levigata nel punto in cui è incontrata dal raggio solare, l'angolo che forma questa perpendicolare col raggio si chiama *angolo d'incidenza*, e l'angolo che essa forma col raggio reflesso si dice *angolo di reflessione*. Questi due angoli sono sempre situati nello stesso piano e sono eguali: proprietà che costituisce questa legge fondamentale della catottrica: *Quando un raggio di luce è reflesso da una superficie qualunque, l'angolo d'incidenza è eguale all'angolo di reflessione.*

Questa legge, che può facilmente verificarsi coll'esperienza, si dimostra per mezzo di considerazioni teoriche nei due sistemi dell'emissione e delle vibrazioni.

14. La reflessione regolare di cui adesso trattiamo non rende visibile che il corpo luminoso, perchè il raggio reflesso e il raggio incidente non debbonsi considerare che come un solo e medesimo raggio la cui direzione ha subito un cangiamento. Per conseguenza, ponendo l'occhio nella direzione del raggio reflesso, si vedrebbe unicamente il corpo luminoso se sopra la superficie levigata non si effettuasse nessuna reflessione irregolare: ma tutte le superficie producono delle reflessioni irregolari, ed è appunto questa circostanza che forma la condizione necessaria della visibilità dei corpi che non sono visibili per se stessi.

La quantità di luce reflessa regolarmente e irregolarmente non è mai eguale alla quantità di luce somministrata dal corpo luminoso, perchè sempre ve ne ha una parte assorbita dal corpo reflettente. Questa parte si estingue quando il cor-

po è opaco, lo attraversa quando è trasparente. L'assorbimento più o meno grande della luce per parte dei corpi opachi congiunto all'enorme sua velocità spiega l'oscurità istantanea che si produce in un appartamento coll'impedire che vi penetrino i raggi diretti.

15. Ogni superficie bastantemente levigata da effettuare una reflessione regolare si dice *specchio*. Fra i corpi solidi, soltanto alcuni metalli ed alcuni amalgami sono suscettibili di ricevere un pulimento perfetto. Gli specchi di cristallo non sono che specchi metallici, perchè non debbono la loro proprietà che all'amalgama di mercurio e di zinco del quale è rivestita la loro superficie posteriore: ma siccome il vetro nella sua qualità di corpo trasparente fa provare una refrazione ai raggi luminosi che lo attraversano nell'uscire dall'aria, gli specchi impiegati nelle esperienze catottriche non debbono essere che superficie metalliche levigate.

16. Il principio fondamentale enunciato di sopra (13) si applica ai raggi luminosi emanati da qualunque sorgente: esso è vero tanto per la luce naturale che ci viene dal sole quanto per tutte le luci artificiali che è in nostra facoltà di produrre, tanto pei raggi diretti quanto pei raggi già reflessi regolarmente o irregolarmente. Per mezzo di questo principio generale si spiegano con molta facilità, come già abbiamo fatto all'articolo Catottrica, tutti i fenomeni che presentano gli specchi, secondo la natura della loro superficie.

17. La quantità di luce reflessa da uno stesso corpo dipende a un tempo e dal pulimento della sua superficie e dalla grandezza dell'angolo d'incidenza. Per uno stesso angolo, questa quantità è tanto più grande quanto il pulimento è più perfetto; per uno stesso pulimento, essa cresce coll'angolo d'incidenza. Un esperienza curiosa dimostra quest'ultimo fatto: se si prende una lastra di vetro spulito, e se si pone l'occhio in prossimità della sua superficie, in modo da ricevere dei raggi reflessi sotto un angolo d'incidenza molto grande, si scorgeranno le immagini degli oggetti circonvicini colla stessa nettezza che con uno specchio. Per ogni altra particolarità su questo proposito rinvieremo il lettore all'articolo Catottrica.

18. *Refrazione della luce.* Si chiama *refrazione* il cangiamento di direzione che prova un raggio luminoso che passa obliquamente da un mezzo trasparente in un altro. Sia AB un raggio luminoso (*Tav.* CLXXIV, *fig.* 1); supponiamo che dopo essersi propagato nell'aria incontri in B la superficie di una massa d'acqua MN; invece di continuare a propagarsi secondo la retta BC', prolungamento di AB, esso si romperà nel punto B entrando nell'acqua, e prenderà una direzione BC, determinata secondo una legge che ora passeremo ad esporre.

Immaginiamo una retta DE perpendicolare nel punto B alla superficie di separazione MN dei due mezzi; l'angolo ABD del raggio incidente sarà ciò che si dice l'*angolo d'incidenza*, e l'angolo CBE del raggio refratto, colla stessa perpendicolare, sarà *l'angolo di refrazione*. Ora, la relazione generale che unisce questi due angoli, per due mezzi trasparenti qualunque, si enuncia come segue:

Quando un raggio luminoso passa da un mezzo in un altro, questo raggio vien refratto in modo che il seno dell'angolo d'incidenza e quello dell'angolo di refrazione stanno tra loro in un rapporto costante.

Questo principio fondamentale della diottrica, ed uno dei più importanti dell'ottica generale, è stato scoperto da Cartesio. *Vedi* Ottica.

19. Tutti i mezzi nei quali la luce può propagarsi si dicono *mezzi refrangenti*, perchè tutti fanno provare una deviazione o refrazione ai raggi luminosi nel momento che questi vi penetrano per attraversarli. Il vuoto è pure un mezzo refrangente, perchè la luce che esce da un altro mezzo si refrange nell'entrarvi. Un mezzo è più refrangente rispetto ad un altro, quando il raggio refratto si

avvicina alla perpendicolare, ossia quando l'angolo di refrazione è più piccolo di quello d'incidenza: è all'opposto meno refrangente quando il raggio refratto si allontana dalla perpendicolare, ossia quando l'angolo di refrazione è maggiore di quello d'incidenza.

19 *bis*. Per verificare coll'esperienza il principio fondamentale accennato di sopra (18), si prende un vaso di vetro di forma emisferica NP'N' (*Tav.* CLXXIV, *fig.* 2); si empie d'acqua in modo che il livello NN' giunga al centro C della sfera, e verso questo centro si dirige un piccolo fascio di luce solare sotto diverse inclinazioni. Un circolo graduato il cui centro coincide con C, e che può situarsi a piacere nel piano del raggio luminoso, serve a misurare gli angoli che questo raggio fa colla verticale PP' prima e dopo la refrazione. Il cammino del raggio refratto è facile a riconoscersi dal punto in cui esso esce dal vaso per rientrare dall'acqua nell'aria: se, per esempio, il raggio incidente è LC e il raggio refratto CR, il punto R, ove quest'ultimo esce dal vaso per continuare il suo cammino nell'aria, fa conoscere l'arco RP' che misura l'angolo di refrazione RCP'. Si può in tal modo riscontrare che il rapporto tra le rette LD e RF, che sono respettivamente i seni degli angoli PCL e RCP', è una quantità costante; vale a dire che per qualunque altro angolo d'incidenza L'CP, il cui angolo corrispondente di refrazione è R'CP', il rapporto dei seni L'D' ed R'F' è eguale a quello dei seni LD e RF; perchè, dopo aver trovato, mediante la misura degli angoli PCL e RCP', che quest'ultimo rapporto è sensibilmente

$$\frac{LD}{RF} = \frac{4}{3},$$

si trova egualmente, per mezzo della misura degli angoli PCL' e R'CP', che il rapporto dei loro seni è

$$\frac{L'D'}{R'F'} = \frac{4}{3},$$

e che lo stesso avverrebbe per qualunque altra incidenza. Si può inoltre osservare che *l'angolo di refrazione è sempre situato nello stesso piano dell'angolo d'incidenza corrispondente*.

20. Sostituendo all'acqua del vaso, dell'alcool o qualunque altro liquido, si troverebbe nella stessa guisa che vi è sempre un rapporto costante tra i seni degli angoli d'incidenza e di refrazione; ma questo rapporto non sarebbe più di $\frac{4}{3}$: esso sarebbe più grande o più piccolo secondo che il liquido di cui si facesse uso fosse più o meno refrangente dell'acqua. In generale, se s'indica con I l'angolo d'incidenza, e con R quello di refrazione, la legge di refrazione per due mezzi qualunque potrà rappresentarsi colla relazione

$$\frac{\text{sen I}}{\text{sen R}} = n,$$

ove n è un numero costante per due medesimi mezzi, ma che varia con essi. Questo numero n si dice *indice di refrazione*.

21. L'apparecchio precedente può servire ancora a verificare un altro fatto importante, quale è quello che il raggio luminoso nel ripassare dall'acqua nell'aria forma un secondo angolo di refrazione eguale al primo angolo d'incidenza; vale a dire che rappresentando con AB (*Tav.* CLXXIV, *fig.* 1) un raggio incidente,

e con BC un raggio refratto, la luce che percorre la linea spezzata ABC, venendo da A, percorrerebbe la stessa linea, se si propagasse in senso contrario, venendo cioè da C; l'angolo di refrazione sarebbe allora l'angolo d'incidenza, e quello d'incidanza l'angolo di refrazione. Questa proprietà si esprime in un modo generale dicendo che *un raggio che torna indietro ripassa esattamente per la stessa via.* Da ciò risulta che se è n l'indice di refrazione quando la luce passa da un mezzo A in un mezzo B, sarà $\frac{1}{n}$ l'indice di refrazione quando all'opposto essa passerà dal mezzo B nel mezzo A. Così, essendo $\frac{4}{3}$ l'indice di refrazione dell'acqua rapporto all'aria, sarà $\frac{3}{4}$ quello dell'aria rispetto all'acqua.

22. Analizzando le conseguenze della legge rappresentata dalla formula

$$\frac{\operatorname{sen} I}{\operatorname{sen} R} = n,$$

si riconosce tosto che se l'angolo d'incidenza è nullo, vale a dire se il raggio incidente è perpendicolare alla superficie del secondo mezzo, l'angolo di refrazione è del pari nullo, o, in altri termini, non vi ha refrazione, e il raggio incidente penetra in linea retta senza deviare; perchè non potrebbe aversi $\frac{o}{\operatorname{sen} R} = n$, a meno che non si avesse $\operatorname{sen} R = o$. Il che d'altronde vien confermato anco dalla esperienza. Avendosi la massima incidenza quando il raggio è parallelo alla superficie di separazione dei mezzi, caso in cui $I = 90°$ e $\operatorname{sen} I = 1$, allora si avrà

$$\frac{1}{\operatorname{sen} R} = n,$$

donde

$$\operatorname{sen} R = \frac{1}{n}.$$

Ma, supponendo che la luce torni indietro, o che essa ripassi dal secondo mezzo nel primo facendo un angolo d'incidenza il cui seno sia $\frac{1}{n}$, l'angolo di refrazione sarebbe di 90°, e per conseguenza il raggio refratto sarebbe parallelo alla superficie di separazione: esso non uscirebbe dunque dal mezzo in cui si propaga. Lo stesso a più forte ragione accaderebbe se il seno dell'angolo d'incidenza fosse più grande di $\frac{1}{n}$. In generale, quando un raggio passa da un mezzo refrangente in un altro mezzo meno refrangente, esiste sempre un limite per l'angolo d'incidenza, al di là del quale il raggio non può più uscire dal primo mezzo.

23. La formula dunque non è applicabile quando l'angolo d'incidenza è maggiore dell'angolo limite, e questa circostanza si manifesta per mezzo dei valori assurdi che si ottengono in tal caso. Per esempio, l'indice di refrazione del-

l'acqua rispetto all' aria essendo $\frac{4}{3}$, si ha, facendo $I=90°$,

$$\text{sen}\, R=\frac{3}{4};$$

donde si conclude $R=48° \, 35'$: tale è il valore dell' *angolo limite*, e tutti i raggi che si presenteranno per passare dall' acqua nell'aria, sotto un maggior angolo d'incidenza, non potranno uscire dall'acqua. Ora, assegnando nella formula a sen R dei valori più grandi di $\frac{3}{4}$, si ottengono per sen I dei valori maggiori di 1, o più grandi del raggio del circolo, il che è assurdo.

24. Se la formula diviene insufficiente a farci conoscere il cammino del raggio luminoso al di là dell' angolo massimo d' incidenza, l' esperienza ci dimostra che questo raggio si riflette completamente nel mezzo che esso non può abbandonare, facendo un angolo di reflessione eguale a quello d'incidenza. Supponendo per esempio che un raggio CO (*Tav.* CLXXIV, *fig.* 3) si presenti perpendicolarmente alla superficie di separazione dei due mezzi, e che successivamente vada inclinandosi prendendo le direzioni EO, FO, ec., in primo luogo esso uscirà pel prolungamento della perpendicolare CO, quindi farà degli angoli di refrazione che saranno più grandi di quelli d'incidenza e che andranno crescendo più rapidamente di questi ultimi: quando l' angolo d' incidenza EOC sarà eguale all' angolo limite, il raggio refratto coinciderà con OB; ma subito che il raggio incidente formerà un angolo FOC più grande dell' angolo limite, esso diverrà compiutamente reflesso e formerà un angolo di reflessione COF', eguale a quello d'incidenza FOC. Non vi ha continuità nel passaggio dalla refrazione alla reflessione interna.

Questa reflessione interna essendo totale, il che non avviene mai con gli specchi del pulimento il più perfetto, produce delle immagini più brillanti di quelle che possono osservarsi in questi specchi. Se ne può fare facilmente l' esperienza empiendo d'acqua un vaso di vetro (*Tav.* CLXXIV, *fig.* 4) e ponendo l' occhio in O in una direzione al di sopra dell' angolo limite: la superficie dell' acqua darà come uno specchio, ma con una maggior vivacità, le immagini degli oggetti che vi sono immersi.

25. La determinazione degl' *indici di refrazione* dei diversi mezzi refrangenti gli uni rispetto agli altri essendo di una grande importanza, dobbiamo avvertire una proprietà che dà un mezzo semplicissimo per trovare l' indice di refrazione per un raggio che passa da un mezzo in un altro, quando si conoscono quelli di questi due mezzi rispetto a un terzo. È provato dall' esperienza che applicando l' una sull' altra due lastre trasparenti parallele, aventi poteri refrangenti diversi, i raggi incidenti che penetrano per una delle facce di questo sistema escono parallelamente a sè stessi dalla faccia opposta: perchè, come può facilmente osservarsi, gli oggetti che si guardano a traverso a queste lastre non appariscono punto alterati nelle loro posizioni. Sia dunque a (*Tav.* CLXXIV, *fig.* 5) l' angolo d'incidenza primitivo, a' quello di refrazione nella prima lastra, b l' angolo d' incidenza in questa lastra, e b' l' angolo di refrazione nella seconda lastra: sia finalmente c l' angolo d' incidenza nella seconda lastra, e c' l'angolo di sortita del sistema, o come comunemente si dice l' *angolo di emergenza*; per ciò che precede si avrà $\text{sen}\, a = \text{sen}\, c'$. Ora, essendo n l' indice di refrazione della prima lastra rispetto all'aria, ed m quello della seconda lastra parimente rispetto all'aria, si avrà

$$\frac{\text{sen}\, a}{\text{sen}\, a'}=n, \quad \frac{\text{sen}\, c'}{\text{sen}\, c}=m,$$

e per conseguenza $\operatorname{sen} a = n \operatorname{sen} a' = n \operatorname{sen} b$, $\operatorname{sen} c' = \operatorname{sen} a = m \operatorname{sen} e = m \operatorname{sen} b'$; donde si ha

$$\frac{\operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} b'} = \frac{m}{n};$$

vale a dire che l'indice di refrazione della seconda lastra rapporto alla prima è eguale al rapporto inverso del loro indici respettivi rapporto all'aria. La relazione sarebbe la stessa se gl'indici respettivi delle due lastre si riferissero a qualunque altro mezzo diverso dall'aria. Sapendo per esempio che l'indice del diamante rispetto al vuoto è 2,755, e quello dell'alcool sempre rispetto al vuoto è 1,374, se ne concluderà immediatamente che l'indice di refrazione del diamante rispetto all'alcool è eguale a

$$\frac{2,755}{1,374} = 2,005.$$

In seguito indicheremo il modo di determinare gl'indici di refrazione dei diversi mezzi refrangenti rispetto all'aria.

26. La disposizione dei raggi che attraversano un mezzo terminato da superficie piane e situato nell'aria o in qualunque altro mezzo refrangente presenta non poche particolarità notabilissime. Supponiamo che un raggio luminoso, che si propaga nell'aria, incontri nel suo passaggio una massa di vetro, e che l'attraversi entrando ed uscendo per due superficie piane: si presenteranno due casi; o le superficie sono parallele, ovvero sono inclinate l'una sull'altra. Nel primo caso (*Tav.* CLXXIV, *fig.* 6), siccome il raggio deve uscire facendo colla perpendicolare nel punto di emergenza un angolo perfettamente eguale all'angolo d'incidenza (21), ed essendo d'altronde parallele le facce AB e CD, il raggio incidente e il raggio emergente sono paralelli tra loro. Nel secondo caso, le due superficie facendo un angolo qualunque BAC (*Tav.* CLXXIV, *fig.* 7), e il raggio incidente *ab* dovendo avvicinarsi alla perpendicolare *nm* perchè il vetro è più refrangente dell'aria, il raggio refratto *be* deve allontanarsi dal vertice A dell'angolo che fanno tra loro le intersezioni delle due superficie del vetro col piano di questo raggio, e siccome emergendo in *e* deve esso allontanarsi dalla perpendicolare *m'n'*, così si allontanerà di nuovo dal vertice A; talmentechè l'effetto di un mezzo refrangente angolare sarà quello di allontanare il raggio dal vertice dell'angolo. Se il raggio refratto *be* fosse perpendicolare alla faccia AC, emergerebbe senza una seconda refrazione; ma se incontrasse questa faccia facendo colla perpendicolare un angolo maggiore dell'angolo limite (24), resterebbe interamente reflesso internamente, e per conseguenza respinto sulla prima faccia, ove proverebbe una seconda reflessione che lo farebbe ritornare sulla seconda faccia, e così di seguito. Nella disposizione della figura, il raggio incidente essendo diretto verso il vertice A, i raggi successivamente reflessi anderebbero di mano in mano dimiuuendo la loro inclinazione sulle facce AC e AB, e finalmente dopo un numero più o meno grande di reflessioni vi sarebbe un raggio emergente: ma se il raggio incidente fosse diretto verso l'apertura dell'angolo BAC, i raggi reflessi s'inclinerebbero sempre più sulle facce del mezzo e non potrebbero mai uscirne. Queste diverse circostanze possono essere facilmente rappresentate per mezzo di costruzioni geometriche o per mezzo di formule semplicissime, e quando l'angolo A è dato, è facile il determinare se esiste o non esiste un raggio emergente per un dato angolo d'incidenza.

27. Ogni mezzo refrangente, avente due facce piane inclinate tra loro, si chiama in ottica un *prisma*, tanto se sia un vero prisma geometrico quanto se ne sia soltanto una porzione; il *vertice* del prisma è la retta lungo la quale si tagliano le

due facce, o lungo la quale esse si taglierebbero se fossero sufficentemente prolungate. La *base* del prisma è una terza faccia opposta al vertice, sia che realmente essa esista o che non esista. L' angolo del prisma, che si chiama ancora l' *angolo refrangente*, è l'angolo delle due facce. Quando un raggio luminoso penetra per una delle facce ed esce dall' altra, si dice che esso *attraversa il prisma*. In tutto ciò che saremo per dire, non considereremo che dei prismi completi; ma i fenomeni che questi corpi ci offriranno sarebbero gli stessi per qualunque porzione di prismi geometrici, purchè le due facce per le quali la luce entra ed esce siano piane ed inclinate l' una sull' altra.

28. La deviazione che prova un raggio di luce nell' attraversare un prisma produce delle apparenze differenti secondo la posizione del prisma. Quando la base del prisma è orizzontale e la costola è in alto, gli oggetti che possono scorgersi, avvicinando l'occhio ad una delle facce per ricevere la luce che è entrata per l' altra, si vedono come elevati verso il vertice del prisma, e i loro orli orizzontali compariscono fregiati di tutti i colori dell' iride: se il vertice è al basso, la deviazione degli oggetti segue in senso inverso. Quando il prisma è situato verticalmente, la deviazione ha sempre luogo verso il vertice; ma allora sono gli orli verticali degli oggetti che si colorano. In generale, qualunque sia la posizione del prisma, la deviazione ha sempre luogo verso il vertice, perpendicolarmente alle costole, e la colorazione si effettua paralellamente a queste costole, ma sempre verso i soli orli degli oggetti, talmentechè sono i soli orli paralelli alle costole quelli che si coloriscono

29. Si dice *angolo di deviazione* l' angolo che l' immagine diretta di un oggetto fa coll' immagine deviata da un prisma, quando l' occhio si suppone situato in sufficiente lontananza da potere ricevere nel tempo medesimo il raggio diretto e il raggio refratto. Sia per esempio LI (*Tav.* CLXXV, *fig.* 1) un raggio incidente che emerge nella direzione I'O ed è ricevuto dall' occhio posto in O ad una certa distanza dal prisma; se OL' è un raggio diretto venuto dal medesimo punto luminoso da cui è emanato il raggio incidente LI, l' *angolo di deviazione* sarà l'OL'.

Quest' angolo di deviazione può essere più o meno grande, secondo la posizione dal prisma; perchè, mentre si osserva l' oggetto refratto, se si fa girare il prisma sopra sè stesso, l' oggetto sembra cambiar di posto ed avvicinarsi o allontanarsi, senza però uscire da due limiti. Vi ha dunque una deviazione minima ed una deviazione massima.

Si dimostra facilmente che la deviazione minima ha luogo quando gli angoli d' incidenza e di emergenza sono eguali. In questa posizione particolare, gli angoli SII' e SI'I essendo necessariamente eguali, il triangolo ISI' è isoscele, e la metà dell' angolo S al vertice, ossia dell' angolo refrangente del prisma, è il complemento di ciascuno degli angoli alla base, poichè

$$S = 180^\circ - 2SII', \quad e \quad \frac{1}{2}S = 90^\circ - SII'.$$

Ora, l'angolo SII' è esso pure complemento dell'angolo di refrazione I'IN'; dunque, nel caso della deviazione minima, l' angolo di refrazione che ha luogo nel passaggio del raggio luminoso dall' aria nella sostanza del prisma è eguale alla metà dell' angolo refrangente. È per mezzo di questa relazione che si giunge a determinare gl' indici di refrazione delle diverse sostanze.

30. Per indicare i principj di questa determinazione, conducismo OB parallela a SA e OB' parallela a SA', ed osserviamo che indicando con I l' angolo d' incidenza LIN, con R l' angolo di refrazione N'II', con G l' angolo refrangente del prisma, si avrà, essendo D la deviazione minima l'OL',

$$D = 180^\circ - L'OB - BOB' - B'OE;$$

ma

$$L'OB = B'OE = LIA = 90^{\circ} - I,$$

dunque

$$D = 2I - G,$$

donde

$$I = \frac{D + G}{2}:$$

sostituendo ora questo valore egualmente che quello di $R = \frac{G}{2}$ nell' espressione del n.° 22, si otterrà la relazione

$$n = \frac{\text{sen} \frac{1}{2}(D + G)}{\text{sen} \frac{1}{2} G},$$

per mezzo della quale si può trovare l' indice di refrazione, mediante la sola osservazione della deviazione minima, con un prisma il cui angolo refrangente sia noto.

31. Se la sostanza che si vuol provare è solida, si costruirà con essa un prisma che si porrà verticalmente ad una gran distanza da un oggetto preso di mira. Alla distanza di pochi passi dal prisma si porrà un circolo graduato armato di due canocchiali mobili, e, dopo aver diretto il primo canocchiale sulla mira, si dirigerà il secondo in modo da ricevere l' immagine della mira refratta dal prisma: quindi si farà girare il prisma e il canocchiale finchè si giunga a trovare la deviazione minima, il che è facile dopo pochi tentativi. Ottenuta questa deviazione, l' angolo dei canocchiali presenta sul lembo del circolo la sua misura, e non occorre più altro che sostituirla nella relazione precedente, unitamente al valore dell' angolo del prisma, per conoscere l' indice cercato.

Questo metodo, dovuto a Newton, può esser pure impiegato per i liquidi ed anco pei gas, chiudendoli in un prisma vuoto formato di lastre di vetro.

32. I fisici indicano col nome di *potenza refrattiva* di una sostanza il quadrato del suo indice di refrazione, rapporto al vuoto, diminuito dell' unità: questa quantità si rappresenta in generale con $n^2 - 1$. Chiamano essi *potere refrangente* la potenza refrattiva divisa per la densità della sostanza. Queste denominazioni sono state adottate, perchè, nel sistema dell'emissione, $n^2 - 1$ esprime l' accrescimento del quadrato della celerità della luce nel suo passaggio dal vuoto in un mezzo refrangente: il potere refrangente è la stessa cosa che la potenza refrattiva per l' unità di densità. Nel sistema delle ondulazioni la potenza refrattiva dipende dal grado di condensazione in cui si trova l' etere contenuto nella sostanza refrangente. Faremo osservare che i poteri refrangenti dell' aria e dei gas essendo piccolissimi rapporto a quelli degli altri corpi, si può sempre senza errore sensibile prendere per l' indice di refrazione di questi corpi, rapporto al vuoto, quello che si osserva rapporto all' aria.

I sigg. Biot e Arago hanno stabilito come principio fondamentale, che *le potenze refrattive di uno stesso gas sono proporzionali alla sua densità*, o, il che è lo stesso, che *il potere refrangente di un gas è lo stesso a qualunque temperatura e a qualunque pressione.* Dulong ha dimostrato che questo principio aveva pure luogo per le mescolanze dei gas, talmentechè la potenza refrattiva di una mescolanza di gas e di vapori è eguale alla somma delle potenze refrattive dei gas componenti: ma, se vi ha combinazione chimica nella mescolanza, la potenza refrattiva del gas composto non ha più nessun rapporto con quelle dei suoi elementi.

33. Basta conoscere l' indice di refrazione di un mezzo refraugente rapporto al vuoto per trovare immediatamente la sua potenza refrattiva: sapendo, per esempio, che l' indice di refraziooe dell' acqua piovana è $\frac{529}{396}$, si ha

$$\textit{Potenza refrattiva dell' acqua} = \left(\frac{529}{396}\right)^2 - 1 = 0{,}7845.$$

Ecco, secondo le esperienze più recenti gl' indici di refrazione di diverse sostanze colle potenze refrattive e coi poteri refrangenti che ne risultano.

TAVOLA

degl' indici di refrazione, delle potenze refrattive e dei poteri refrangenti di diverse sostanze.

Nomi delle sostanze	Indici di refrazione	Potenze refrattive n^2-1	Densità δ	Poteri refrangenti $\frac{n^2-1}{\delta}$
Solfato di barite.	$^{23}/_{14}$	1,699	4,27	0,3979
Vetro d' antimonio.	$^{17}/_{9}$	2,568	5,28	0,4864
Solfato di calce.	$^{61}/_{41}$	1,213	2,252	0,5386
Vetro comune.	$^{31}/_{20}$	1,4025	2,58	0,5436
Cristallo di monte.	$^{25}/_{16}$	1,445	2,65	0,5456
Carbonato di calce	$^{5}/_{3}$	1,778	2,72	0,6536
Sal gemma.	$^{17}/_{11}$	1,388	2,143	0,6477
Allume.	$^{35}/_{23}$	1,1267	1,714	0,6570
Borace.	$^{22}/_{15}$	1,1511	1,714	0,6716
Nitrato di potassa.	$^{32}/_{21}$	1,345	1,9	0,7079
Solfato di ferro.	$^{303}/_{200}$	1,295	1,715	0,7551
Acido solforico.	$^{10}/_{7}$	1,041	1,7	0,6124
Acqua piovana.	$^{529}/_{396}$	0,7845	1,0	0,7845
Gomma arabica.	$^{31}/_{21}$	1,179	1,375	0,8574
Alcool rettificato.	$^{100}/_{73}$	0,8765	0,866	1,0121
Canfora.	$^{3}/_{2}$	1,25	0,996	1,2551
Olio d' oliva.	$^{22}/_{15}$	1,1511	0,913	1,2607
Olio di lino.	$^{40}/_{27}$	1,1948	0,932	1,2819
Essenza di trementina. . .	$^{25}/_{17}$	1,1626	0,876	1,3222
Ambra.	$^{14}/_{9}$	1,42	1,04	1,3654
Diamante.	$^{100}/_{41}$	4,949	3,4	1,4556

TAVOLA

degl'indici di refrazione e delle potenze refrattive dei gas alla temperatura di 0° e sotto la pressione atmosferica di 0m,76.

NOMI DEI GAS	INDICI DI REFRAZIONE n	POTENZE REFRATTIVE $n^2 - 1$	DENSITÀ δ
Aria atmosferica	1,000294	0,000589	1,000
Ossigeno.	1,000272	0,000544	1,103
Idrogeno	1,000138	0,000277	0,068
Azoto	1,000300	0,000601	0,976
Ammoniaca.	1,000385	0,000771	0,591
Acido carbonico.	1,000449	0,000899	1,524
Cloro	1,000772	0,001545	2,476
Acido idroclorico.	1,000449	0,000899	1,254
Ossido d'azoto	1,000503	0,001007	1,527
Gas nitroso	1,000303	0,000606	1,039
Ossido di carbonio . . .	1,000340	0,000681	1,992
Cianogeno.	1,000834	0,001668	1,818
Gas oliofaciente	1,000678	0,001356	0,980
Gas delle paludi	1,000443	0,000886	0,559
Etere idroclorico	1,001095	0,002191	2,234
Acido idrocianico.	1,000451	0,000903	0,944
Gas ossi-cloro-carbonico . .	1,001159	0,002318	3,442
Acido solforoso	1,000665	0,001331	2,247
Idrogene solforato	1,000644	0,001288	1,178
Etere solforico	1,001153	0,003061	2,580
Carburo di zolfo	1,001150	0,003010	2,644
Idrogene proto-fosforico . .	1,000389	0,001579	1,256

34. Le proprietà dei prismi si ritrovano nei vetri conosciuti sotto il nome di *lenti*, che ingrandiscono o diminuiscono gli oggetti che si guardano a traverso di esse. Queste lenti, potendo esser considerate come composte di un'infinità di prismi troncati, è facile il comprendere che i raggi che le attraversano subiscono differenti refrazioni secondo la inclinazione differente delle due facce di ciascun prisma troncato elementare; talmentechè i raggi emanati da un oggetto qualunque, i quali convergono naturalmente nell'occhio per produrvi la visione di questo oggetto, possono emergere dalla lente con una convergenza maggiore o

minore di quella che avevano nell' entrarvi; nel primo caso l' oggetto sembra più grande che all' occhio nudo, e nel secondo più piccolo. *Vedi* LENTE.

35. *Analisi della luce.* Abbiamo di sopra (28) fatto menzione del fenomeno della colorazione degli orli degli oggetti veduti attraverso ad un prisma: questo fenomeno indica evidentemente che la luce subisce una certa modificazione passando nel prisma, perchè i colori accidentali che si vedono sono indipendenti dal colore proprio degli oggetti, e presentano tutte le gradazioni dell' arco baleno: ma, per riconoscere la natura di questa modificazione, è necessario ricorrere ad esperienze più decisive.

Immaginiamo che nell' imposta di una camera ben chiusa e nella quale non penetri verun raggio luminoso si sia fatto un foro rotondo di 3 o 4 millimetri di diametro, e che per mezzo di uno specchio piano posto al di fuori si faccia passare per questo foro un fascio reflesso di luce solare; finchè questo raggio non incontrerà nessuno ostacolo sul suo cammino, si propagherà in linea retta e andrà a disegnare nella parete opposta un' immagine rotonda del sole. Supponiamo ora che ad una piccola distanza dal foro si ponga un prisma di vetro o di cristallo, in modo che il raggio luminoso sia costretto ad attraversarlo; allora si osserverà non solo che il raggio devia dalla sua direzione, ma che si dilata e si colora: uscendo dal prisma, è più largo che quando vi è entrato, e continua ad allargarsi mentre si propaga fino alla parete opposta, sulla quale va a disegnare una immagine bislunga composta di strisce diversamente colorate. La figura 2 della tavola CLXXV indica l' allargamento del fascio luminoso incidente, GG' è il diametro dell' immagine propagata direttamente, ed RU la larghezza dell' immagine refratta e colorata.

Se l' immagine refratta è ricevuta sopra un fondo bianco distante dal prisma 5 o 6 metri, i suoi colori saranno vivi e distinti, e si potrà notare: 1° che la sua lunghezza, cinque o sei volte più grande della sua larghezza, è in un senso perpendicolare alle costole del prisma; 2° che essa è terminata nella sua larghezza da due rette parallele, e nella sua lunghezza da due semicircoli; 3° che la sua superficie è divisa in sette strisce parallele tra loro e alle costole del prisma; le gradazioni assai brillanti di queste strisce succedonsi nell' ordine indicato nella figura 3 della tavola CLXXV, cioè: *rosso*, *arancio*, *giallo*, *verde*, *turchino*, *indaco*, *violetto*. Il rosso è all' estremità più prossima all' angolo refrangente del prisma, e il violetto all' estremità opposta. Quest' immagine così refratta e colorata dicesi *spettro solare*.

36. Questi fenomeni non si possono spiegare che supponendo ogni raggio di luce bianca solare composto di sette raggi paralleli elementari diversamente colorati; e siccome è impossibile di attribuire al prisma alcuna forza particolare capace di disunirli, così bisogna supporre di più che questi raggi siano disegualmente rafrangibili, il che gli fa divergere sempre più gli uni dagli altri nelle due refrazioni che soffrono nell' attraversare il prisma. Per elevare al grado di certezza questa ipotesi, si tratta dunque di dimostrare: 1° che i raggi colorati hanno refrangibilità differenti; 2° che la riunione di questi raggi riproduce la luce bianca; le quali cose sono compiutamente dimostrate dall' esperienza.

Se si riceve lo spettro solare sopra un diaframma, facendo un piccolo foro nel mezzo di una delle strisce colorate, il fascio dei raggi di questo colore che passerà per il foro si propagherà dall' altra parte del diaframma, e potrà sottoporsi a tutte le esperienze atte a far conoscere il grado suo di refrangibilità. In tal guisa si è potuto riscontrare che il raggio rosso è il meno refrangibile di tutti, e il raggio violetto il più refrangibile. Fra questi due limiti, la refrangibilità degli altri raggi varia in una maniera continua. Si è in egual modo riscontrato che ciascun raggio non è più suscettibile di alcuna decomposizione ulteriore, e che

esso conserva inalterabilmente il suo colore in tutte le nuove refrazioni. I trattati completi di ottica contengono un numero grande d'esperienze che dimostrano tutti questi resultati.

Per ricomporre la luce bianca coi raggi colorati, basta ricevere il fascio di luce emergente sopra un secondo prisma simile al primo, ma rivolto in senso inverso; il fascio, che è colorato tra i due prismi, esce perfettamente bianco dal secondo, e va a disegnare sulla parete opposta un'immagine rotonda del sole. Si può ancora ricomporre la luce bianca in diverse altre maniere.

Possiamo dunque enunciare come una verità dimostrata, che *la luce bianca del sole è composta di raggi diversamente colorati e diversamente refrangibili*, facendo però osservare che per *raggio colorato* intendiamo un raggio che ha la proprietà di produrre la sensazione di un colore determinato.

37. Ogni luce che possiamo produrre artificialmente genera spettri analoghi allo spettro solare, ma i colori sono meno vivaci, e mancano sempre certe gradazioni, il che spiega la differenza che si osserva nei colori degli oggetti veduti di giorno e veduti al lume di candela o di lucerna: poichè i colori naturali degli oggetti non sono prodotti che dalla decomposizione della luce bianca che si effettua alla loro superficie; mentre certi raggi elementari rimangono assorbiti e certi altri reflessi. Per esempio, i corpi che ci sembrano bianchi reflettono egualmente tutti i raggi colorati; quelli che ci sembrano neri gli assorbiscono tutti, e gli altri non ne reflettono che una parte assorbendo il resto. Così, la luce delle nostre faci non essendo assolutamente la stessa di quella del sole, le gradazioni dei colori prodotte sopra uno stesso corpo da queste luci debbono esser differenti.

38 Dalle diverse refrangibilità dei raggi elementari resulta che quando un raggio di luce bianca attraversa un mezzo terminato da superficie parallele, esso si decompone nell'entrare e si ricompone nell'uscire, perchè la decomposizione è una conseguenza necessaria della prima refrazione, e la ricomposizione una conseguenza non meno necessaria del fatto stesso dell'emergenza senza colorazione. Così, sebbene la luce bianca non provi nessuna alterazione nell'attraversare delle lastre parallele, pure se si potesse porre l'occhio nell'interno della lastra, si riceverebbero, in differenti direzioni, raggi diversamente colorati.

39. *Delle righe dello spettro*. Diconsi *righe dello spettro* certe linee nere, o semplicemente oscure, parallele e disegualmente sparse nella sua estensione, le quali sono state per la prima volta osservate da Wollaston, e la cui analisi compiuta devesi a Frauenhofer.

Queste righe sono sottilissime e così tra loro vicine che non possono scorgersi che mediante una lente. La figura 4 della tavola CLXXV rappresenta la loro disposizione quale è stata osservata da Frauenhofer; il loro numero oltrepassa il 700. Per istabilire alcuni punti fissi di confronto, questo abile osservatore ha scelto le righe indicate colle lettere B, C, D, E, F, G, H, le quali mentre sono tra le più facili a riconoscersi hanno di più il vantaggio di non dividere lo spettro in parti troppo disegnali. La figura indica la loro posizione nelle diverse striscie colorate.

Frauenhofer ha riscontrato: 1° che le righe sono affatto indipendenti dall'angolo refrangente e dalla sostanza del prisma; 2° che sono le stesse per la luce solare e per tutte le diverse luci che ne provengono, come quelle della luna e dei pianeti; 3° che la luce di una lucerna invece di dare delle righe nere dà delle righe brillanti diversamente disposte: le fiamme dell'idrogene e dell'alcool in questo rapporto presentano le stesse apparenze della fiamma dell'olio: la fiamma elettrica dà parimente delle righe brillanti; 4° che la luce della stella Sirio dà delle righe nere, ma differentemente disposta. Altre stelle di prima grandezza sembra che diano delle righe diverse da quelle di Sirio e da quelle del sole.

La scoperta di queste righe è di una grande importanza per istabilire dei caratteri distintivi tra le diverse luci naturali e artificiali; essa ci ha potuto far determinare, per mezzo dei punti fissi che le righe determinano nello spettro, gl' indici di refrazione dei principali raggi colorati, con una precisione assai più grande di ciò che erasi fatto per l' avanti.

40. La cognizione degl' indici di refrazione dei diversi raggi colorati essendo importantissima per la costruzione degli strumenti di ottica, e la loro ricerca offrendo grandi difficoltà, perchè le gradazioni dei colori, lungi dall'essere nettamente distinte, passano insensibilmente dall' una all' altra, si sono determinati soltanto gl' indici di refrazione delle righe fisse segnate colle lettere B, C, D, E, F, G, H. Ecco i resultati di tali ricerche. Gl' indici riportati di sopra (33) non debbono considerarsi che come quelli della refrazione media.

TAVOLA

degl' indici di refrazione dei raggi dello spettro corrispondenti alle righe principali.

SOSTANZE REFRANGENTI	B	C	D	E	F	G	H
Flint-glas, n.° 13	1,627749	1,629681	1,635036	1,642024	1,648260	1,650285	1,671062
Crown-glass.	1,525832	1,526846	1,529587	1,533005	1,536052	1,541657	1,546560
Acqua.	1,330935	1,331712	1,333577	1,335851	1,337818	1,341293	1,344177
Acqua	1,330977	1,331709	1,333577	1,335849	1,337788	1,341261	1,344162
Soluzione di potassa.	1,399629	1,400515	1,402805	1,405632	1,408081	1,412579	1,416368
Olio di trementina	1,470496	1,479530	1,474434	1,478553	1,481736	1,488198	1,493874
Flint-glas, n.° 3	1,602042	1,603800	1,608494	1,614532	1,620042	1,630772	1,640373
Flint-glass, n.° 30	1,623570	1,625477	1,630585	1,637356	1,643466	1,655406	1,666072
Crown-glass, n.° 13.	1,524312	1,525299	1,527982	1,531372	1,534337	1,539908	1,544684
Crown-glass, lettera M.	1,554774	1,555933	1,559075	1,563150	1,566741	1,573535	1,579470
Flint-glass, n° 23, prisma di 60° . . .	1,626596	1,628469	1,633667	1,640495	1,646756	1,658848	1,669686
Flint-glass, n.° 23, prisma di 45°. . .	1,626564	1,628451	1,633666	1,640544	1,646780	1,658849	1,669680

Questi resultati sono tanto più preziosi in quanto che non si conosceva realmente nulla di fisso nello spettro solare prima delle scoperte di Frauenhofer, perchè le gradazioni vi sono in numero infinito dal rosso il più acceso fino al violetto il più cupo, ed ognuna di queste gradazioni ha necessariamente un indice particolare di refrazione.

41. *Della dispersione.* Dei prismi eguali di sostanze differenti non producono spettri identici nelle stesse circostanze. I colori vi sono per verità disposti sempre nello stesso ordine, ma le loro lunghezze non sono proporzionali. Per esempio, un prisma di vetro ordinario dà proporzionalmente più rosso e meno violetto di un prisma di flint-glass. Questo fenomeno trovasi necessariamente collegato colla grandezza degl' indici di refrazione di ciascun colore. Si è dato il nome di *dispersione* alla differenza degl' indici dei raggi estremi, rosso e violetto. Così, la dispersione di una sostanza è tanto più grande quanto più considerabile è la differenza degl' indici estremi. La dispersione, divisa per l'indice medio di refrazione diminuito dell' unità, si chiama il *potere dispersivo della sostanza.*

Indicando con n' l'indice di refrazione del raggio rosso, con n'' quello del raggio violetto, e con n l'indice medio, la *dispersione* è rappresentata da $n' - n''$, e il *potere dispersivo* da

$$\frac{n'' - n'}{n - 1}.$$

42. Brewster ha dato nella sua Enciclopedia una tavola delle dispersioni e dei poteri dispersivi di un numero grande di sostanze. Le esperienze che le servono di base, fatte prima della scoperta delle righe dello spettro, non possono avere tutta quella esattezza che avrebbero se i colori fossero stati riferiti a queste righe: ma se ne possono però trarre utili notizie. Ne estrarremo soltanto le indicazioni relative alle sostanze più comuni.

Nomi delle sostanze	Poteri dispersivi	Dispersioni
Cromato di piombo, massimo, valutato . . .	0,400	0,770
Cromato di piombo, *idem*, deve superare. .	0,296	0,576
Cromato di piombo, minimo.	0,267	0,394
Carbonato di piombo, minimo.	0,066	0,056
Vetro verde	0,061	0,037
Solfato di piombo	0,060	0,056
Vetro rosso cupo.	0,060	0,044
Vetro opale.	0,060	0,038
Vetro arancio	0,053	0,042
Sal gemma	0,053	0,029
Flint-glass.	0,052	0,032
Vetro porpora cupo.	0,051	0,031
Flint-glass	0,048	0,029
Idem.	0,048	0,028
Acido nitrico.	0,045	0,019
Acido nitroso.	0,044	0,018
Vetro rosa	0,044	0,025

Olio di trementina.	0,042	0,020
Ambra.	0,041	0,025
Spato calcare, massimo.	0,040	0,027
Vetro da bottiglie.	0,040	0,023
Solfato di ferro.	0,039	0,019
Diamante	0,038	0,056
Olio d'oliva.	0,038	0,018
Allume.	0,036	0,020
Solfato di rame	0,036	0,019
Acqua.	0,035	0,012
Cristallo di borace	0,034	0,018
Vetro da finestre	0,032	0,017
Alcool	0,029	0,011
Cristallo di monte	0,026	0,014
Spato calcare, minimo	0,026	0,016
Spato fluore.	0,022	0,010

43. La dispersione dei raggi colorati è l'unica causa delle strisce colorate o iridi che compariscono sugli orli degli oggetti veduti a traverso ad un prisma, strisce il cui effetto è quello di rendere incerti e mal terminati i contorni dell'immagine. Questo fenomeno avendo luogo egualmente coi vetri lenticulati dei cannocchiali, diviene difficilissimo il costruire degli stromenti diottrici capaci di dare delle immagini ben distinte e senza colori estranei; se, come aveva creduto Newton, il potere dispersivo di tutte le sostanze refrangenti fosse lo stesso, sarebbe assolutamente impossibile di costruire degli strumenti che avessero la proprietà di deviare la luce senza svilupparvi dei colori, strumenti ai quali si dà il nome di *acromatici*. Newton disperando del perfezionamento dei telescopj ordinarj, volle sostituire ad essi uno strumento più esatto, e così è dovuta ad un errore l'invenzione del telescopio a specchio divenuto sì potente nelle mani di Herschel.

Eulero fu il primo ad avvertire la possibilità di comporre delle lenti acromatiche, fondandosi sulla costruzione dell'occhio umano; ma è dovuta a Dollond, celebre ottico inglese, la soluzione pratica del problema e la scoperta della differenza dei poteri dispersivi dei diversi corpi trasparenti. Dopo parecchi saggi sopra tutte le specie di vetri, ottenne, da due prismi posti l'uno sull'altro con gli angoli refrangenti opposti, una luce emergente incolora, quantunque deviata considerabilmente. Con le due qualità di vetro di questi prismi costruì in seguito delle lenti acromatiche, riunendo una lente convessa di *crown-glass* con una lente concava di *flint-glass*.

Per far comprendere come un prisma possa divenire acromatico, immaginiamo un prisma qualunque triangolare attraversato da un fascio di luce bianca; se sulla superficie di emergenza si applica quella di un altro prisma simile al primo, ma rivolto in senso opposto, il sistema formerà un prisma quadrangolare, e la dispersione e la deviazione prodotta del primo prisma essendo distrutta dalla dispersione e dalla deviazione prodotta dal secondo in senso inverso, la luce uscirà dal sistema senza alterazione; il che d'altronde resulta dal fatto che il sistema si riduce ad una semplice lastra a facce parallele. Ma questo sistema non facendo provare nessuna deviazione ai raggi luminosi, l'oggetto veduto a traverso di esso

comparirà sotto le stesse dimensioni che all'occhio nudo; mentre ciò che veramente importa è di avere delle immagini più grandi o più piccole secondo il bisogno. Immaginiamo ora che la sostanza del secondo prisma, invece di esser la stessa di quella del primo, sia più dispersiva; siccome la dispersione aumenta coll'angolo del prisma, bisognerà dare al secondo prisma un angolo refrangente più piccolo del primo affinchè l'immagine sia incolora, e allora essa conserverà una certa deviazione. Noi non possiamo fare altro che accennare questo principio, la cui applicazione alla costruzione degli strumenti acromatici presenta difficoltà imbarazzantissime ad onta di tutti i progressi dell'ottica.

44. *Dei colori prodotti dalle lamine sottili.* Tutti i corpi diafani ridotti in lamine sottilissime fanno provare alla luce delle decomposizioni analoghe a quella del prisma, ed i raggi reflessi al pari dai raggi emergenti prendono dei colori variatissimi. Possono osservarsi questi fenomeni nelle bolle di vetro o di sapone gonfiate fino al punto di farle scoppiare: un momento prima di rompersi esse presentano colori vivi e cangianti. I liquidi volatili sparsi in strati sottili sopra superficie levigata di una tinta cupa si coloriscono nello stesso modo. L'aria stessa ha questa proprietà, quando è racchiusa tra due lastre trasparenti, come sarebbero per esempio due lastre di vetro compresse fortemente l'una sull'altra. Newton si è molto occupato di questi fenomeni che lo hanno condotto a resultati importantissimi. Passeremo dunque ad accennare i fatti principali da lui osservati.

Se si pone una lente bi-convessa AB (*Tav.* CLXXV, *fig.* 5) di un gran fuoco sopra un vetro piano, e se si fa pervenire sulla lente un raggio di luce bianca, nel punto di contatto dei due vetri si scorge una macchia nera e intorno ad essa una serie di anelli diversamente colorati, il cui numero aumenta a misura che con maggior forza si comprime la lente sulla lastra. Il punto nero non diviene visibile che quando la pressione è abbastanza grande da stabilire un contatto immediato tra i due vetri. Così, si comincia dal vedere nel centro, sotto una pressione moderata, un circolo di un certo colore; questo colore si dilata, aumentando la pressione, finchè comparisce nel centro un nuovo colore che rimane circondato dal primo in striscia circolare. Seguitando ad aumentare la pressione, anco il nuovo colore si dilata e nel mezzo ad esso ne subentra un altro. Lo stesso succede molte altre volte di seguito finchè comparisce un punto nero che rimane circondato da tutti i circoli di colore. Diminuendo gradatamente la pressione, gli stessi fenomeni si riproducono in senso inverso; tutti i circoli colorati si ristringono e vanno successivamente a sparire.

Questi circoli colorati succedonsi in quest'ordine intorno al punto nero: *turchino*, *bianco*, *giallo* e *rosso*: l'anello turchino è debolissimo, gli anelli rosso e giallo sono assai più brillanti e dalla stessa larghezza del bianco. Questa prima serie di colori è circondata da una seconda nell'ordine seguente: *violetto*, *turchino*, *verde*, *giallo* e *rosso*: questi secondi anelli sono tutti larghi e chiari, ad eccezione del verde che apparisce appannato e stretto: una terza serie, *porpora*, *turchino*, *verde*, *giallo*, *rosso*, circonda la seconda; finalmente una quarta serie, composta di due soli anelli, *verde*, e *rosso*, non è più circondata che da anelli appannati, i di cui colori indecisi vanno in fine a confondersi col bianco.

Se, invece di ricevere i raggi reflessi, si pone l'occhio al di sotto della lastra per ricevere i raggi trasmessi, si vede un circolo bianco nel centro ed una serie di circoli colorati, le cui tinte si succedono in un ordine tale che gli anelli che si corrispondono per reflessione e per refrazione hanno dei *colori complementarj*, vale a dire dei colori che riuniti ricomporrebbero la luce bianca. Per esempio, se il colore di un anello reflesso è prodotto dal mescuglio dei due primi colori dello spettro, il *rosso* e l'*arancio*, quello dell'anello refratto corrispondente sarà pro-

dotto dalla riunione degli altri cinque colori: *giollo, verde, turchino, indaco* e *violetto.*

Le strisce colorate non sono circolari che quando i raggi incidenti sono perpendicolari; se i raggi cadono obliquamente, gli anelli si allungano e divengono ellittici.

45. Per ridorre il fenomeno a' suoi elementi, Newton ripelè le esperienze facendo uso della loce omogenea o di un solo colore primitivo: ei vide che colla luce rossa non si formavano che circoli rossi separati da circoli neri; che colla luce gialla non poteva parimente ottenere che circoli gialli, e così di seguito per gli altri colori. In generale, ogni raggio semplice produce per reflessione e per refrazione una serie di anelli alternativamente neri e del suo colore; gli anelli neri reflessi corrispondono agli anelli colorati refratti e viceversa.

Misurando i diametri degli anelli reflessi nella parte loro più brillaote, Newton trovò che, qualonque sia il colore della luce omogeoea, i quadrati di questi diametri stanno tra loro come i oumeri impari 1, 3, 5, 7, 9, ec.; e che i quadrati dei diametri degli anelli trasmessi, ossia degli anelli neri reflessi, stanno tra loro come i numeri pari 0, 2, 4, 6, 8, ec.

Trovati una volta questi rapporti, diveniva facile il calcolare la grossezza dello strato d'aria corrispondente ad un anello, misurando semplicemente il suo diametro, perchè la curvatura del vetro convesso essendo nota ed il vetro piano essendole tangente, la distanza delle due superficie ad una distanza qualunque dal punto di contatto è determinata da quest' ultima distanza, vale a dire dal diametro dell' anello corrispondente. Inoltre, misurando direttamente il diametro d'un anello qualunqoe, i rapporti che come abbiamo accennato di sopra esso ha coi diametri degli altri anelli servono a calcolar questi: ma non vi è nemmeno bisogno di conoscere questi ultimi per ottenere le grossezze degli strati d' aria; perchè, indicando con e la grossezza dell'aria corrispoodente alla circonferenza interna del primo anello reflesso, si vede facilmente che le grossezze ai perimetri interni ed esteroi degli anelli successivi sono e, $3e$, $5e$, $7e$, $9e$, e che le grossezze dell'aria corrispondenti al mezzo degli anelli sono, $2e$, $6e$, $10e$, $14e$, ec. per gli anelli reflessi, e 0, $4e$, $8e$, $12e$, $16e$, ec. per gli anelli refratti. Questi rapporti sono gli stessi per ogni luce omogenea; ma la grossezza assoluta dello strato d'aria corrispondente ad un anello dello stesso ordine varia col colore, e diminuisce dal rosso al violetto. Prendendo per unità la grossezza dello strato d'aria alla circonferenza del primo anello della luce rossa, quelle che si riferiscono agli altri colori sooo:

Indicazione dei colori	Grossezza dello strato d'aria al perimetro ioterno del primo aoello
Rosso estremo	e
Limite del rosso e dell'araneio	$e . 0{,}9248$
Limite dell'araneio e del giallo	$e . 0{,}8855$
Limite del giallo e del verde	$e . 0{,}8255$
Limite del verde e del turchino	$e . 0{,}7635$
Limite del turchino e dell'iodaco	$e . 0{,}7114$
Limite dell'indaco e del violetto	$e . 0{,}6814$
Violetto estremo	$e . 0{,}6300$

Il valore di e in millimetri è 0,00008057; se per questo valore di e si moltiplicano i numeri posti di sopra, quelli che si ottengono rappresentano i valori assoluti delle grossezze, e per una particolarità notabilissima questi valori assoluti stanno tra loro come le radici cubiche dei quadrati delle frazioni

$$1,\ \frac{8}{9},\ \frac{5}{6},\ \frac{3}{4},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{5},\ \frac{9}{16},\ \frac{1}{2},$$

che si riscontrano egualmente nella teoria dei suoni. *Vedi* Suono.

Da queste relazioni resulta ancora che i diametri degli anelli dello stesso ordine formati colle differenti luci corrispondenti ai limiti dei sette colori dello spettro stanno tra loro come le radici cubiche delle stesse frazioni.

46. Le leggi precedenti si applicano egualmente bene ad una lamina sottilissima di una sostanza trasparente qualunque, come ad uno strato d'aria; ma i valori assoluti dei diametri degli anelli dello stesso colore e dello stesso ordine sono tanto più piccoli quanto più grande è la potenza refrattiva della sostanza. La seguente legge abbraccia e comprende tutte queste variazioni:

In due lamine di differente natura, le grossezze che trasmettono un anello dello stesso ordine sotto la stessa incidenza stanno tra loro nel rapporto inverso degl' indici di refrazione.

47. I fenomeni presentati dalle luci omogenee spiegano quelli che produce la luce bianca; poichè si comprende facilmente che siccome quest'ultima è composta di raggi di tutti i colori, ognuno di essi deve formare sopra una lamina sottile la serie di anelli che produrrebbe se fosse solo; e siccome i diametri degli anelli dello stesso ordine pei diversi colori non sono gli stessi, i colori anticipano gli uni sugli altri e formano degli anelli di diverse tinte, secondo la natura della mescolanza.

Newton ha calcolato le grossezze corrispondenti alle diverse tinte che prendono, sotto l'incidenza perpendicolare, le lamine di aria, d'acqua e di vetro; noi le riferiremo nella seguente tavola, perchè danno il mezzo di misurare delle grossezze che sfuggono a qualunque metodo diretto.

COLORI REFLESSI		GROSSEZZA DELLE LAMINE in millionesimi di pollice inglese		
		D'ARIA	D'ACQUA	DI VETRO
1.° Ordine	Nerissimo	— 1/2	— 3/8	— 10/31
	Nero	1 —	— 3/4	— 20/31
	Principio di nero	2 —	1 1/2	1 2/7
	Turchino	2 2/5	1 4/5	1 11/20
	Bianco	5 1/4	3 7/8	3 2/5
	Giallo	7 1/9	5 1/3	4 3/5
	Arancio	8 —	6 —	5 1/6
	Rosso	9 —	6 3/4	5 4/5
2.° Ordine	Violetto	11 1/6	8 3/8	7 1/5
	Indaco	12 5/6	9 5/8	8 2/11
	Turchino	14 —	10 1/2	9 —
	Verde	15 1/8	11 2/3	9 5/7
	Giallo	16 2/7	12 1/5	10 2/5
	Arancio	17 2/9	13 —	11 1/9
	Rosso acceso	18 1/3	13 3/4	11 5/6
	Scarlatto	19 2/3	14 3/4	12 2/3
3.° Ordine	Porpora	21 —	15 3/4	13 10/20
	Indaco	22 1/10	16 4/7	14 1/4
	Turchino	23 2/5	17 11/20	15 1/10
	Verde	25 1/5	18 9/10	16 1/4
	Giallo	27 1/7	20 1/3	17 1/2
	Rosso	29 —	21 3/4	18 5/7
	Rosso turchiniccio	32 —	24 —	20 1/3
4.° Ordine	Verde turchiniccio	34 —	25 1/2	22 —
	Verde	35 2/7	26 1/2	22 3/4
	Verde giallognolo	36 —	27 —	23 2/9
	Rosso	40 1/3	30 1/4	26 —
5.° Ordine	Turchino verdastro	46 —	34 1/2	29 2/3
	Rosso	52 1/2	39 3/8	34 —
6.° Ordine	Turchino verdastro	58 3/4	44 —	38 —
	Rosso	65 —	48 3/4	42 —
7.° Ordine	Turchino verdastro	71 —	53 1/4	45 4/5
	Rosso	77 —	57 3/4	49 2/3

Per dare un esempio dell' applicazione di questa tavola alla determinazione della grossezza di una lamina sottilissima, supponiamo che uno strato di etere solforico rifletta, sotto l' incidenza perpendicolare, il rosso turchiniccio del terzo ordine. Se si indica con e la sua grossezza, con n il suo indice di refrazione, e con n' l' indice di refrazione dell' aria, si avrà, in virtù della legge esposta di sopra (46) ed osservando che il numero 32 corrisponde nella tavola al rosso turchiniccio della lamina d' aria,

$$32 : e = n : n',$$

donde

$$e = 32 \frac{n'}{n};$$

e sostituendo ai numeri n a n' i valori presi nelle tavole riportate superiormente (33) si otterrà

$$e = \frac{32 \times 1,000294}{1,001150} = 31,97,$$

vale a dire circa 32 milionesimi di pollice inglese.

48. Newton ha scoperto ancora un altro fenomeno non meno notabile, quale è quello della colorazione della luce reflessa da grosse lastre; ma le particolarità che la sua esposizione esigerebbe oltrepasserebbero i limiti che ci siamo assegnati, perciò dobbiamo contentarci di dare semplicemente un' idea della teoria ch' egli ha fondata su questi fatti singolari.

Considerando la luce come una sostanza composta di molecole infinitamente piccole lanciate dai corpi luminosi, Newton ha supposto che nel loro moto rapidissimo queste molecole acquistino nell' attraversare una superficie refrangente una disposizione passeggera, che agisca alternativamente ad intervalli sempre eguali, e mediante la quale esse attraversino più facilmente una nuova superficie refrangente che esse incontrino, se giungono su questa superficie mentre dura tuttora l' *accesso* della disposizione, laddove esse vi si riflettono più facilmente se la incontrano negl' intervalli di questi accessi. Per caratterizzare questa tendenza delle molecole luminose, egli ha indicato col nome di *accesso di facile trasmissione* la disposizione in cui si trova la luce quando essa può più facilmente trasmettersi che riflettersi, e con quello di *accesso di facile reflessione*, la disposizione contraria. Questa ipotesi comprende e spiega perfettamente i fenomeni degli anelli colorati, come passeremo adesso a dimostrare. S' immagini un raggio luminoso che penetri in una prima superficie, e che prenda nel suo entrare un accesso di facile trasmissione; quest' accesso andrà crescendo fino ad un certo limite e per una certa durata di tempo, in seguito decrescerà per una seconda durata di tempo eguale alla prima; giunto alla sua fine, si cangerà in accesso di facile reflessione che alla sua volta andrà crescendo fino al suo *maximum*, ove comincerà a decrescere per cangiarsi di nuovo in accesso di facile trasmissione, e così di seguito, finchè il raggio non incontrerà una nuova superficie capace di modificarlo. Ogni accesso si comporrà dunque di un periodo crescente e di un periodo decrescente, e in questi periodi il raggio percorrerà spazi eguali. Lo spazio intero che percorre il raggio nella durata di un accesso è ciò che dicesi la *lunghezza dell' accesso*. Immaginiamo ora che dopo aver preso nel suo passaggio a traverso alla prima superficie un accesso di facile trasmissione il raggio incontri una seconda superficie che sia distante dalla prima meno della lunghezza di un accesso; questo raggio potrà penetrare nella seconda superficie, perchè si trova allora nell' accesso favorevole, e con tanta maggior facilità potrà farlo, quanto meno la distanza

delle due superficie differirà dalla lunghezza di un mezzo accesso. Se, al contrario, la distanza delle due superficie è maggiore della lunghezza di un accesso, ma minore però di quella di due accessi, il raggio incontrerà la seconda superficie nel tempo del suo accesso di facile reflessione, e sarà reflesso. In generale, quando la distanza delle superficie è minore della lunghezza di un accesso, o eguale a *due* volte, *quattro* volte, *sei* volte, ec. questa lunghezza, il raggio è trasmesso; e quando questa distanza è eguale a *una* volta, *tre* volte, *cinque* volte, ec. la lunghezza di un accesso, il raggio è reflesso.

Applicando questa teoria alla formazione degli anelli colorati, si scorge che la grossezza della lamina sottile nel mezzo del primo anello colorato deve essere eguale alla lunghezza di un accesso; talmentechè questa lunghezza varia colla refrangibilità della sostanza.

49. *Della diffrazione.* Dicesi *diffrazione* la deviazione che subisce un raggio di luce che rasenta la superficie di un corpo, deviazione accompagnata sempre da una decomposizione analoga a quella che prova la luce nell'attraversare le lamine sottili. Questo fenomeno è stato osservato per la prima volta da Grimaldi nel 1665, ed è stato studiato poi da Newton, Young e Fresnel. Ma a quest' ultimo n' è dovuta la spiegazione e la teoria completa.

Gli effetti della diffrazione possono scoprirsi osservando la fiamma di una bugia attraverso ad una fessura fatta in una carta nera: si vedono allora delle strisce larghe diversamente colorate, che circondano la fiamma. Un capello posto verticalmente tra l'occhio e la fiamma produce egualmente le stesse apparenze, quando è situato molto vicino all' occhio: ma per poter riscontrare tutte le circostanze del fenomeno occorre osservarlo nella camera oscura. Quando un raggio introdotto in una camera oscura incontra l' orlo di una lastra opaca, se ne allontana come se fosse respinto da quest' orlo; e nel ricevere a qualche distanza l'ombra della lastra e la luce del raggio sopra un diaframma bianco, l' orlo dell' ombra apparisce accompagnato da strisce brillanti o da frange colorate parallele tra loro, la cui vivacità diminuisce a misura che esse si allontanano dall' ombra. Quest' ombra non è affatto nera, vi si distinguono parimente delle strisce debolmente colorate.

50. Ricevendo il raggio luminoso sopra una lente per concentrarlo in un punto e ridurlo quasi ad una linea matematica, il fenomeno diviene più sensibile. Se si fa uso di un vetro colorato, per avere soltanto dei raggi del suo colore, le frange luminose sono tutte dello stesso colore, e sono separate le une delle altre da intervalli oscuri come gli anelli prodotti sopra una lamina sottile da una luce omogenea. Le frange oscure e le frange brillanti dei diversi ordini d' intensità sembra che nascano all' orlo medesimo del corpo opaco; ma la luce non prosegue il suo cammino in linea retta, perchè seguendo le tracce delle frange si scopre che esse si propagano per linee curve che sono *iperbole* le quali hanno comene il vertice in vicinanza dell' orlo della lastra opaca. La spiegazione che Newton ha dato di tali fatti, fondata sopra un' azione repulsiva che le molecole del corpo eserciterebbero a piccolissime distanze sulle molecole della luce, è evidentemente insufficiente.

51. Le esperienze di Young sulle frange colorate l' hanno condotto ad un' altra spiegazione, divenuta celebre sotto il nome di *principio delle interferenze.* Questo fisico ha osservato che dirigendo due raggi dello stesso colore in una camera oscura in modo che s' incontrino, essi producono, nel penetrarsi, delle frange alternativamente brillanti ed oscure simili a quelle che resultano dalla diffrazione. Il fatto il più importante in questa produzione di frange colorate si è che nel chiudere l' apertura per la quale passa uno dei raggi, le frange spariscono, e nello spazio che esse occupavano subentra una tinta luminosa uniforme in luogo

delle alternazioni di luce e di oscurità che vi si osservavano avanti. Il concorso delle due luci aveva dunque prodotto l'oscurità. Questo fenomeno singolare, osservato già da Grimaldi sopra due raggi di luce bianca, sembra inconciliabile col sistema dell'emissione; perchè in questo sistema due raggi riuniti debbono sempre aumentare l'intensità della luce. Oggimai i partigiani dell'emissione non possono rendere la loro teoria conforme ai fatti che coll'accumulare ipotesi sopra ipotesi.

Il principio delle interferenze, collegato col sistema delle vibrazioni può enunciarsi nei seguenti termini.

Due raggi omogenei, emanati da una stessa sorgente e che s' incontrano sotto una piccola obliquità, aumentano la loro vivacità ovvero si distruggono, secondochè la differenza dei cammini da essi percorsi dalla loro origine fino al loro incontro è un multiplo pari o impari della lunghezza di una semi-onda luminosa.

Per far meglio comprendere questo principio, rammenteremo che, nel sistema delle vibrazioni, la luce non è che un movimento oscillatorio isocrono dei corpi luminosi trasmesso all'etere circostante e che si propaga in questo fluido facendo delle ondulazioni analoghe a quelle dell'aria nella propagazione del suono (2). Secondo questa ipotesi, ogni onda luminosa è composta di due semi-onde nelle quali i movimenti sono eguali ma opposti; talmentechè se due sistemi di onde della stessa lunghezza di ondulazione e della stessa intensità si propagano nello stesso senso, e se uno di essi è in ritardo sull'altro di una mezza ondulazione o di un numero qualunque impari di mezze ondulazioni, tutti i movimenti si distruggeranno come nell'urto di due corpi eguali che s'incontrano con celerità eguali; ma se la differenza nel cammino è nulla o eguale ad un numero pari di mezze ondulazioni, i movimenti si sommeranno. Noi non possiamo fare altro che dare un semplice cenno di questa ingegnosa teoria, che è stata portata dai lavori di Fresnel ad un alto grado di probabilità.

52. La lunghezza, nell'aria, delle onde dei diversi raggi colorati è stata determinata da Fresnel con un grado sommo di esattezza. Eccone la tavola: i numeri esprimono *millesimi di millimetro.*

Limiti dei colori principali	*Valori estremi di una mezza onda*
Violetto estremo	406
Violetto indaco	439
Indaco turchino	459
Turchino verde	492
Verde giallo	532
Giallo arancio	571
Arancio rosso	596
Rosso estremo	645

Colori principali	*Valori medj di una mezza onda*
Violetto	423
Indaco	449
Turchino	475
Verde	521
Giallo	551
Arancio	583
Rosso	620

Questi valori, ottenuti per mezzo di esperienze dirette sulla luce diffratta, sono esattamente il *quadruplo* delle lunghezze degli *accessi* determinate da Newton; e siccome nel sistema delle vibrazioni la grossezza della lamina sottile cor-

rispondente al primo anello colorato che si sviluppa per la reflessione di una luce omogenea è il doppio della lunghezza di un'onda intera, non si può fare a meno di ammirare l'accordo sorprendente di misure eseguite su grandezze quasi insensibili.

53. *Della doppia refrazione*. La maggior parte dei corpi trasparenti cristallizzati hanno la proprietà di dividere un solo *fascio incidente* in due *fasci refratti*, uno dei quali è sottoposto alle leggi della refrazione ordinaria, e l'altro obbedisce a leggi diverse. Questo fenomeno di doppia refrazione si manifesta mediante la doppia immagine che si vede guardando un corpo a traverso ad un cristallo *bi-refrangente*. Tutti i cristalli la cui forma primitiva non è nè un cubo nè un ottaedro regolare sono *bi-refrangenti*.

Per osservare i fenomeni della doppia refrazione, si fa uso comunemente dei cristalli di carbonato di calce (spato d'Islanda), la cui forma ordinaria è quella di un prisma romboidale. Questa sostanza, che si trova facilmente, possiede la proprietà bi-refrangente in sommo grado.

Ora, osservando a traverso ad un cristallo di carbonato di calce un oggetto sottile qualunque, come una riga nera disegnata sopra una carta bianca, si scorgono distintamente due immagini di questo oggetto, qualunque d'altronde sia la posizione del cristallo. Queste immagini appariscono tanto più staccate l'una dall'altra quanto è più lontano l'oggetto. Se si fa girare il cristallo sopra sè stesso, una delle due immagini rimane immobile mentre l'altra si pone in movimento e sembra che giri intorno alla prima. Questo fatto dimostra: 1° che ogni raggio si divide in due fasci distinti di egual densità; 2° che questi due raggi non sono refratti nella stessa guisa. Si può ancora dimostrare ad evidenza l'esistenza dei due fasci refratti facendo passare un raggio solare attraverso al cristallo in una camera oscura, perchè allora si ottengono due immagini del sole sulla parete opposta.

Si può egualmente colla stessa facilità dimostrare che l'immagine immobile è quella che è veduta per mezzo del raggio refratto nel modo ordinario; perchè, quando la posizione dell'occhio e dell'oggetto rimane la stessa, la immagine scorta a traverso ad una lastra trasparente a facce parallele non cangia di posto quando si fa girare la lastra in modo che le sue facce rimangano nel medesimo piano.

Si chiama *raggio ordinario* il raggio refratto secondo le leggi stabilite precedentemente, e *raggio straordinario* quello che non è soggetto a queste leggi.

54. In tutti i cristalli dotati della doppia refrazione, esiste sempre *una* o *due* direzioni secondo le quali un raggio incidente non si divide e non subisce che la refrazione ordinaria. Queste direzioni hanno ricevuto il nome di *assi ottici* del cristallo. I cristalli che non hanno che una sola direzione d'indivisibilità si dicono *cristalli ad un asse*; quelli nei quali si osservano due direzioni d'indivisibilità diconsi *cristalli a due assi*. Il carbonato di calce è un cristallo ad un asse la cui direzione è quella della diagonale AA' (*Tav.* CLXXVI, *fig.* 1), che passa pei vertici dei due angoli triedi ottusi del solido romboidale; così, tutti i raggi incidenti che incontrano una delle facce di questo cristallo in modo da refrangersi in una direzione parallela a questa diagonale, non soffrono divisione alcuna; mentre, in tutte le altre direzioni possibili, ha luogo il fenomeno della doppia refrazione. In mineralogia, si dà il nome di *asse cristallografico* ad una retta che s'immagina condotta nell'interno del cristallo e che è sottoposta a certe determinate condizioni: questa retta non deve confondersi con gli *assi ottici*: pure, nei cristalli ad un *solo* asse ottico, l'asse cristallografico coincide *sempre* coll'asse ottico; nei cristalli a due assi, l'asse cristallografico non ha relazione alcuna determinata con gli assi ottici.

55. La direzione del raggio straordinario, in un cristallo ad un asse, in generale differisce da quella del raggio ordinario sottoposto come altra volta abbiamo

avvertito a queste due leggi: 1° *gli angoli d' incidenza e di refrazione sono sempre situati in un medesimo piono; 2° i seni di questi angoli hanno un rapporto costonte.* Esistono peraltro due tagli o sezioni del cristallo in cui la direzione del raggio straordinario si approssima a queste leggi. Queste sezioni diconsi la *sezione principale*, e *la sezione perpendicolare all' osse.*

Qualunque sia la forma del cristallo, o naturale come quella cha ha acquistato nel formarsi, o artificiale come tutte quelle che possiamo darli dividendolo, si chiama *sezione principale* la sezione fatta per mezzo di un piano perpendicolare ad una faccia e che passi per l' asse, e *sezione perpendicolare oll' asse* la sezione fatta per mezzo di un piano perpendicolare all' asse.

Quando il raggio incidente è compreso nel piano di una sezione principale, i due raggi refratti sono compresi ambedue in questo piano. Il raggio straordinario è dunque allora sottoposto alla prima legge della refrazione. Lo stesso ha luogo quando il raggio incidente è nel piano della sezione perpendicolare all' asse; ma allora, cioè in quest' ultimo caso, è sottoposto inoltre alla seconda legge della refrazione, vale a dire che i seni d' incidenza e di refrazione hanno un rapporto costante per tutte le obliquità d' incidenza. Questo rapporto, che necessariamente differisce da quello della refrazione ordinaria, è ciò che si dice *indice di refrozione straordinoria.* Indicando con n l' indice di refrazione dei raggi ordinarj, e con n' quello dei raggi straordinarj, Malus ha trovato pel carbonato di calce, o spato d' Islanda

$$n = 1{,}654295, \quad n' = 1{,}482959.$$

56. Tutti i cristalli ad un asse non hanno, come il carbonato di calce, un indice di refrazione straordinaria minore di quello della refrazione ordinaria; infatti ve ne sono alcuni, nei quali il raggio straordinario invece di scostarsi dalla perpendicolare, se ne avvicina; il che dà un indice maggiore dell' indice ordinario Biot, che il primo ha scoperto tutte queste circostanze, chiamava *cristalli attrattivi* quelli che si trovano nell' ultimo caso, *cristalli repulsivi* gli altri: ma a queste denominazioni sono state sostituite quelle di *cristolli positivi* e di *cristalli negotivi.* Fino ad ora si conoscono trentuno cristalli negativi e quattordici positivi, che sono:

Cristolli negativi.

Carbonato di calce.	Idrato di stronziana.
Carbonato di calce e di magnesia.	Arseniato di potassa.
Carbonato di calce e di ferro.	Idroclorato di calce.
Tormalina.	Idroclorato di stronziana.
Rubellite.	Sottosolfato di potassa.
Corindone.	Solfato di nickel e di rame.
Saffiro.	Cinabro.
Rubino.	Mellite.
Smeraldo.	Molibdato di piombo.
Berillo.	Ottoedrite.
Apata.	Prussiato di potassa.
Idocrasn.	Fosfato di calce.

Vernerite.	Arseniato di piombo.
Mica di Kariat.	Arseniato di rame.
Fosfato di piombo.	Nefelina.
Fosfato di piombo arseniato.	

Cristalli positivi.

Zirconio.	Solfato di potassa e di ferro.
Quarzo.	Sopracetato di rame e di calce.
Ossido di ferro.	Idrato di magnesia.
Tungstato di zinco.	Ghiacelo.
Stannite.	Iposolfato di calce.
Bornette.	Dioptasio.
Apofilite.	Argento rosso.

57. Il carattere distintivo dei cristalli a due assi quello si è di offrire due direzioni per le quali un raggio incidente gli attraversa senza dividersi, mentre in tutte le altre esso si divide in due raggi refratti; ma in tali cristalli i fenomeni divengono più complicati, perchè non vi è più raggio ordinario, vale a dire che nessuno dei due raggi segue le leggi di Cartesio. Si può verificare questo fatto osservando un oggetto a traverso ad una lastra di solfato di calce a facce parallele: quando si fa girare la lastra, le due immagini divengono mobili.

I due assi ottici fanno tra loro angoli differentissimi nei diversi cristalli. Guglielmo Herschell ha scoperto di più che gli assi relativi ai raggi omogenei sono distinti gli uni dagli altri, ma disposti simmetricamente, in modo che gli angoli che essi formano a due a due sono tutti divisi in due parti eguali da una stessa retta.

Anco nei cristalli a due assi vi sono due sezioni rimarcabilissime che diconsi la *sezione perpendicolare alla linea media*, e la *sezione perpendicolare alla linea supplementaria*. S'immagini un piano che passi pei due assi, e si conducanu due rette in questo piano in modo che una di esse divida in due parti eguali i due angoli minori opposti al vertice che formano nella loro intersezione gli assi, e l'altra divida in due parti eguali i due angoli maggiori opposti parimente al vertice: la prima sarà la *linea media*, e la seconda la *linea supplementaria*. Ogni sezione formata nel cristallo da un piano perpendicolare alla linea media sarà una *sezione perpendicolare alla linea media*, come qualunque sezione formata da un piano perpendicolare alla linea supplementaria sarà una *sezione perpendicolare alla linea supplementaria*.

In ambedue queste sezioni, uno dei due raggi è sottoposto alle leggi ordinarie della refrazione.

Le forme primitive dei cristalli ad un asse sono il *romboide*, il *prisma esaedro regolare*, l'*ottaedro isoscele a base quadrata* e il *prisma retto a base quadrata*. Tutte le altre forme appartengono a cristalli a due assi o a cristalli che non hanno che una sola refrazione. Ecco la lista dei cristalli a due assi:

Cristalli bi-refrangenti a due assi.

Nomi delle sostanze	Angoli degli assi	
Solfato di nickel (alcuni saggi)	2°	0′
Solfo-carbonato di piombo	2	0
Nitrato di potassa	5	20
Mica (alcuni saggi)	6	0
Carbonato di stronziana	6	56
Talco	7	24
Perla	11	28
Idrato di barite	13	18
Mica (alcuni saggi)	14	0
Aragonite	18	18
Prussiato di potassa	19	24
Mica (alcuni saggi)	25	0
Cimofane	27	51
Anidrite	28	7
Borace	28	42
Mica (diversi saggi esaminati da Biot)	30	0
	31	0
	32	0
	34	0
	37	0
Apofilite	35	8
Solfato di magnesia	37	24
Solfato di barite	37	42
Spermaceti	37	40
Borace nativo	38	48
Nitrato di zinco	40	0
Stilbite	41	42
Solfato di nickel	42	4
Carbonato d' ammoniaca	43	24
Solfato di zinco	44	28
Anidrite esaminata da Biot	44	41
Mica	45	0
Benzoato d' ammoniaca	45	8
Carbonato di barite	45	8
Solfato di soda e di magnesia	46	49
Solfato d' ammoniaca	49	42
Topazo del Brasile	49 a 50	0
Zucchero	50	0
Solfato di stronziana	50	0
Solfo-idroclorato di magnesia e di ferro	51	16
Solfato di magnesia e d' ammoniaca	51	22
Fosfato di soda	55	20

Contonite	56	6
Solfato di calce	60	0
Ossinitrato d'argento	62	16
Giolite	62	50
Feldspato	65	0
Topazo della contea di Aberdeen	65	0
Solfato di potassa	67	0
Carbonato di soda	70	1
Acetato di piombo	70	25
Acido citrico	70	29
Tartarato di potassa	71	20
Acido tartarico	79	0
Tartarato di potassa e di soda	80	0
Carbonato di potassa	80	30
Cianite	81	48
Clorato di potassa	82	0
Epidoto	84	19
Idroclorato di rame	84	30
Peridotò	87	56
Acido succinico	90	0
Solfato di ferro	90	0

Sorret di Ginevra ha trovato una relazione assai notabile tra la posizione dei due assi e la forma primitiva del cristallo; secondo questo fisico, il piano dei due assi sarebbe sempre disposto in un modo simmetrico rapporto alle facce della forma primitiva, e gli assi sarebbero situati in questo piano in modo da fare degli angoli eguali con queste facce.

58. *Polarizzazione della luce.* Si chiama *polarizzazione* la modificazione che prova un raggio di luce reflesso o refratto da soperficie levigate, o trasmesso a traverso a cristalli bi-refrangenti sotto certi determinati angoli d' incidenza, per cui perde la proprietà di reflettersi ulteriormente sotto qualunque condizione d' incidenza incontri nuove superficie levigate.

Supponiamo, per fissar meglio le idee, che ad un raggio di luce reflesso da una lastra di vetro sotto un angolo d'incidenza di 54° 35', si presenti una seconda lastra di vetro parallela alla prima, ondo il raggio la incontri egualmente sotto lo stesso angolo d' incidenza di 54° 35': questo raggio sarà reflesso di nuovo, e se è un raggio solare si potrà, isolandolo in una camera oscura, ricevere sopra una superficie qualunque un'immagine brillante del sole. Supponiamo ora che si faccia girare lentamente la seconda lastra col suo proprio piano intorno all'asse del raggio. Il secondo piano di reflessione, che fino ad ora coincideva col primo, cangerà di posizione senza che l' angolo d' incidenza cessi di essere di 54° 35', cosicchè se il raggio godesse di tutte le proprietà che aveva prima, l' immagine trasmessa non dovrebbe provare nessuna alterazione; ma ciò non è così: a misura che il secondo piano di reflessione si scosta dal primo, l' immagine diminuisce di vivacità, a poco a poco si cancella e finalmente sparisce affatto, quando il secondo piano di reflessione è divenuto perpendicolare al primo. In questa posizione, non vi ha più nessuna reflessione sulla seconda lastra, e il raggio trovasi distrutto dal suo contatto con essa.

Da questo singolare fenomeno resulta che pel fatto solo della sua reflessione

sopra una lastra di vetro, sotto un angolo d'incidenza di 54° 35', il raggio ha cessato di essere egualmente reflessibile, sotto questa stessa incidenza, sopra un'altra lastra di vetro: esso ha dunque subito un cangiamento nella sua costituzione primitiva, una modificazione nelle sue proprietà naturali: ora è precisamente questo cangiamento o questa modificazione che viene comunemente indicata col nome troppo significativo di *polarizzazione*, che si riferisce all'ipotesi di molecole luminose che hanno assi e poli di rotazione, ipotesi che non sembra oggi più sostenibile. Checchè possa dirsi di questa denominazione, un raggio luminoso in tal guisa modificato dicesi un *raggio polarizzato*, e da ciò che precede è facile scorgere che le proprietà della *luce polarizzata* differiscono essenzialmente da quelle della luce naturale. Colla scoperta di questo fatto importante, Malus ha cangiato l'aspetto all'ottica ed ha aperto alle investigazioni dei fisici un campo non meno nuovo che fecondo.

59. Il fenomeno fondamentale che abbiamo esposto può facilmente osservarsi mediante il seguente apparecchio.

Sia BF (*Tav.* CLXXVI, *fig.* 2) un tubo di rame simile ad un tubo di canocchiale e mobile sopra un perno A'. Si collochi sopra un piede. Questo tubo deve esser guarnito a ciascuna delle sue estremità di un tamburo mobile terminato da due verghe parallele al suo asse, le quali sostengono l'asse di un piccolo specchio piano di vetro nero. I piccoli specchi AB e CD possono prendere tutte le inclinazioni possibili rapporto all'asse del tubo, e i loro assi di rotazione possono pure prendere tra loro tutte le posizioni possibili, perchè i tamburi a cui sono fermati entrano a fregamento nel tubo e possono così girare sopra se stessi; dei circoli graduati, fissati in ciascun piano di movimento, servono a misurare queste diverse inclinazioni. Finalmente un diaframma O non lascia penetrare nel tubo che i raggi reflessi parallelamente al suo asse.

Disposto l'apparecchio sul suo piede, s'inclinano gli specchi in modo che la loro direzione faccia un angolo di 35° 25' coll'asse del tubo, e si dà al tubo una posizione tale che possa vedersi sullo specchio CD la luce del cielo o quella di una bugia dopo essere stata reflessa sul primo specchio AB. Quando i due specchi sono paralleli, si vede nello specchio CD un'immagine brillante; ma se, senza cangiare la inclinazione degli specchi rapporto all'asse, si fa girare lo specchio CD, si vedranno riprodurre successivamente i fenomeni già indicati, vale a dire che l'immagine brillante s'indebolirà a misura che il secondo piano di reflessione si scosterà angolarmente dal primo. Alla distanza di 90°, l'immagine svanirà; passata questa distanza, essa comparirà di nuovo e la sua intensità sarà crescente finchè dopo una mezza rivoluzione dello specchio CD i due piani di reflessione torneranno a coincidere di nuovo. Continuando sempre la rotazione, l'intensità dell'immagine diverrà decrescente una seconda volta, ed essa sparirà nuovamente quando i piani di reflessione saranno divenuti rettangolari. Così, nel caso di una rivoluzione compiuta dello specchio CD, vi saranno due istanti nei quali l'immagine avrà il suo massimo di chiarezza e due istanti in cui cesserà d'esser visibile.

60. Le variazioni d'intensità della luce reflessa una seconda volta sembrano esser le stesse nelle due metà di una intera rivoluzione dello specchio CD, e Malus aveva supposto che l'intensità del raggio reflesso fosse costantemente proporzionale al quadrato del coseno dell'angolo dei due piani di reflessione, talchè indicando con O il *maximum* d'intensità e con *i* l'angolo dei due piani, avrebbesi per l'intensità corrispondente all'angolo *i* l'espressione

$$O \cos^2 i.$$

Questa legge semplicissima è stata in seguito verificata e dimostrata dal celebre Arago.

61. Cangiando un poco l'inclinazione dello specchio CD sull'asse del tubo, senza alterare quella del primo specchio, la intensità di chiarezza delle immagini succedonsi egualmente nello stesso ordine; ma non vi è più sparizione totale: si ha soltanto il massimo di chiarezza quando i piani di reflessione coincidono, e il minimo quando sono rettangolari. Gli stessi fenomeni si riproducono quado si fa variare un poco l'inclinazione del primo specchio senza cangiare quella del secondo, ed anco quando si fanno variare tutte e due di una piccola quantità.

Così, il raggio luminoso non rimane polarizzato solamente quando incontra il primo specchio sotto un'inclinazione di 35° 25', o, il che è lo stesso, sotto un angolo d'incidenza di 54° 35'; esso lo è ancora sotto altri angoli d'incidenza, quantunque per verità incompletamente: ma da ciò siamo condotti ad ammettere che in qualunque reflessione vi ha sempre una parte di luce polarizzata tanto più grande quanto meno l'angolo d'incidenza differisce dall'angolo della polarizzazione completa.

62. Tutti i corpi levigati hanno la proprietà di polarizzare la luce sotto una certa incidenza che varia colla loro natura, ma non hanno tutti la proprietà di polarizzarla compiutamente. In generale, si dice *angolo di polarizzazione* l'angolo d'inclinazione sotto il quale il raggio deve incontrare la superficie reflettente per esser polarizzato; quest'angolo è il complemento dell'angolo d'incidenza: così l'angolo di polarizzazione completa pel vetro è di 35° 25'. Qualunque sia la sostanza sulla quale un raggio sia stato completamente polarizzato, le sue proprietà sono identicamente le stesse, e non può esser più reflesso da nessuna delle superficia compiutamente polarizzanti, quando incontra queste superficie sotto i loro angoli respettivi di polarizzazione completa, e quando i piani di reflessione sono perpendicolari tra loro. Si è convenuto di chiamare il primo piano di reflessione, vale a dire quello nel quale si muove il raggio dopo la prima reflessione che lo ha polarizzato, *piano di polarizzazione*.

Per riconoscere se un raggio di luce è polarizzato completamente o incompletamente, basta dunque riceverlo sopra una lastra di vetro sotto un angolo d'inclinazione di 35° 25', e quindi far girare questa lastra sopra sè stessa senza cangiare la sua inclinazione. Se, in una certa posizione della lastra, il raggio non è più reflesso, possiamo concluderne che era compiutamente polarizzato in un piano perpendicolare al piano d'incidenza; se vi è unicamente un minimo di splendore, il raggio era polarizzato incompletamente, sempre in un piano perpendicolare al piano d'incidenza che corrisponde a questo minimo; ma se, in tutte le posizioni della lastra, il raggio reflesso conserva la stessa intensità possiamo esser certi che era naturale. In breve vedremo che esistono dei mezzi più semplici e più facili per distinguere immediatamente un raggio naturale da un raggio polarizzato.

63. Brewster ha scoperto che l'angolo della polarizzazione massima dei corpi trasparenti è connesso col potere refrangente di questi corpi da questa legge di mirabile semplicità.

La cotangente dell'angolo di polarizzazione è eguale all'indice di refrazione.

Essa resulta dal fatto importantissimo, verificato da questo fisico, che quando vi ha polarizzazione completa o massima, *il raggio reflesso è perpendicolare al raggio refratto*. Infatti, in forza di questa relazione, l'angolo di refrazione è il complemento dell'angolo di reflessione, e si ha

$$(90^\circ - P) + R = 90^\circ,$$

esprimendo R l'angolo di refrazione, P quello di polarizzazione, e per conse-

guenza $90°-P$ essendo l'angolo d'incidenza eguale a quello di reflessione; questa eguaglianza dà $P=R$: ma n essendo l'indice di refrazione si ha pure, per la nota legge che unisce gli angoli d'incidenza e di refrazione,

$$\frac{\text{sen}(90°-P)}{\text{sen}\,R}=\frac{\cos P}{\text{sen}\,R}=n,$$

e per conseguenza

$$\frac{\cos P}{\text{sen}\,P}=\cot P=n.$$

In questa guisa si può trovare facilmente l'angolo di polarizzazione quando è noto l'indice di refrazione e viceversa.

Noi daremo qui alcuni angoli di polarizzazione osservati direttamente, per confrontarli con quelli che si ottengono da questa formula.

Nomi delle sostanze	Angolo di polarizzazione completa o massima			
	osservato		calcolato	
Acqua	37°	15′	36°	49′
Spath fluor.	35	10	34	51
Ossidiana.	33	57	33	54
Solfato di calce.	33	32	33	15
Cristallo di monte.	32	38	33	2
Vetro opale.	31	59	31	27
Topazzo.	31	20	31	26
Vetro arancione.	30	48	30	32
Rubino.	29	44	29	35
Vetro d'antimonio.	25	15	25	30
Solfo nativo.	25	50	26	15
Diamante.	21	58	21	59

Se accaderà che un giorno la legge di Brewster si trovi dimostrata *a priori*, essa offrirà una riprova sicura nella ricerca degl'indici di refrazione e degli angoli di polarizzazione. Secondo lo stesso osservatore, i corpi non polarizzano compiutamente la luce che quando il loro indice di refrazione è al di sotto di 1,7. Di tutte le superficie levigate quelle che meno polarizzano sono le superficie metalliche.

64. Un raggio di luce polarizzato in un piano determinato, rimane polarizzato nel medesimo senso quando attraversa perpendicolarmente dei mezzi diafani qualunque, ad eccezione però dei cristalli bi-refrangenti, dei quali vedremo in breve il modo di azione; ma quando il raggio si riflette sopra una superficie levigata sotto diverse inclinazioni, la porzione reflessa, quantunque sempre polarizzata, non lo è più nel medesimo piano. Per esempio, supponendo che il piano di polarizzazione del raggio incidente faccia un angolo di 40° col piano della nuova reflessione, il piano di polarizzazione del raggio reflesso farà un angolo maggiore o minore di 40° collo stesso piano di reflessione, secondo le circostanze dell'incidenza.

L' angolo del piano di polarizzazione col piano di reflessione o d' incidenza si dice l' *azimut* del piano di polarizzazione.

65. La luce si polarizza non solo alla prima superficie dei corpi trasparenti, ma ancora alla seconda, vale a dire nel loro interno. Sia DE (*Tav.* CLXXVI, *fig.* 3) la prima superficie di un prisma di vetro, e GH la seconda superficie parallela alla prima: immaginiamo che un raggio incidente AB incontri la superficie DE sotto l' inclinazione corrispondente alla polarizzazione completa, la parte del fascio luminoso refratto BC che si rifletta nella direzione CO, sulla seconda superficie GH, sarà pure completamente polarizzata; e se si è formato il prisma in modo che questo raggio possa uscire perpendicolarmente da una faccia EF, il che non fa deviare il piano di polarizzazione, si potrà riconoscere che il raggio è polarizzato nel piano di reflessione. La scoperta di questo fatto importante è dovuta pure a Malus.

La relazione degli angoli d' incidenza e di refrazione serve a trovare facilmente la grandezza dell' angolo di polarizzazione completa alla seconda superficie; perchè quest' angolo BCN essendo eguale al complemento dell' angolo di refrazione NBC, se nell' espressione generale

$$\text{sen}\, I = n\, \text{sen}\, R$$

si sostituisce $90^\circ - P$ ad I, e $90^\circ - P'$ ad R, indicando con P l' angolo di polarizzazione alla prima superficie e con P' l'angolo di polarizzazione alla seconda, si avrà

$$\text{sen}\,(90^\circ - P) = n\, \text{sen}\,(90^\circ - P'),$$

ossia

$$\cos P = n \cos P'.$$

Secondo la legge di Brewster, si ha $\cot P = n$, e per conseguenza $\cos P' = \text{sen}\, P$; così l' angolo della polarizzazione completa alla seconda superficie è il complemento dell' angolo della polarizzazione completa alla prima.

66. La polarizzazione della luce per refrazione presenta varj fenomeni importanti. Se si forma un prisma di vetro EDF (*Tav.* CLXXVI, *fig.* 4) in modo che un raggio incidente AB, sotto l' inclinazione della polarizzazione completa, possa emergere perpendicolarmente alla faccia opposta EF, si scorge che il raggio emergente BC è anche esso polarizzato in un piano perpendicolare al piano d' incidenza; ma la polarizzazione non è completa. Lo stesso ha luogo pel raggio emergente CA' (*Tav.* CLXXVI, *fig.* 3), quando la faccia di emergenza è parallela a quella d' incidenza. In quest' ultimo caso, se si fa passare il raggio emergente a traverso ad una seconda lastra a facce parallele e parallela alla prima, esso conterrà maggior luce polarizzata dopo la seconda emergenza. La quantità di luce polarizzata andrà sempre crescendo col numero delle lastre che si faranno attraversare dal raggio; e finalmente, quando questo numero sarà sufficiente, l' ultimo raggio emergente sarà compiutamente polarizzato.

67. I cristalli bi-refrangenti polarizzano completamente la luce che gli attraverse dividendosi in due fasci, l' uno ordinario e l' altro straordinario (53). Questo fatto si può verificare ricevendo i due raggi emergenti sopra uno specchio sotto una inclinazione di 35° 25', ed osservando le variazioni delle due immagini: quando il piano di reflessione è parallelo alla sezione principale del cristallo, l' immagine ordinaria è la sola visibile: quando al contrario il piano di reflessione è perpendicolare a questa sezione, è l' immagine straordinaria quella che si scorge. Risulta da questi fenomeni che il raggio ordinario è polarizzato secondo la sezione principale, e il raggio straordinario perpendicolarmente a questa stessa sezione.

Se il raggio incidente fosse primitivamente polarizzato in un piano qualunque, l

raggi emergenti sarebbero pure polarizzati, il primo nel piano della sezione principale, e il secondo in un piano perpendicolare a questa sezione. Ma l'intensità di questi raggi non sarebbe più la stessa di quella che sarebbe stata se il raggio incidente fosse stato naturale.

68. In alcune direzioni, varj cristalli bi-refrangenti hanno la proprietà di assorbire più abbondantemente la luce polarizzata che la luce naturale: quello che più di tutti la possiede in maggior grado è la tormalina; perchè una lastra sottilissima di tormalina bruna assorbisce completamente la luce polarizzata quando il suo asse ottico è parallelo al piano di reflessione; in qualunque altra posizione, essa trasmette questa luce con una intensità tanto più grande quanto più il suo asse è vicino ad esser perpendicolare allo stesso piano. Questa proprietà offre un mezzo sempliciissimo per riconoscere immediatamente la natura di un raggio e il suo piano di polarizzazione, osservandolo a traverso ad una lastra di tormalina tagliata parallelamente al suo asse. Se, facendo girare la lastra nel suo piano, l'intensità dal raggio non prova alterazione alcuna, ciò avviene perchè esso è composto soltanto di luce naturale; quando questa intensità varia, possiamo concluderne che il raggio è in parte polarizzato; e finalmente, se in una posizione determinata della lastra il raggio sparisce totalmente, ciò vuol dire che era compintamente polarizzato in un piano parallelo alle sezione principale della lastra.

69. Nell'impossibilità in cui siamo di esporre tutti i fenomeni della polarizzazione, abbiamo dovuto scegliere a preferenza quelli che in certo modo sono caratteristici: ve ne sono però altri che crediamo indispensabile d'indicare per infondere almeno il desiderio di studiarli nelle opere speciali. Tali per esempio sono i fatti curiosissimi scoperti da Fresnel e da Arago sull'azione scambievole dei raggi polarizzati, e quelli non meno curiosi della colorazione della luce polarizzata che attraversa lastre suttili di cristallo.

Due fasci polarizzati emanati da una stessa sorgente possono produrre, come due fasci naturali, delle frange colorate, mediante la loro interferenza (51), quando il loro piano di polarizzazione è lo stesso; ma facendo variare i piani di polarizzazione, le frange si vedono successivamente indebolire a misura che questi piani si accostano dal parallelismo, e finiscono con isparire quando i piani sono divenuti perpendicolari tra loro. Così, l'influenza che due raggi polarizzati esercitano l'uno sull'altro dipende dalla relazione dei loro piani di polarizzazione, la quale è al suo massimo quando questi piani sono paralleli, ed è nulla quando sono rettangolari.

Quando un fascio di luce bianca polarizzata attraversa perpendicolarmente una lastra sottile di carbonato di calce, tagliata perpendicolarmente all'asse, si scorge, osservando il raggio emergente attraverso ad una tormalina, una serie di anelli colorati concentrici tagliati da una gran croce: questa croce è nera, se la sezione principale della tormalina è parallela al piano primitivo di polarizzazione; è bianca, se la sezione è perpendicolare allo stesso piano: in quest'ultimo caso, i colori degli anelli sono complementarj di quelli che si manifestano nel primo caso. Gli stessi fenomeni hanno luogo con tutte le lastre sottili dei cristalli bi-refrangenti ad un asse. I cristalli a due assi fanno nascere frange colorate diversamente contornate. Fresnel ha dato delle spiegazioni soddisfacentissime di tutti questi fenomeni in una memoria inserita nella *Raccolta* dei dotti stranieri dell'Accademia delle Scienze di Parigi. I principali risultati ottenuti da questo fisico sono riportati nel tomo XVII degli *Annales de Physique et de Chimie*.

70. Andando la luce sempre più polarizzandosi per mezzo delle refrazioni successive (66), è facile il congetturare che quella del sole e degli astri debba trovarsi sempre più o meno polarizzata in forza il suo passaggio attraverso all'atmosfera

della terra. Arago ha trovato che il massimo di polarizzazione della luce turchina del cielo ha luogo ad una distanza angolare di 90°; vale a dire che osservando questa luce nel piano verticale del sole, si trova che la sua porzione polarizzata eresce fino a 90° di distanza, e che quindi diminuisce successivamente, a misura che la distauza angolare si eleva al di sopra di 90°. La luee della lnua contiene una gran quantità di luce polarizzata.

I raggi di luce omogenea hanno ognuno un angolo particolare di polarizzazione, come hauno ognuno un indice particolare di refrazione, e sebbene questi angoli differiscano pochissimo, ne resultano diversi fenomeni di colorazione quando, mediante la reflessione, si distrugge un raggio di luce bianca polarizzata. Per esempio, quando due piani di reflessione sono perpendicolari, ed un raggio vi si trova reflesso sotto l'angolo della polarizzazione completa, l'immagine bianca ehe questa posizione ha fatto scomparire lascia sempre delle tinte deboli provenienti dai raggi omogenei disegualmente polarizzati.

71. *Analogia tra la luce e il calorico.* Abbiamo veduto (*Vedi* Calorico) che il calorico si reflette al pari della luce facendo un angolo di reflessione eguale all'angolo d'incidenza e situato nello stesso piano. I fenomeni della refrazione del calorico essendo pure gli stessi di quelli della refrazione della luce, ed il calorico raggiante essendo secondo ciò che hanno dimostrato le helle esperienze di Bérard suscettibile di *polarizzazione* e di *doppia refrazione*, siamo condotti naturalmente ad ammettere che la *luce* ed il *calorico* non siano che due manifestazioni differenti di una sola e medesima causa. Questa ipotesi sembra tanto più ragionevole in quanto che la luce emanata direttamente dalle principali sorgenti è sempre accompagnata da calorico, e che in generale un corpo diviene luminoso quando la sua temperatura supera 500° centigradi. Ma le ultime esperienze del Melloni, mentre rivelano nuove similitudini tra la luce e il calorico, complicano singolarmente il problema. Queste esperienze dimostrano nel modo il più convincente che un raggio di calorico naturale, o emanato direttamente, è composto di più raggi primitivi diversamente refrangibili, come lo sono i raggi di luce omogenea.

Questo ingegnoso osservatore ha saputo distinguere la natura differente dei raggi trasmessi a traverso ai corpi diatermani (*Vedi* Calorico), ed ha potuto verificare che due sostanze diatermane differenti si comportano rapporto al calorico raggiante come due sostanze trasparenti colorate rapporto alla luce naturale, di cui non trasmettono che alcuni raggi omogenei mentre assorbiscono gli altri. Così, il calorico trasmesso a traverso ad una lastra di allume non è lo stesso di quello trasmesso attraverso ad una lastra di acido nitrico, e non si può spiegare questo fenomeno che attribuendo ad ognuna di queste lastre una specie di *colorazione* calorifica, in virtù della quale non lasciano esse passare che i raggi dotati della *stessa colorazione*, precisamente come una lastra di vetro rosso non lascia passare che la luce rossa.

Quando si esaminano i colori dello spettro solare, è facile riconoscere che ogni raggio omogeneo eleva differentemente un termometro sul quale sia esso ricevuto. Si era dapprima creduto che i colori i più brillanti dovessero possedere il calorico massimo, e si era fissato il massimo del calorico nel mezzo dello spettro, vale a dire nel giallo. In seguito, Bérard aveva riconosciuto che questo massimo si trovava generalmente nel rosso, mentre Herschell, analizzando le parti oscure dello spettro, lo poneva nella striscia oscura che viene dopo il rosso. Seebeck fece in fine vedere nel 1828, che il massimo del calorico aveva una posizione variabile dipendente dalla natura del prisma refrangente: così, secondo che il prisma è d'acqua, d'acido solforico, di vetro ordinario o di flint-glass,

il massimo del calorico si trova nel giallo, nell'arancio, nel rosso o al di là del rosso. Questi cangiamenti di posizione del massimo del calorico si trovano spiegati dalla proprietà delle sostanze diatermane, e secondo il Melloni il massimo si allontana tanto più dal giallo verso il rosso, quanto più diatermana è la sostanza del prisma. Per esempio, se il prisma è di *sal gemmo*, corpo lo cui proprietà transcalorifiche sono le più intense, il massimo ò al di là del rosso, a una distanza eguale a quella del rosso dal giallo. Se si fa passare lo spettro solare prodotto da un prisma di sal gemma a traverso a diverse lastre colorate, si può riscontrare che lo spettro calorifico è indipendente dallo spettro luminoso; perchè, in certi casi, la forma e la grandezza del primo restano le stesse, mentre il secondo prova dei cangiamenti considerabili e viceversa. Così, quantunque legati insieme nel fascio incidente, il calorico e la luce sono due cose perfettamente distinte, ed è impossibile di confonderle.

72. La teoria della *emissione della luce*, che nel modo il più soddisfacente spiegava tutti i fenomeni della *reflessione* e della *refrazione* conosciuti al tempo di Nowton, ma cho non poteva piegarsi che con difficoltà a qoelli della diffrazione e della doppia refrazione, è oggigiorno completamente insufficiente, e ad onta di tutti gli sforzi de'suoi più abili aderenti, essa rimane estranea ai fenomeni dalla polarizzazione. Se l'esclusione di uno del due sistemi sulla propagazione della luce traesse seco la certezza dell'altro, dovrebbesi senza alcun dubbio adottare il *sistema delle vibrozioni*; ma nulla fino ad ora ha potuto stabilire che la verità si trovi necessariamente nell'uno o nell'altro di questi sistemi, e se il primo sembra dover essero rigettato affatto, il secondo rimane complicato da un numero grandissimo di difficoltà. Pure, dipartendosi dalla doppia ipotesi che la luce si propaghi mediante le ondulazioni dell'etere, e cho l'etere sparso in tutti gli spazj abbia maggiore o minor densità in ognuno di questi spazj a seconda della natura del corpo cbo lo riempie, Fresnel è giunto a render ragione di tutti i fenomeni fino ad ora conosciuti, a determinarno le leggi, e a riconoscere *a priori* dei fatti costatati poi dall'esperienza. Se questi lavori importantissimi non bastano per rivestire di una certezza assoluta il punto di partenza del sistema, lo elevano almeno ad un grado altissimo di probabilità, che possiamo sperare di vedere ancora aumentare mediante ulteriori scoperte. Si consultino gli *Annales de Physique et de Chimie*, tom. XVII.

LUCE CENERINA. *Vedi* Luna.

LUCE ZODIACALE. *Vedi* Zodiaco.

LUCIFERO (*Astron.*). Nome che gli autori latini davano al pianeta di Venere quando comparisce la mattina prima del levaro del sole. Siccome questo pianeta non si allontana mai dal sole più di 48°, esso apparisce sull'orizzonte qualche tempo prima del sole nello epocho in cui è più occidentale di quest'astro: è per tal ragione che i poeti e gli astronomi lo chiamarono *Lucifero*, vale a dire *apportatore di luce*. Quando poi si vede la sera dopo il tramonto del sole, si chiamava *Espero* che significa *sero*.

LUGLIO (*Calen.*). Nome del settimo mese dell'anno, così chiamato perchè i Romani l'avevano consacrato a Giulio Cesare. *Vedi* Calendario.

LUINO (Francesco), gesuita, nato a Milano nel 1740, si applicò con ardore e successo allo studio dello matematiche e dell'astronomia nel celebre collegio di Brera. Professò poscia con lustro nollo scuole palatine di Milano, nell'università di Pavia a in Mantova, nella quale ultima città morì il 7 Novembro 1792. Le sue opere scientifiche sono: I *Esercitazione sull'altezzo del polo di Milano*, Milano, 1769, in-4; II *Sulle progressioni* e *sulle serie*, ivi, 1767; vi sono state aggiunte duo memorio di Boscovich; III *Corso degli elementi d'algebra, di geometria e delle sezioni coniche*, ivi, 1772, 3 vol.

LUNA (*Astron.*). Pianeta secondario che accompagna la terra, intorno alla quale esso descrive un'orbita ellittica in un periodo di circa 27 giorni.

I fenomeni che quest'astro ci presenta sono variatissimi. La sua luce è più pallida di quella del sole, nè produce calore alcuno sensibile: nella sua vivacità e nella sua estensione prova essa dei cangiamenti periodici ai quali è stato dato il nome di *fasi*. Se si osserva la luna quando passa al meridiano nel mezzo della notte, il suo disco comparisce interamente luminoso, la sua forma è rotonda e brillante: allora essa si leva quando il sole tramonta e reciprocamente. Se si continua ad osservarla per più giorni di seguito, la vediamo perdere a poco a poco il suo splendore; la parte illuminata del suo disco va diminuendo di larghezza; nel tempo stesso essa si leva più tardi; e quando il suo disco è ridotto ad un semicerchio, essa non si vede più che durante l'ultima metà della notte. Qualche giorno dopo, non presenta più che un arco a guisa di falce, le cui punte sono rivolte verso l'occidente, vale a dire verso la parte del disco più lontana dal sole. Allora non si leva che pochi istanti prima di quest'astro; l'arco luminoso va di giorno in giorno diminuendo, la luna diviene oscura affatto, si leva insieme col sole, e si cessa di scorgerla. Dopo essere stata invisibile per tre o quattro giorni, essa ricomparisce la sera all'occidente poco tempo dopo il tramonto del sole; in principio non presenta che un filo di luce che ingrandendosi a poco a poco prende in pochi giorni la forma di un arco le cui punte sono rivolte all'oriente, cioè dalla parte opposta al sole. Nei giorni seguenti, la luna si allontana sempre più dal sole, il suo disco s'ingrandisce ed essa riprende finalmente la sua forma rotonda e brillante, per diminuire di nuovo e presentare successivamente e nello stesso ordine gli stessi fenomeni. Il periodo di queste fasi è di circa ventinove giorni e mezzo.

Questi fenomeni, assai prima di essere stati spiegati, somministravano una misura così naturale del tempo, che non deve far maraviglia di vedere come fino dall'infanzia delle società le fasi della luna abbiano servito a regolare le assemblee, i sacrifizj, i pubblici esercizj, e finalmente il calendario. Il *mese* degli antichi non è che quell'intervallo di tempo che passa tra due novilunj, intervallo che dicesi ancora *lunazione* o *rivoluzione sinodica* della luna. In greco, le parole *luna*, μήνη, e *mese*, μήν, μηνός hanno un'analogia evidentissima. Frattanto la natura stessa di questi cangiamenti doveva condurre ben presto i primi osservatori alla cognizione della loro causa, perchè non se ne poteva dare una ragione plausibile che supponendo la luna un corpo opaco, oscuro per sè stesso, e che brilla unicamente per uno splendore comunicatogli. Era infatti impossibile di ammettere che il suo disco fosse metà oscuro e metà luminoso, e che ci presentasse successivamente ognuna delle sue metà; perchè, quando questo disco non è luminoso che in parte, la parte oscura non è affatto invisibile, ma è ancora illuminata da una debole luce che dicesi *luce cenerina*, e che permette di scorgervi le stesse sinuosità e le stesse macchie che vi si vedono nel tempo in cui la luna è tutta illuminata. L'osservazione rendeva dunque evidente che la luna ci presenta sempre la stessa faccia, e che le variazioni delle sue fasi resultano dalle differenti sue posizioni rispetto al sole del quale essa non fa che rifletterci la luce.

La figura 9 della Tavola CV può facilmente far comprendere come accadano tutte le circostanze delle fasi della luna. Quando quest'astro è compiutamente luminoso e passa pel meridiano a mezzanotte, il sole è sotto l'orizzonte sul meridiano opposto; così, la terra essendo in T, la luna è in L, e il sole S illumina interamente la superficie che essa ci presenta: allora si ha la *luna piena* o *plenilunio*. Quando al contrario la luna e il sole si levano nel tempo stesso sull'orizzonte, la luna è in OE, e la sua faccia illuminata E essendo sempre necessaria-

mante rivolta verso il sole, essa ci presenta la sua faccia oscura, e noi non possiamo vederla: allora si ha *luna nuova* o *novilunio*. In tutte le altre posizioni intermedie, la luna ci presenta delle porzioni più o meno grandi della sua faccia illuminata, il che le dà successivamente le forme G, N, R, cioè quelle di una semplice striscia, di un semicerchio, ec.

Se l'orbita della luna fosse nel piano stesso di quella del sole, cioè dell'eclittica, tutte le volte che la luna si trovasse in L vi sarebbe necessariamente intercezione dei raggi solari cagionata dal globo terrestre, e la luna dovrebbe cessare di esser visibile in tutto il tempo che essa impiegasse ad attraversare il cono di ombra projettato dalla terra nello spazio. Come all'incontro quando fosse in OE, essa dovrebbe intercettare a noi i raggi solari, e fare sparire il sole ai nostri sguardi per alcuni istanti. Questi fenomeni, conosciuti sotto il nome di *ecclissi* (*Vedi* Ecclissa), dovrebbero dunque presentarsi ad ogni plenilunio e ad ogni novilunio, mentre in fatto non avvengono che a distanze più lontane. Così l'orbita della luna deve trovarsi in un piano differente da quello dell' eclittica. Le osservazioni hanno provato che il piano dell' orbita lunare forma con quello dell'eclittica un angolo di 5° 8′ 48″. Quest' angolo, che dicesi l' *inclinazione* dell' orbita lunare, è soggetto a piccole variazioni in più e in meno, che ci fanno rilevare che l'orbita lunare non ha un punto fisso nello spazio.

Si dà il nome di *nodi* ai due punti in cui l'orbita lunare taglia il piano dell'eclittica, e particolarmente di *nodo ascendente* a quello in cui la luna passa per andare dal sud al nord dell' eclittica, e di *nodo discendente* a quello che essa attraversa per passare dal nord al sud. Gli astronomi indicano il primo col segno ☊ ed il secondo col segno ☋. Gli ecclissi non possono aver luogo che quando la luna si trova in questi nodi, o almeno in loro vicinanza all'epoca del plenilunio o del novilunio. *Vedi* Ecclissa.

Le fasi della luna ricevono diverse denominazioni a seconda delle distanze angolari che hanno luogo tra il sole e la luna alla loro apparizione. Così si dice *opposizione* l'istante del plenilunio, e *congiunzione* quello del novilunio. L'opposizione e la congiunzione chiamansi con nome comune le *sizigie*; quando la luna si trova alla distanza di 90° dal sole, cioè alla metà del suo cammino tra la congiunzione e l'opposizione, si dice che essa è nel suo *primo quarto*; quando poi si trova alla metà della distanza tra l' opposizione e la congiunzione, si dice che è nel suo *ultimo quarto*: il primo ed ultimo quarto diconsi con nome comune le *quadrature*. Si dà ancora il nome di *ottanti* alle quattro posizioni intermedie C, I, V, X situate ad eguali distanze tra le sizigie e le quadrature; C è il *primo ottante*, I il secondo, V il terzo, e X il quarto.

La luna è quello tra tutti gli astri i cui movimenti sono più irregolari o almeno quello le cui irregolarità sono più sensibili. Noi non possiamo qui che accennare i punti principali della sua teoria.

L'orbita che la luna descrive intorno alla terra è un'ellisse variabile nelle sue dimensioni, e di cui la terra occupa uno dei fuochi. Essa la percorre in un periodo medio di 27 giorni, 7 ore, 43′ 11″,5, e dicesi questa la sua *rivoluzione siderale*. Siccome, in questo spazio di tempo, il sole, in forza del suo movimento proprio apparente, si è avanzato sull' eclittica nel medesimo senso della luna, è necessario affinchè la luna possa raggiungerlo e tornare ad esser *nuova* che essa descriva oltre una circonferenza intera della sfera celeste l'arco eccedente descritto dal sole. Questo intervallo tra un novilunio ed un altro novilunio esige dunque maggior tempo della rivoluzione siderale; la sua durata media è infatti di 29 giorni, 12 ore, 44′ 2″,8, e dicesi *rivoluzione sinodica*. Abbiamo detto che l'orbita lunare non era fissa nello spazio, e ciò è una conseguenza naturale del moto di traslazione della terra intorno al sole; ma le variazioni di quest' orbita

non provengono unicamente dall'essere essa trasportata dalla terra che la luna è obbligata a seguire; essa prova ancora nelle sue dimensioni e nell'inclinazione del suo piano rapporto all'ecclittica non poche alterazioni che rendono il corso della luna difficile a seguirsi, e la sua teoria complicatissima. Primieramente, se di mese in mese si osservano i punti in cui l'ecclittica è tagliata dalla luna, si trova che i *nodi* della sua orbita sono in uno stato continuo di *retrogradazione* sull'ecclittica, vale a dire che essi hanno un movimento in senso inverso al movimento apparente della sfera celeste. Questo movimento ha una celerità media di 3′ 10″,6 per giorno, cosicchè in un periodo di giorni solari medj 6793,39, cioè in 18 anni e circa tre quinti, il nodo ascendente percorre l'intera circonferenza dell'ecclittica. Se questo movimento fosse uniforme, basterebbe conoscere mediante l'osservazione la posizione o la longitudine dei nodi della luna in un'epoca determinata, per poterne dedurre la longitudine per un'altra epoca qualunque, ma esso è soggetto a parecchie ineguaglianze e va inoltre rallentandosi di secolo in secolo. Questo spostamento dei nodi ci fa conoscere che l'orbita della luna non è rigorosamente un'ellisse rientrante sopra sè stessa, e ce la fa comparire come una specie di spirale indefinita. Senza far conto di questa circostanza, l'asse dell'ellisse cangia continuamente di direzione nello spazio, di maniera che la distanza della luna dalla terra varia secondo una legge che non si accorda esattamente con quella del movimento ellittico. Questo fenomeno, conosciuto sotto il nome di rivoluzione degli *apsidi della luna*, si effettua in un periodo di giorni 3232,5753, vale a dire che l'asse dell'orbita lunare descrive in 9 anni circa una rivoluzione completa diretta nel senso medesimo del movimento proprio della luna. L'effetto sensibile di questa rivoluzione è quello di far cangiare continuamente il luogo dell'apogeo e quello del perigeo dell'orbita lunare, cangiamento che non è uniforme, ma le cui irregolarità non divengono sensibili che in un intervallo grande di tempo.

Il movimento apparente della luna sulla sfera celeste si trova dunque complicato da parecchi movimenti particolari, e per formarsene una idea chiara e distinta, bisogna considerare quest'astro come descrivente intorno alla terra un'ellisse che ha un doppio movimento di rivoluzione, uno nel suo proprio piano e in virtù del quale l'asse maggiore gira intorno al suo centro dall'occidente all'oriente, l'altro di oscillazione del piano stesso.

Le ineguaglianze che resultano da questa combinazione di movimenti sono state intravedute in ogni tempo dagli astronomi. Alle quattro principali si sono dati i nomi di *equazione dell'orbita*, di *evezione*, di *variazione* e di *equazione annua*. Noi passeremo ad esporle l'una dopo l'altra, e spiegheremo come possa anticipatamente determinarsi il cammino della luna ad onta della sua bizzarria e della sua irregolarità.

L'*equazione dell'orbita*, o l'*equozione del centro*, non è che la differenza tra il movimento ineguale della luna nella sua orbita ellittica e il movimento medio, eguale ed uniforme, che le si suppone in un'orbita circolare all'oggetto di poter trovare il suo luogo vero. Alla parola Anomalia abbiamo esposto come possa passarsi dal movimento circolare al movimento ellittico cercando l'*anomalia vera* per mezzo dell'*anomalia media*: ora, la differenza di queste *anomalie* è precisamente ciò che si dice l'*equazione dell'orbita*, ed è per conseguenza la quantità che bisogna aggiungere o sottrarre dall'anomalia media per avere l'anomalia vera. Per la luna, la massima *equazione dell'orbita* è di 6° 17′ 54″,5.

L'*evezione* è una ineguaglianza che altera l'*equazione dell'orbita* e che la rende minore di quello che dovrebbe essere in vicinanza delle *sizigie*, e maggiore verso le *quadrature*. Essa nasce dal cangiamento di dimensione dell'orbita lunare e particolarmente dalle variazioni dell'eccentricità che, entrando co-

da un equinozio fisso, ossia il ritorno alla stessa stella; 3.° la *rivoluzione tropica*, o il ritorno alla stessa longitudine contata dall' equinozio mobile; 4.° la *rivoluzione anomalistica*, o il ritorno al medesimo punto dell'ellisse, e 5.° finalmente la *rivoluzione dracontica*, o il ritorno allo stesso nodo. Tutte queste rivoluzioni provano in conseguenza delle irregolarità del moto della luna non poche variazioni nelle loro durate. Ecco i loro valori medj in *tempo solare medio*:

Rivoluzione	sinodica	$29^g,5305885721 5$,	o	29^g	12^{or}	$44'$	$2'',87$
—	siderea	27 ,321661423		27	7	43	11 ,5
—	tropica	27 ,321582418		27	7	43	4 ,7
—	anomalistica	27 ,5545995o		27	13	18	37 ,4
—	dracontica	27 ,2122222		27	5	5	36 ,0

Rivoluzioni del perigeo { siderea $= 3232^g,575343$; tropica $= 3231 ,4751$ }

Rivoluzioni del nodo { siderea $= 6798 ,279$; sinodica $= 346 ,619851$; tropica $= 6788 ,50982$ }

La luna, in forza del suo movimento proprio verso oriente, descrive in longitudine, in ventiquattro ore medie,

$$13^{\circ},17639639 , \text{ ossia } 13^{\circ}\ 10'\ 35'',027 ,$$

e in anomalia, parimente in ventiquattro ore medie,

$$13^{\circ},0649917 , \text{ ossia } 13^{\circ}\ 3'\ 52'',97012.$$

Il moto giornaliero della luna rispetto al sole è di $12^{\circ},19075$.

Gli elementi della luna riferiti all' *epoca* del 1° Gennaio 1801 sono

Distanza media dalla terra	$59^r,982175$
Eccentricità in parti del semiasse maggiore.	0 ,0548442
Longitudine media del nodo	$13^{\circ}\ 53'\ 17'',7$
Longitudine media del perigeo	266 10 7 ,5
Longitudine media della luna	118 17 8 ,3
Inclinazione media dell' orbita	5 8 47 ,9

La distanza media dalla terra è espressa in raggi equatoriali della terra.

Oltre la sua rivoluzione intorno alla terra, la luna gira ancora intorno al suo asse da occidente in oriente, e nel fare questa rivoluzione impiega esattamente lo stesso tempo che essa impiega a fare la sua rivoluzione tropica. È questo il motivo per cui essa ci presenta sempre la stessa faccia: infatti è impossibile che un uomo, per esempio, percorra la circonferenza di un circolo tenendo il suo volto costantemente rivolto verso il centro, senza fare nel medesimo tempo un giro sopra se stesso. L' asse della luna fa col piano dell' ecclittica un angolo di $88^{\circ}\ 29'\ 49''$, il che fa sì che i poli lunari divengono alternativamente visibili ed invisibili per noi, a seconda delle diverse posizioni che quest' astro occupa al di sopra o al di sotto dell' ecclittica. Questo fenomeno è appunto ciò che dicesi *librazione* in latitudine. *Vedi* LIBRAZIONE.

La luna essendo ora più vicina ed ora più lontana dalla terra, deve apparirci ora più grande ed ora più piccola; ed infatti il suo diametro apparente varia colla sua distanza: i suoi valori sono

Massimo diametro apparente	33′ 31″, 1
Medio diametro apparente	31 26 ,5
Minimo diametro apparente	29 21 ,9

Quanto alla parallasse, vedasi l'articolo PARALLASSE.

La forma della luna è quella di una aferoide schiacciata verso i suoi poli, il cui raggio medio è eguale a 0,273, o $\frac{3}{11}$, prendendo il raggio medio della terra per unità. Se noi supponiamo questi due corpi sferici, il rapporto dei loro volumi sarà eguale al cubo del rapporto dei loro raggi, vale a dire a $\frac{27}{1331}$, o $\frac{1}{49}$, donde resulta che il volume della luna è circa la quarantanovesima parte del volume della terra. Per mezzo della teoria dell'attrazione, si è trovato che la massa della luna è $\frac{1}{68,4}$, prendendo per unità quella della terra. Questo rapporto è molto inferiore a $\frac{1}{49}$. La massa della luna, confrontata con quella della terra, non sta dunque nella proporzione del suo volume, e per conseguenza la sua *densità* è minore di quella del globo terrestre Questa densità è dunque $\frac{49}{68,4}$, o presso a poco i tre quarti di quella della terra.

Sebbene non ci sia possibile di vedere che poco più della metà della superficie della luna, la costituzione fisica di quest' astro è assai meglio conosciuta di quella di qualunque altro corpo celeste. La faccia che esso presenta costantemente alla terra è coperta di un numero considerabile di montagne, alcune delle quali non hanno meno di 2800 metri di altezza, elevazione prodigiosa per un pianeta così piccolo. Queste montagne sono quasi tutte esattamente circolari e presentano dei caratteri vulcanici, ma non è ben constatato che dai loro crateri siansi vedute uscire delle fiamme, sebbene questo fatto sia stato annunziato da alcuni osservatori. La superficie della luna presenta ancora regioni vastissime perfettamente piane, e il cui terreno è simile ai nostri terreni di alluvione: queste parti, più oscure delle altre, hanno ricevuto il nome di mari, quantunque le loro apparenze siano inconciliabili colla esistenza di un' acqua profonda. Nulla su questo singolar pianeta indica l'apparenza di una vegetazione o di altre modificazioni prodotte dall' influenza delle stagioni, e ad onta di tutte le ipotesi fatte sulla sua atmosfera, non si è mai veduto alcuna nube circolare sul suo disco. Se la luna è abitata, gli esseri che vi si trovano non hanno analogia nessuna con quelli dei quali possiamo concepire l'esistenza, poichè senz'aria, senz'acqua e senza vegetazione, la vita animale non è possibile.

Nella figura 1 della Tavola XXXIV abbiamo dato una carta della luna: ecco i nomi delle macchie: le cifre si riferiscono alle montagne, e le lettere alle parti basse, ossia ai pretesi mari:

1. Grimaldus.
2. Galileus.
3. Aristarchus.
4. Kepplerus.
5. Gassendus.
6. Schikardus.
7. Harpalus.
8. Heraclides.
9. Lansbergius.
10. Reinoldus.
11. Copernicus.
12. Helicon.
13. Capnanus.
14. Bulialdus.
15. Eratosthenes.
16. Timocharis.
17. Plato.
18. Archimedes.
19. Insula sinus medii.
20. Pitatus.
21. Tycho.
22. Endoxus.
23. Aristoteles.
24. Manilius.
25. Menelaus
26. Hermes.
27. Possidonius.
28. Dionisius.
29. Plinius.
30. Catharina, Cyrillus, Theophilus.
31. Frscastorius.
32. Promontorium acutum, Censorinus.
33. Messala.
34. Promontorium Somnii.
35. Proclus.
36. Cleomedes.
37. Snellius et Funerius.
38. Petavius.
39. Langrenus.
40. Taruntius.
A. Mare Humorum.
B. Mare Nubium.
C. Mare Imbrium.
D. Mare Nectaris.
E. Mare Tranquillitatis.
F. Mare Serenitatis.
G. Mare Faecunditatis.
H. Mare Crisium.

La luce che ci riflette la luna non è accompagnata da alcun calore sensibile, non solamente nello stato in cui essa giunge a noi, ma nemmeno concentrata in un piccolissimo spazio per mezzo di uno specchio concavo. Ciò che comunemente si dice *luce cenerina* non è che la luce del sole reflessa dalla terra sulla luna, perchè la terra veduta dalla luna presenta tutti i fenomeni delle fasi, e come noi abbiamo il *lume di luna*, nello stesso modo la luna ha il *lume di terra*.

Accelerazione della luna. *Vedi* Accelerazione.

Età della luna. È il numero dei giorni decorsi dopo il novilunio. Per tutte le altre parti della teoria della luna si vedano gli articoli Ecclisse, Eccentricità, Calendario, Librazione, Parallasse, Selenografia.

LUNAZIONE (*Astron.*). Spazio di tempo compreso tra due novilunj consecutivi: tale intervallo si chiama ancora *mese solare*. *Vedi* Luna.

LUNGHEZZA. Una delle tre dimensioni dell'estensione. *Vedi* Dimensione.

LUNISOLARE. In astronomia si dà questo epiteto a ciò che si riferisce nel tempo stesso e alla rivoluzione del sole e a quella della luna. Il ciclo lunare di 19 anni è il primo di tutti i periodi lunisolari (*Vedi* Calendario). Il periodo di 18 anni e 10 giorni, ossia di 223 lunazioni riproduce gli ecclissi nel medesimo ordine. *Vedi* Ecclisse.

Alcuni autori hanno dato il nome di *anno lunisolare* al periodo di Dionisio il Piccolo, che riconduce i novilunj ai medesimi giorni del mese, e ciascun giorno del mese al medesimo giorno della settimana. *Vedi* Periodo.

LUNULA (*Geom.*). Figura piana in forma di luna crescente, terminata da due archi di circolo che si tagliano alle sue estremità. Quantunque la quadratura del

circolo intero sia geometricamente impossibile (*Vedi* Circolo e Quadratura), abbiamo trovata quella di alcune delle sue parti; tra queste quadrature parziali dobbiamo far conoscere la prima di tutte, dovuta ad Ippocrate di Chio, la sua celebrità è, del rimanente, il suo maggior merito.

Sia un triangolo isoscele rettangolo ABC (*Tav.* XXVIII, *fig.* 7), sopra l'ipotenusa AB, si descriva il semicircolo AnCoB; e sopra i due lati AC e CB dell'angolo retto descriviamo similmente i due semicircoli AmC, CpB. Le superficie dei circoli stando tra loro come i quadrati dei loro diametri, avremo, indicando con S la superficie del semi-circolo AnCoB, e con s, le superficie uguali dei semicircoli AmC, CpB.

$$S : s : s :: \overline{AB}^2 . \overline{AC}^2 : \overline{BC}^2.$$

ma, dalla proprietà del triangolo rettangolo, $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2$, dunque si ha ancora $S = s + s = 2s$, ovvero $s = \frac{1}{2}$ S. Ora, abbassando la perpendicolare CD, CnAD è la metà del semicircolo S, così il semicircolo s ovvero AmC è uguale a CnAD, sottraendo da queste due figure lo spazio comune ACn, rimane da una parte il triangolo ADC, e dall'altra la *lunula* AmCnA: l'area di questa lunula è perciò equivalente a quella del triangolo.

Si trovano altre proprietà curiose delle lunule nelle *Ricreazioni matematiche* dell'Ozanam. Il Moivre, nelle *Transazioni filosofiche*, n.° 265, si è occupato dei solidi formati dalla loro rivoluzione.

LUOGO GEOMETRICO. (*Geom.*) Linea retta o curva la cui costruzione serve a risolvere un problema geometrico. (*Vedi* Applicazione dell' Algebra alla Geometria.).

Gli antichi chiamavano *luoghi piani* quelli che si riducevano a rette ovvero a circoli; e *luoghi solidi*, quelli i quali domandavano delle parabole, dell'iperbole o dell'ellissi.

Luogo *di un pianeta*. (*Ast.*) Ciò ordinariamente significa la sua *longitudine*.

LYDIAT (Tommaso), dotto cronologista e matematico inglese, nato nel 1572 e morto nel 1646. Le principali sue opere sono: I *Tractatus de variis annorum formis*, Londra, 1605, in-8; II *Emendatio temporum contra Scaligerum et alios*, ivi. 1609, in-8; III *Solis et lunae periodus*, ivi, 1620, in-8; IV *De anni solaris mensura*, ivi, 1621, in-8.

LYONS (Isaaele), dotto matematico ebreo, nato a Cambridge nel 1739 e morto a Londra nel 1775, ha pubblicato varie opere scientifiche assai stimate. Noi citeremo: I *Trattato delle flussioni*, 1758; II *Calcoli di trigonometria sferica compendiosi*, stampati nel volume 61° delle *Transazioni filosofiche*.

M

MACCHIE (*Astron.*). Si dà questo nome a quegli spazj oscuri che si osservano sul disco luminoso del sole, della luna e di altri pianeti. *Vedi* GIOVE, LUNA, MARTE, SATURNO e SOLE.

MACCHINA (*Mec.*) La parola *Macchina* indica generalmente un apparecchio qualunque, per mezzo del quale un motore trasmette la sua azione ad una resistenza. Laonde questo è un istrumento semplice o composto, destinato a produrre del moto, in modo da risparmiare o del tempo nell'esecuzione dell'effetto, o della forza nella causa; così, la *zappa* destinata a scavare le terre, il *carretto* che si adopra per trasportarle; il *martello* che si fa agire sopra la testa di una zeppa per spaccare del legno, la *zeppa* essa stessa, ec. ec., sono tutte altrettante macchine.

Le *macchine* si dividono in *macchine semplici* e *in macchine composte*. Ordinariamente si contano sette *macchine semplici* alle quali tutte le altre macchine possono ridursi, queste sono: la macchina *funicolare*, la *leva*, il *verricello* la *puleggia*, il *piano inclinato*, la *zeppa* e la *vite*. (*Vedi* QUESTE DIVERSE PAROLE). Si potrebbero ridurre queste sette macchine alle due prime, e ancora solamente ad una di queste due prime; ma si usa di considerare le cinque ultime come semplici.

Le *macchine composte* sono quelle che si formano dalla combinazione di più macchine semplici. Il loro numero è illimitato.

Le sette macchine semplici essendo il soggetto di altrettanti articoli particolari, in questo punto non considereremo che l'effetto generale delle macchine composte, delle quali io poche parole esporremo i principii razionali. Ciò che segue potrà dunque applicarsi a tutte le macchine conosciute, come a tutte quelle che si potranno inventare in seguito.

Qualunque sia la complicazione di una macchina, possiamo sempre definirla *un corpo che s'interpone tra due o più potenze per trasmettere l'azione dall'una all'altra, secondo tali o tali condizioni e secondo l'oggetto che si va ad adempire.*

Questo corpo intermediario può sempre considerarsi come spogliato della sua massa, e come una riunione di una moltitudine di punti legati con fili, per mezzo dei quali l'azione si trasmette di punto in punto da una potenza all'altra, tanto che questa massa sia infatti piccolissima rapporto alle forze che gli sono applicate, quanto che si considerino le forze motrici e d'inerzia proprie a questa massa, come nuove forze che gli sono esternamente applicate, e delle quali si tiene conto nel calcolo come di tutte le altre.

Premesso ciò, è importante distinguere l'effetto di una macchina in equilibrio da quello di una macchina in moto, perchè in quest'ultima entra un elemento di più che nella prima; cioè, la velocità del punto di applicazione delle forze messe in azione. Nel caso dell'equilibrio, si deve solamente considerare

l' intensità di queste forze, ma in quello del moto bisogna ancora tener conto della strada che ciascuna deve percorrere. Così, per esempio, una forza che esercita la sua azione sopra un peso con l' aiuto del braccio più lungo di una leva, produce due effetti di natura differenti, secondo che essa deve semplicemente sostenere questo peso o che essa deve elevarlo ad una data altezza, poichè nel primo caso una forza piccolissima può benissimo sostenere in equilibrio un peso assai considerabile; ma se si tratta di elevarlo ad una data altezza, bisogna che essa discenda da un' altezza tanto più grande, quanto il suo braccio di leva è più lungo (*Vedi* Leva), ed essa è conseguentemente più piccola rapporto al peso.

L' effetto di una potenza applicata ad una macchina in riposo è dunque semplice, e può valutarsi dal peso che essa sostiene; ma quello di una potenza applicata ad una macchina in moto è composto, e la sua valutazione deve effettuarsi non solamente dal peso che essa muove, ma ancora dall' altezza alla quale essa si eleva. Finalmente il prodotto di questo peso per quest' altezza è ciò che misura l' *effetto* della potenza in una macchina in moto.

Resulta da queste considerazioni che nel caso dell' equilibrio la macchina può aumentare di dieci, cento ec., volte l' *effetto* della potenza, nel mentre che nella macchina in moto l' *effetto* è invariabile, qualunque sia la composizione di questa macchina, e sempre uguale al prodotto della potenza per la strada che essa percorre. Modificando la macchina, potremo bene diminuire la potenza, ma si aumenterà la strada che bisogna che essa percorra, e *viceversa*, dimodochè l' *effetto* è costantemente il medesimo.

Se indichiamo con P la potenza o la forza sollecitante, con R il peso o la forza resistente, con H l' altezza alla quale bisogna elevare R, e con h, quella di cui P è forzato a discendere, ovvero la strada che esso deve percorrere per produrre l' effetto domandato, avremo l' equazione

$$Ph = RH \ldots\ldots (1),$$

la quale è indipendente da qualunque composizione particolare di macchina.

Ma indicando con V la velocità supposta uniforme della forza P, e con T il tempo che essa impiega per descrivere h, in virtù di questa velocità, siccome lo spazio percorso è uguale al prodotto della velocità pel tempo (*Vedi* Moto), abbiamo $h = VT$; così, sostituendo nell' equazione (1), verrà

$$PVT = RH \ldots\ldots\ldots (2).$$

Ora, e per la medesima ragione, se, impiegando, tanto la medesima macchina quanto qualunque altra, si volesse produrre lo stesso effetto RH, per mezzo di un' altra forza P', mossa da un' altra velocità V', in un tempo T', si avrebbe similmente

$$P'V'T' = RH$$

e per conseguenza, dall' equazione (2)

$$PVT = P'V'T'.$$

Così, se vogliamo per esempio, che P' non sia che la metà di P, vale a dire, se vogliamo elevare il medesimo peso R alla medesima altezza H, impiegando una forza metà più piccola, bisognerà o che V' diventi doppio di V, o che T' diventi doppio di T, o finalmente che in generale $V'T'$ diventi doppio di VT. Da ciò, possiamo dedurre questo gran principio, che tutti i costruttori di mac-

chine non debbono mai dimenticare: *in qualunque macchina in moto, si perde sempre o in tempo o in velocità ciò che si guadagna in forza.*

Resulta ancora da ciò che precede che è impossibile d'inventare una macchina con la quale, col medesimo lavoro, vale a dire, la medesima forza e la medesima velocità impiegata nel medesimo tempo, si possa elevare il peso dato R ad una maggiore altezza H, o un peso più grande alla medesima altezza, o finalmente lo stesso peso alla medesima altezza, in un tempo più corto.

È donque del tutto in pura perdita quando si eredesse potere con l'aiuto di leve disposte in una data maniera, mettere un agente, per quanto debole che esso sia, in stato di produrre i più grandi effetti. Questo errore, nel quale spesso cadono persone alle quali non possiamo rifiutare certe conoscenze in meccanica, proviene unicamente da ciò che ci si immagina che sia possibile di applicare alle macchine in moto quello che non è vero che pel caso di equilibrio; siccome una piccolissima potenza, per esempio, può tenere in equilibrio un peso grandissimo, si creda che essa potrebbe ancora elevare questo peso tanto presto quanto si volesse, e questo è quello che non può succedere. Se consideriamo che una piccola potenza non distrugge mai una più grande che mediante il concorso o mediante la resistenza di uno o di più punti di appoggio, si comprenderà che l'effetto non è più sproporzionato alla causa nelle macchine in riposo che nelle macchine in moto.

La descrizione delle macchine composte non entra nel nostro piano, rimanderemo dunque per tutto ciò che gli spetta all'opera del signor Borgnis, il più completo in questo genere, *Mécanique appliquée aux arts*. La loro teoria deve essere studiata nel *Saggio sopra la composizione delle macchine*, dei signori Lanz e Betancourt. Possiamo consoltare ancora con frutto la *Meccanica* del Bossut. Il Montucla, nel terzo volume della sua *Storia delle matematiche*, ha dato un catalogo esteso delle diverse opere, le quali contengono la costruzione delle macchine le più curiose e le più importanti degli antichi e dei moderni, fino all'anno 1802.

Esistono tra gli apparecchi delle macchine delle differenze caratteristiche che le fanno dividere in tre classi principali: 1.° le macchine che servono ad eseguire certi movimenti particolari senza che si consideri la grandezza della forza impiegata a produrgli: queste più particolarmente si chiamano *strumenti*; 2.° le macchine che possono non solamente prendere dei movimenti dati, ma produrre uno sforzo il cui scopo è di mettere in equilibrio la pressione momentanea del motore con la resistenza che vogliamo superare, come i *bilancieri*, gli *strettoj*, ec.; 3.° finalmente le macchine che producono un lavoro continuo mediante l'azione fissa di un motore, e prendono sempre tanto un moto uniforme, quanto un moto periodico nel quale la velocità cresce e diminuisce tra limiti fissi. Uno degli oggetti principali che ci si propone nella costruzione di queste ultime è di sostituire la forza dell'uomo, nei lavori utili, con forze più potenti dei motori naturali.

Le operazioni o fabbricazioni che si eseguiscono con l'aiuto delle macchine della terza classe, quantunque estremamente variate, possono sempre paragonarsi all'elevazione di un peso (*Vedi* Effetto); il che permette di riportare ad un'unità comune la quantità di lavoro effettuata da diverse macchine impiegate a usi differenti, e di determinare il suo rapporto con l'azione del motore misurata dalla medesima unità.

» Il paragone delle diverse macchine, dice il Navier, in una delle sue note tanto degne di osservazione sopra l'architettura idraulica del Belidor, si fa naturalmente, per il negoziante o il capitalista, mediante la quantità di lavoro che esse eseguiscono e il prezzo di questo lavoro. Per stimare i valori respettivi

di due mulini a grano, per esempio, si esaminerà qual quantità di farina ciascuno può macinare nell'anno; e per paragonare un mulino a grano ad un mulino da segare, si stimerà il valore del primo dalla quantità di farina macinata annualmente e il prezzo della macinatura, e il valore del secondo dalla quantità di legno che esso preparerà nello stesso tempo e il prezzo della segatura. Possiamo limitarsi a questo metodo nel considerare le macchine e i lavori che esse eseguiscono, fintantochè non si tratta che di comprare o di cambiare tra loro delle macchine tutte fatte e il cui prodotto è conosciuto; ma vi sono diversi casi in cui questo metodo diventa insufficiente.

» Supponiamo infatti una persona che possegga un mulino a grano e la quale desiderasse, per mezzo di alcuni cambiamenti nel suo meccanismo, di farne un mulino da segare. Essa non potrebbe giudicare del vantaggio o dello svantaggio di quest'operazione che quando essa sapesse valutare, mediante la quantità di farina prodotta dal suo mulino, la quantità di legno che sarebbe nel caso di preparare. Ora, questa valutazione è una cosa assolutamente impossibile, quando non si sia trovata una misura comune per questi due lavori di nature tanto diversi. Quest' esempio basta per far conoscere la necessità di stabilire una specie di moneta meccanica, se così possiamo spiegarci, con la quale si possa esprimere le quantità di lavoro impiegate per effettuare qualunque specie di fabbricazione

» La scelta di un' unità di misura è, fino ad un dato punto, arbitraria: è solamente indispensabile che quest' unità sia una cosa della medesima natura di quella con cui essa deve formare il termine di paragone. Gl' Inglesi, per esempio, hanno preso per unità delle quantità di lavoro l' azione di un cavallo. Ma essi sono i primi a riconoscere l' inconvaniente di un termine di paragone la cui grandezza è tanto variabile, che le valutazioni date dai loro sapienti differiscono tra loro più che nel rapporto di 1 a 2. Ne resulta effettivamente che una medesima espressione impiegata da diversi autori presenta a ciascuno di loro un' idea differente, e che essa non diventa intelligibile al lettore che dopo che essi gliel' hanno tradotta, spiegando ciò che essi intendono per l' azione di un cavallo, vale a dire quale sforzo essi suppongono che un cavallo possa eseguire nel medesimo tempo che esso percorre un dato spazio in un tempo prefisso.

» Ed è effettivamente a ciò che si riduce l' esecuzione di un lavoro qualunque. Vi è sempre nell' azione di una macchina uno sforzo o pressione esercitata contro un punto, nel tempo che uno spazio è percorso da questo punto. Quest' osservazione conduce naturalmente a riconoscere che il genere di lavoro il più proprio a servire di valutazione a tutti gli altri è l'elevazione verticale dei corpi pesanti. »

Abbiamo fatto conoscere, alla parola Forze moventi, come questo modo di valutazione si applica all' azione del motore, rammenteremo dunque solamente in questo punto che indicando con P il peso uguale allo sforzo esercitato da un motore al suo punto di applicazione, e con p lo spazio descritto da questo punto nella direzione dello sforzo, il prodotto Pp esprime la *quantità di lavoro*, ovverò, come più si dice comunemente, la *quantità di azione* somministrata dal motore. Il peso P rappresentando generalmente un numero di chilogrammi, e lo spazio p un numero di metri, Pp indica un numero di chilogrammi elevato al un metro, di modochè l' unità di misura è naturalmente un *chilogrammo elevato ad un metro*; ma siccome quest' unità è troppo piccola, è stato proposto di sostituirla con un peso di *mille chilogrammi elevato ad un metro*; quest' ultima unità è ciò che si chiama un *dinamodo* dal signor Coriolis, ovvero una *unità dinamica* da alcuni altri autori. Vi è ancora il *dinomo* ovvero il *cavallo vapore* il quale si compone di un peso di 75 chilogrammi elevato ad un metro in un secondo di tempo. (*Vedete* le parole Dinamo e Dinamica.) Si

vede facilmente che l'impiego di queste diverse unità non può portare ad alcuna falsa interpetrazione, poichè l'unità primitiva è sempre un *chilogrammo elevato ad un metro*.

Per paragonare il lavoro eseguito da una macchina con la quantità di azione somministrata dal motore che la mette in giuoco, bisogna valutare gli sforzi rispettivi esercitati ai punti di applicazione del motore e della resistenza, come pure gli spazj percorsi nel medesimo tempo da questi due punti nella direzione degli sforzi. Siano P e P' i pesi equivalenti agli sforzi, e p e p' gli spazj in questione, il prodotto Pp sarà la quantità di azione somministrata dal motore, e il prodotto $P'p'$ la quantità di lavoro eseguita dalla macchina, ovvero il suo *effetto utile* (*Vedi* QUESTA PAROLA). Il rapporto dei numeri Pp e $P'p'$ darà un'idea della bontà della macchina o della sua perfezione; poichè si deve considerare una macchina come tanto meglio appropriata al suo oggetto, quanto essa trasmette una più gran parte dell'azione che essa riceve; ma non bisogna mai sperare, per quanto perfetta si possa supporla, di trovare $Pp = P'p'$, e a più forte ragione $P'p' > Pp$. Non si deve dimenticare che una macchina è incapace di produrre della forza, e che tutto ciò che essa può fare è di trasmettere quella che le è comunicata, dopo averne necessariamente assorbita una parte, impiegata a vincere le resistenze che oppongono al moto gli organi che la compongono. In tutti i casi, dunque, $P'p'$ sarà più piccola di Pp, e il rapporto

$$\frac{P'p'}{Pp}$$

una frazione più piccola dell'unità. Supponiamo per fissare le idee, che si abbia, in un tempo dato, per una data macchina, $P = 100^c$, $p = 0^m,5$, $P' = 160^c$, $p' = 0^m,25$; il lavoro del motore sarà espresso da

$$100^c \times 0^m,5 = 50^c,$$

e l'effetto utile della macchina da

$$160^c \times 0,25 = 40^c$$

Il rapporto tra queste due quantità

$$\frac{40}{50} = 0,8,$$

indica che la macchina rende 8 decimi della quantità di azione spesa dal motore. La quantità di azione perduta, 10^c, è dunque consumata dalle resistenze dovute alla costituzione fisica della macchina, e che si chiamano le resistenze passive. (*Vedi* EFFETTO UTILE).

Il mezzo il più diretto di misurare gli effetti esercitati ai punti di applicazione della potenza e della resistenza consiste a sostituire questa due forze con pesi. Cominciamo da immaginare che si sia soppressa la potenza, e che dopo avere attaccato al suo punto di applicazione l'estremità di una corda che passi sopra una puleggia di ritorno, si carichi l'altra estremità di questa corda di pesi continuamente più grandi, fino a tanto che il lavoro eseguito dalla macchina sia lo stesso di quello che si effettuerebbe dall'azione del motore, l'ultimo peso sarà necessariamente equivalente allo sforzo del motore, salvo l'attrito della corda sopra la puleggia del quale bisognerà tener conto. Se si sopprime quindi la resistenza, e che egualmente si sostituisca con un peso che agisca al-

l'estremità di una corda fissata dalla sua altra estremità al punto di applicazione della resistenza, quest'ultimo peso, aumentato fino a tanto che la macchina abbia ripreso un moto uniforme, sarà la misura dello sforzo della resistenza. Ma questo metodo non è che raramente praticabile, e siamo quasi sempre forzati, nella pratica, a ricorrere a processi meno esatti.

La parte di una macchina che riceve direttamente l'azione del motore si chiama l'*organo ricevitore*; quando la trasmissione del moto dell'organo ricevitore all'altre parti si effettua con ingranaggi ovvero assi che hanno un moto circolare continuo, il che è il caso più ordinario, possiamo giungere alla valutazione delle quantità di azione comunicata impiegando un apparecchio ingegnosissimo inventato dal signor Prony, e il quale porta il nome di *freno dinamometrico* (*Vedi* Annali delle mine Tomo XII). Questo freno si compone di due semi-antenne che si applicano all'albero girante contro il quale si serrano con viti che le legano tra loro; l'antenna superiore porta una lunga leva caricata di un peso alle sue estremità. Con questo istrumento si opera nella seguente maniera.

Dopo avere alzato gl'ingranaggi in modo che l'albero girante sia isolato, si pone i collari e si assoggetta la leva ad una posizione orizzontale, quindi si serrano le madreviti fino a tanto cha l'attrito dell'antenne conduca di bel nuovo le velocità dell'albero, messo in moto dal motore, al punto in cui essa era quando l'albero trasmetteva il suo moto agli ingranaggi. Ciò fatto, si sostituisce all'ostacolo invincibile che impediva la leva di girare con l'albero con un peso posto alle sue estremità, e che si aumenta sufficientemente perchè esso produca il medesimo effetto dell'ostacolo invincibile, vale a dire che esso mantenga la leva nella posizione orizzontale. Quando questo effetto è ottenuto, si valuta la quantità di azione trasmessa all'albero girante in un secondo di tempo, pel prodotto del peso sospeso e delle velocità che prenderebbe in un secondo questo peso, se esso seguisse il moto dell'asse col braccio della leva per raggio. Supponiamo, per esempio, che si trattasse di valutare la forza trasmessa dall'albero di scarpa di una ruota idraulica, e che la velocità di questa ruota essendo di 15 giri per minuto, la carica del freno sia di 80 chilogrammi, e la lunghezza del braccio della leva di $3^m,5$. La circonferenza che corrisponde ad un raggio di $3^m,5$ essendo di 21^m, la velocità del peso per un minuto sarebbe

$$15 \times 21^m = 315^m,$$

e per secondo di $5^m,26$. Questa quantità moltiplicata per 80 chilogrammi dà 420 chilogrammi per la quantità di azione trasmessa in un secondo dalla ruota sul suo asse, astrazione fatta dall'attrito dei cardini e dalla resistenza dell'aria. Per paragonare ora questa quantità di azione con quella che possiede l'acqua motrice, e determinare così il grado di perfezione della ruota, bisogna misurare la forza della corrente.

Questo mezzo, il più comodo di tutti quelli che si possono impiegare, quando è impossibile di ricorrere all'elevazione dei pesi, non potrebbe dare però che un'approssimazione più o meno sufficiente, poichè come lo ha osservato il signor Coriolis, il moto di un organo ricevitore di forza motrice, per quanto sia bene costruito, e per quanta precauzione si sia adoprata perchè la forza giunga regolarmente, non è mai perfettamente uniforme; donde resultano delle oscillazioni assai forti nella leva. Del rimanente, tutte le questioni relative al *calcolo dell'effetto delle macchine* si complicano di difficoltà per le quali siamo obbligati a rimandare all'eccellente opera pubblicata, sotto questo titolo, dal sapiente che abbiamo citato.

In tutte le macchine ove il moto una volta stabilito è uniforme, si osserva (*Vedi* Comunicazione del moto) che quando esse cominciano a muoversi par-

tendo dal riposo, lo sforzo del motore è più grande e quello della resistenza più piccolo, che essi non lo saranno quando il moto uniforme sarà prodotto. La velocità cresce a poco a poco, come per un corpo sottoposto all'azione di due forze acceleratrici che agiscono in senso contrario, di cui l'una supererebbe l'altra; a misura che la velocità aumenta, lo sforzo della resistenza cresce, quello del motore diminuisce, e presto giunge un istante in cui questi sforzi diventano costanti, ed hanno rispettivamente i valori che bisognerebbe dargli per mettere la macchina in equilibrio. Allora il moto si continua uniformemente, e se s'indica con P lo sforzo del motore, con p lo spazio descritto dal suo punto di applicazione, con Q lo sforzo delle resistenze, comprese tutte le resistenze passive, e con q lo spazio descritto dal punto di applicazione della resistenza si ha, in virtù del principio delle *velocità virtuali* (*Vedi* QUESTA PAROLA), l'equazione:

$$Pdp-Qdq=0,$$

che esprime che la quantità di azione impressa al sistema è nulla. Ne resulta, dal principio della conservazione delle forze vive (*Vedi.* FORZA VIVA), che la forza viva del sistema non riceve più alcuna aumentazione, vale a dire che la velocità della macchina rimarrà la medesima, fintantochè gli sforzi P e Q conserveranno i suddetti valori.

L'equazione precedente, nella quale il termine Qdq non rappresenta solamente il momento della resistenza propriamente detta, ma ancora la somma dei momenti di tutte le resistenze, tali come attriti, rigidezza delle corde, resistenze dei mezzi ove i corpi si muovono, e ancora le quantità di azioni corrispondenti alle quantità delle forze vive che sarebbero perdute dall'effetto degli urti; quest'equazione non ha più luogo se gli effetti P e Q rimangono variabili quando il moto della macchina è regolato. In quest'ultimo caso, dice il Navier, se si supponessero gli sforzi arbitrariamente variabili, la macchina prenderebbe un moto irregolare il quale non potrebbe essere sottoposto utilmente al calcolo. Quando nelle macchine gli sforzi di cui si tratta non hanno valori costanti, le variazioni di questi valori come pure le variazioni corrispondenti delle velocità dei loro punti di applicazione, sono ordinariamente periodiche, comprese tra limiti fissi, e i periodi delle variazioni si corrispondono esattamente mediante il motore e la resistenza. Consideriamo una macchina in questo stato, il quale consiste essenzialmente in ciò che lo sforzo P del motore è alternativamente più grande e più piccolo di quello che dovrebbe essere, per fare equilibrio, conformemente alle leggi della statica, allo sforzo Q della resistenza, o, per meglio dire, della somma delle resistenze; si chiami Dm un elemento della massa della macchina, e v la velocità di quest'elemento (D ed S essendo segni di differenziazione e d'integrazione, i quali si rapportano esclusivamente agli elementi della massa delle parti mobili della macchina, e d il segno di differenziazione che si rapporta al tempo). Cominciamo dal supporre che si trovi un'istante in cui vi è equilibrio tra P e Q, e che a cominciare da quest'istante lo sforzo P diventi più grande, ovvero lo sforzo Q più piccolo che essi non dovrebbero essere respettivamente perchè quest'equilibrio continuasse a sussistere, la forza viva della macchina, espressa con Sv^2Dm, crescerà conformemente alla legge espresse dall'equazione:

$$SvdvDm=Pdp-Qdq \quad \ldots\ldots (a).$$

Essa non cesserà dal crescere fintantochè Pdp non sia divenuto di nuovo uguale a Qdq, e allora la macchina avrà acquistato la maggiore velocità possibile. Supponiamo quindi che a partire da quest'istante lo sforzo Q della resistenza su-

peri alla sua volta lo sforzo P del motore, in modo che Qdq sia più grande di Pdp; la velocità della macchina diminuirà mediante la medesima legge (o). Essa sarà giunta al suo minimum quando gli sforzi P e Q avranno ricominciato a farsi equilibrio. Essa ricomincerà quindi a crescere, a partire da quest' ultimo istante, se P superi Q, come si è supposto in principio; e così di seguito indefinitamente.

La velocità della macchina, nelle circostanze che si considerano, cresce e diminuisce dunque alternativamente, oscillando intorno di un valore medio. L'equazione (a) fa conoscere che gli accrescimenti e diminuzioni che prova questa velocità, e per conseguenza gli sbalzi dai suoi *massimi* e *minimi*, a cominciare dal suo valore medio, sono tanto più grandi, 1° quanto l'eccesso del momento del motore sopra quello delle resistenze è più grande; 2° quanto la massa delle parti mobili della macchina è più piccola; 3° quanto la velocità di queste medesime parti è più piccola. Aumentando la massa e la velocità delle parti della macchina, si diminuiscono le variazioni che prova la velocità in seguito delle variazioni nelle azioni del motore e della resistenza.

Quando la velocità di una macchina prova così degli alternativi accrescimenti e diminuzioni, le ruote che ricevono l'azione del motore conducono le altre e ne sono condotte alternativamente, quantunque il moto si faccia sempre nel medesimo senso; ma se la periodicità è perfettamente esatta non ne risulta alcuna perdita di forza.

Consideriamo, infatti, un intervallo di tempo compreso tra due *massimi* ovvero tra due *minimi* qualunque della velocità; succede necessariamente, in conseguenza del principio delle velocità virtuali, che la quantità di azione somministrata dal motore in questo tempo è uguale alla quantità di azione che è stata consumata dalle resistenze; poichè se queste quantità di azioni non fossero uguali, la macchina avrebbe acquistato o perduto una quantità di forza viva uguale al doppio della loro differenza. La velocità avrebbe perciò aumentato o diminuito alla fine dell' intervallo, il che è contro la supposizione. La quantità di azione somministrata in eccesso dal motore nel tempo dell' accelerazione del moto è somministrata in meno nel tempo della sua ritardazione. Ciò non ostante, malgrado questa circostanza, possono resultare dalla variazione del moto degli inconvenienti che impegnino ad evitarlo, o almeno a rendarlo il più piccolo possibile; a ciò si giunge con l' uso dei *volanti*. (*Vedi* QUESTA PAROLA e PENDOLO CONICO.)

Le resistenze passive di una macchina consumano senza effetto utile una parte della forza che le è applicata, il primo principio che deve dirigerne la sua costruzione è di non farvi entrare che gli organi assolutamente necessari allo scopo a cui essa è destinata. In qualunque opera bisogna, dice Daniele Bernoulli, cominciare dall' esaminare qual è l'effetto essenzialmente e necessariamente attaccato a quest' opera, effetto che sia inevitabile per la natura medesima dell'opera, e quindi evitare, per quanto è possibile qualunque altro effetto.

Si deve dunque :

1.° Evitare ogni urto, o cangiamento brusco qualunque, il quale non sarebbe essenziale alla costituzione medesima della macchina, poichè tutte le volte che vi è urto vi è perdita di forza viva, e per conseguenza consumazione inutile di una parte dello sforzo del motore.

2.° Preferire le pressioni alle percussioni, tutte le volte che un effetto utile può essere ottenuto indifferentemente dall' uno o l' altro di questi mezzi, per il doppio motivo della perdita della forza viva che si evita, e delle regolarità del moto che si può produrre servendosi della pressione, ma che è incompatibile con la percussione.

3.° Evitare di comunicare alla resistenza une velocità e una quantità di moto, le quali superino quelle che sono strettamente necessarie. Così, per esempio, se vogliamo elevare dell'acqua ad un'altezza determinata, sia con una tromba, sia con qualunque altro apparecchio, si deve fare in modo che l'acqua, arrivando nel serbatojo superiore, non abbia esattamente che tanta velocità quanta ne bisogna per entrarvi, poichè tutta quella che essa avrebbe al di là consumerebbe inutilmente lo sforzo della forza motrice.

4.° Portare, come l'abbiamo già detto, la più gran cura ad evitare o diminuire, tanto quanto è possibile, le resistenze dovute alla costruzione fisica della macchina, tali come gli attriti, la rigidezza delle corde, la resistenza dell'aria, ec., ec.

Da tutto ciò non bisogna concludere, che le macchine più semplici sieno sempre le migliori, ma solamente che non ci si debbono impiegare che gli organi strettamente necessari, tanto per la trasmissione del moto, quanto per la sua trasformazione. (*Vedi* Composizione delle Macchine). Una secchia sospesa ad una corda che passa sopra una puleggia di rinvio è certamente una macchina molto più semplice di una tromba; Ciò non ostante un uomo produrrà un effetto utile molto più considerabile col secondo di questi apparecchi, che col primo. Quando s'impiegano dei motori animati, bisogna ancora aver riguardo al modo il più favorevole della loro applicazione. (*Vedi* Cavallo e Uomo).

Quelli dei nostri lettori che desiderano approfondire la meccanica pratica, potranno consultare le opere del Navier, quelle del Prony, e quelle già citate del Coriolis. La meccanica applicata alle arti, dal signor Borgnis, contiene la descrizione di tutte le principali macchine conosciute.

MACCHINA SOFFIANTE. *Vedi* Soffietto.

MACHA-ALLAH o MESSAHALA, astronomo ed astrologo arabo di religione ebrea, viveva verso la fine dell'ottavo secolo dell'era nostra. Scrisse parecchie opere che ebbero molto grido, e di esse può vedersi l'elenco in Casiri *Bibliotheca arabico-hispana*, tom. I, pag. 434. Quattro furono tradotte in latino e pubblicate a Norimberga nel 1549, e sono: 1° *De elementis et orbibus coelestibus*; 2° *Liber de revolutione annorum mundi*; 3° *Liber de significatione planetarum in nativitatibus*; 4° *Liber de receptione*.

MACHIN (Giovanni), dotto astronomo inglese del secolo decimottavo, fu professore di astronomia nel collegio di Gresham e segretario della Società Reale di Londra. Ha scritto non poche pregevoli memorie che si leggono nelle *Transazioni filosofiche*, ed aggiunse all'edizione dei *Principj matematici della filosofia naturale* di Newton, pubblicata nel 1729, un'esposizione delle leggi dei movimenti lunari. La vita particolarizzata di questo professore si legge nella raccolta di Ward che ha per per titolo: *The lives of the professors of Gresham College*, Londra, 1740, in-fol.

MACLAURIN (Colin), celebre matematico, nato nel 1698 a Kilmoddan in Scozia. La lettura degli *Elementi* di Euclide ha dato alla scienza un numero grande di uomini illustri, dei quali ha essa per così dire risvegliato il genio. Fu pure quest'opera celebre che decise dell'arringo e della fama di Maclaurin. Non aveva che dodici anni quando per caso essa gli cadde tra le mani, ed ei la lesse con tanta applicazione e successo che senza l'ajuto di alcun maestro fu in grado dopo pochi giorni di spiegarne i primi sei libri. Da tale epoca, Maclaurin si diede con ardore allo studio, e potè nel 1717 ottenere, dopo un concorso di dieci giorni con un gran numero di competitori, la cattedra di matematiche nel collegio di Aberdeen. Ei non aveva che ventidue anni quando pubblicò il suo trattato delle curve, produzione notabilissima che fu onorata dell'approvazione dell'illustre Newton. Quest'uomo immortale aveva una tale

stima pei talenti di Maclaurin, che si obbligò a pagare del proprio i di lui onorarj quando venne aggiunto a Gregory nella università di Edimburgo. Nel 1740, Maclaurin divise con Daniele Bernoulli ed Eulero il premio proposto dall' Accademia di Parigi per la miglior memoria *sul flusso e riflusso del mare*. In questa memoria si trova una bella dimostrazione della figura della terra: questo geometra, che erasi acquistata rapidamente una brillante riputazione, prometteva alla scienza una carriera utile e gloriosa; ma, incaricato nel 1745 di fortificare in fretta la città di Edimburgo, minacciata dai partigiani degli Stuardi, si applicò a questa operazione con uno zelo che divenne funesto alla sua salute; ed obbligato a fuggire all' approssimarsi degl' insorgenti, morì a York il 14 Giugno del 1746.

Questo stimabile geometra ha lasciato: I *Geometria organica, seu descriptio linearum curvarum universalis*, Londra, 1720, in-4. È questa l' opera di cui abbiamo parlato di sopra. Alcune proposizioni di Newton, dice Montucla, furono per Maclaurin il germe della bella teoria che stabilisce in questo libro: non solo ei vi dimostra i teoremi di quell' uomo sommo, ma ve ne aggiunge un numero grandissimo, gli uni più interessanti degli altri. Adottando più poli, o facendo muovere i punti d' intersezione dei lati degli angoli dati sopra diverse curve, ne resulta la descrizione di curve di ordini sempre più elevati: ei vi risolve pure generalmente un problema che Newton stesso riguardava della massima difficoltà, quello cioè di descrivere, mediante un metodo simile, una linea di un ordine superiore non avente alcun punto doppio. Il *Trattato delle flussioni* (in inglese), Edimburgo, 1742, in-4. Tale teoria del calcolo differenziale è stata tradotta in francese dal p. Pezenas, Parigi, 1749, 2 vol. in-4. Maclaurin aveva pure composto due altre opere importanti che non sono state stampate che dopo la sua morte. Sono esse: 1.° *Trattato di algebra*, stampato parecchie volte in Inghilterra, e tradotto in francese da Lecozic, Parigi, 1753, in-4. Secondo Montucla, non si può aggiunger nulla alla chiarezza di questo scritto, alla sua eleganza e alla sua precisione; e vi si trovano di più moltissime proprietà dei numeri, che non erano state annunziate prima di lui da alcun geometra. In seguito di quest' opera si trova un *trattato* delle principali proprietà delle linee geometriche. 2.° *Esposizione delle scoperte filosofiche di Newton* (in inglese), pubblicata da Patrizio Murdoch a Londra nel 1748, in-8. L' editore ha fatto precedere quest' opera da una notizia sulla vita e sugli scritti di Maclaurin; è stata tradotta in francese da Lavirotte. Parigi, 1749, in-4, ed in latino dal p. Falck, gesuita, Vienna, 1761, in-4. Le *Transazioni filosofiche* contengono un numero grande di memorie di Maclaurin sopra diversi soggetti matematici.

MAGGIO (*Calend.*), quinto mese del nostro anno, era il secondo nell' antico calendario albano, il terzo in quello di Romolo, e il quinto nel calendario di Numa Pompilio. Nel calendario albano era composto di ventidue giorni, di trentuno nel calendario di Romolo, e di trenta in quello di Numa; Giulio Cesare gli restituì il giorno che gli era stato tolto da Numa; è questo giorno gli è stato conservato anco nel calendario gregoriano di cui facciamo uso. La sua etimologia è dubbia; Ovidio, nel quinto libro de' suoi *Fasti*, propone tre derivazioni: una da *majestas*; un' altra da *majores* nel significato di *patres*, nome che davasi ai senatori ai quali era affidato il governo della città di Roma; e la terza da *Maja*. Il mese romano era sotto la protezione di Apollo.

MAGINI (Giovanni Antonio), rinomato astronomo italiano, nato a Padova nel 1555, si applicò fino dalla prima sua gioventù allo studio delle matematiche, e vi fece notabilissimi progressi. Nel 1588 conferita gli venne la cattedra di tale scienza nella università di Bologna, e vi lesse per quasi trent' anni con onore. L' imperatore Rodolfo gli fece delle offerte vantaggiose onde attirarlo a Vienna:

egli però non volle mai staccarsi da Bologna, ove morì l'11 Febbrajo 1617. Delle molte sue opere non citeremo che le seguenti: I *Breve instruzione sulle apparenze e mirabili effetti dello specchio concavo sferico*, Bologna, 1611, in-4, tradotta in francese da G. G. Boussier, Parigi, 1620, in-4. Il Magini narra che gli specchi concavi erano in quel tempo rarissimi, e che ne fabbricò uno per l'imperatore Rodolfo, di due piedi e mezzo di diametro e pesante quattrocento venti libbre, di cui il principe lo ricompensò mediante un ricco presente. II *Novae coelestium orbium theoricae congruentes cum observationibus N. Copernici*, Venezia, 1589, in-4; III *Effemeridi*, calcolate per 50 anni dal 1580 al 1630, 3 vol. in-4. Quantonque il Magini non adottasse il sistema di Copernico, forse per non esporsi alle censure dell'inquisizione, si valse delle osservazioni di quell'illustre astronomo per correggere e discutere i calcoli delle sue effemeridi, e per mostrare la poca esattezza delle tavole alfonsine che godevano di una celebrità grande. Weidler, nella sua *Storia dell'astronomia*, cap. XIX, n. 116, afferma che il Magini fu invitato da Copernico e da Keplero a recarsi in Germania per attendere con essi alla compilazione delle nuove tavole in conformità delle recenti scoperte; ed è poi certo che l'astronomo di Bologna era legato di stretta amicizia con Ke pplero, il quale ne deplorò la morte, siccome una perdita per le scienze. IV *Primum mobile XII libris contentum*, Bologna, 1609: è un trattato di geometria notabile pel tempo in cui fu scritto. V *Commentarius in geographiam et tabulas Ptolemaei*, Colonia, 1597, in-4; VI *L'Italia descritta in LX tavole geografiche*, Bologna, 1620, in-fol. Tali carte furono pubblicate da Fabio Magini suo figlio; erano le più esatte che si fossero vedute fino allora, ma il testo che doveva corredarle non venne mai in luce.

MAIGNAN (Emanuele), valente fisico e matematico, nato a Tolosa nel 1601, vestì giovane ancora l'abito dell'ordine dei Minimi. Durante il corso de' suoi studj, ebbe la sagacità di riconoscere la falsità dei principj filosofici di Aristotele che allora regnavano nelle scuole, e si diede a combatterli colle ragioni che i progressi delle scienze cominciavano a somministrare. Incaricato della istruzione dei novizj del suo ordine, si disimpegnò di tale ufficio con tanto onore, che nel 1636 fu inviato a Roma onde vi professasse le matematiche nel convento della Trinità dei Monti, in cui furono poi sempre insegnate da un minimo francese (*Vedi* Jacquier e Leseur). Questo religioso, non meno dotto che modesto, morì in patria il 29 Ottobre 1676. Le opere sue principali sono: I *Perspectiva horaria, sive de horographia gnomonica, tam theorica quam practica libri IV*, Roma, 1648, in-fol. È un trattato di catottrica notabilissimo pel tempo in cui venne alla luce. II *Cursus philosophicus*, Tolosa, 1652, 4 vol. in-8; Lione, 1673, in-fol. In tale opera, la seconda edizione della quale è accresciuta di parecchi capitoli, il p. Maignan, d'accordo in molti punti con Gassendi e Cartesio, gli combatte intorno ad altri, mentre era stato sempre guidato dall'amore della verità e non mai da spirito di partito.

MAIRAN (Gian Giacomo Dortous de), matematico e fisico distinto, nato a Béziers nel 1678, fece i suoi studj letterarj con gran successo a Tolosa, e terminati questi si recò a Parigi ove attese per quattro anni con ardore alla fisica e alle matematiche. Tornato in patria, diede prova del suo ingegno e delle sue cognizioni, riportando in tre anni consecutivi altrettanti premj dall'Accademia di Bordeaux per le sue memorie *sulle variazioni del barometro*, *sul ghiaccio*, e *sui fosfori*. Tali dissertazioni, pubblicate a Parigi nel 1715 in-12, gli aprirono le porte dell'Accademia delle Scienze, ove fu ammesso nel 1718: ei vi lesse successivamente un numero grande di memorie sopra diverse questioni di astronomia, di geometria, di fisica e di storia naturale, che attestano a un tempo

stesso e la varietà e la profondità delle sue cognizioni. Tra questi scritti si notano particolarmente quelli *sulla causa del freddo e del caldo*, *sulla rotazione della luna*, *sulle forze motrici*, e *sulla reflessione dei corpi*; in quest' ultima dissertazione, Mairan ha investigato la natura della curva apparente che forma una superficie piana, come quella di un bacino, veduta a traverso all' acqua che la cuopre. Nel 1721, Mairan fu incaricato insieme con Varignon di immaginare un nuovo metodo per la stazzatura delle navi, che prevenisse le lagnanze del commercio e le frodi dei mercanti. Questo accademico, che, versatissimo nella cronologia, nella storia, nella numismatica, nella letteratura, sapeva come Fontenelle rivestire le scienze più astratte e severe della grazie dello stile, fu eletto nel 1740 a succedere allo stesso Fontenelle nella carica di segretario dell' Accademia; ma egli a motivo dell' età sua avanzata non volle accettare tale ufficio che a condizione di potervi renunziare dopo tre anni, e fece accettare per suo successore Grandjean de Fouchy. Egli morì il 20 Febbrajo 1771 in età di 93 anni. Era membro dell' Accademia francese, delle società reali di Edimburgo e di Upsal, dell' Accademia di Pietroburgo e dall' Istituto di Bologna. Oltre le numerose memorie che di lui si leggono nella raccolta dell' Accademia delle Scienze di Parigi e nel *Giornale dei dotti*, ha pubblicato ancora: I *Dissertation sur la glace*, Parigi, 1749, in-12; II *Traité physique et historique de l'aurore boréale*, ivi, 1731, in-4; ed ivi con grandi aggiunte, 1754, in-4; III *Eloges des académiciens de l'Académie royale des sciences*, ivi 1747, in-12.

MAKO (PAOLO), fisico e matematico tedesco dell' ordine dei gesuiti, ha composto non poche opere elementari che hanno avuto grido nelle scuole, quantunque siano state ecclissate da lavori più recenti. Egli era nato in Ungheria e morì a Vienna nel 1793 in età di 70 anni. Gli scritti suoi principali sono: I *Compendiaria matheseos institutio*, Vienna, 1764, in-8; II *Dissertatio de figura telluris*, Olmutz, 1767, in-4; III *Calculi differentialis et integralis institutio*, ivi, 1768, in-4; IV *De arithmeticis et geometricis aequationum resolutionibus*, ivi, 1770, in-4. V Parecchie *Dissertazioni* sopra diversi argomenti scientifici, pubblicate nei giornali di Vienna.

MALLET (GIACOMO ANDREA), astronomo, nato a Ginevra nel 1740. Dopo aver fatto i suoi studj a Basilea sotto il celebre Daniele Bernoulli, viaggiò in Francia, in Inghilterra, in Germania e in Russia, e contrasse amicizia coi dotti più illustri di quel tempo. Fu scelto per osservare a Ponoi, nella Laponia russa, il passaggio di Venere sul disco del sole; e, se la contrarietà del tempo rese pressochè di niun valore la sua osservazione, seppe almeno rendere utile tale faticoso viaggio per un gran numero di osservazioni di fisica e di meteorologia, non che soprattutto per due determinazioni esattissime della lunghezza del pendolo a secondi a Pietroburgo e a Ponoi, i cui resultati meritarono l'onore di figurare nel numero degli elementi del calcolo dell' ellitticità della terra. Si consulti la *Meccanica celeste* di Laplace, tom. II, pag. 147, e segg. Tornato in patria, eresse a sue spese un osservatorio sopra uno dei bastioni del recinto della città; ivi diede lezioni di astronomia, ed ebbe allievi di molta fama, come Trembley, dotto geometra morto nel 1811, e l' illustre Pictet, professore di fisica a Ginevra. Mallet, che era membro della Società Reale di Londra e socio corrispondente delle accademie di Pietroburgo e di Parigi, morì il 30 Gennajo 1790. Le molte sue memorie sul calcolo delle probabilità, sulla meccanica e sull' astronomia si leggono nei *Commentarj* di Pietroburgo, nelle *Transazioni filosofiche*, negli *Acta Helvetica*, e in altre collezioni di quel tempo: varie di esse sono state premiate.

MANEGGIO (*Mec.*). Specie di verricello verticale mosso da un cavallo, e che serve a trasmettere lo sforzo dell' animale a qualunque macchina.

Le disposizioni dei maneggi possono essere assai variate, ecco, secondo il signor di Christian, quelli che presentano le combinazioni più favorevoli per l'uso della forza motrice.

1.° Il cavallo è attaccato ad una leva orizzontale (*Tav.* CC, *fig.* 1) fissata ad un albero verticale, che porta una puleggia orizzontale *a* di un gran diametro. Una corda si avvolge sopra questa puleggia, e va a passare sopra due altre pulegge proiettate in *b*, donde essa passa sulla puleggia e, chiamata *puleggia di tensione*, perchè può avanzare e retrocedere, in modo che la corda sia ben tesa sopra le due pulegge *a*, *b*, e che una di esse possa così trasmettere il moto.

2.° L'albero verticale, messo in moto da una leva all'estremità della quale i cavalli sono attaccati (*Tav.* CC, *fig.* 2), porta una forte ruola dentata *aa*, la quale comunica il suo moto ad una lanterna *b* applicata all'albero di scarpa *c*, per mezzo del quale esso è trasmesso nel lavoratorio.

3.° La disposizione (*Tav.* CC, *fig.* 3) non differisce dalla precedente che a motivo che l'albero di scarpa è al di sotto del terreno sul quale si muovono i cavalli.

4.° La figura 4 della Tavola CC, rappresenta il *maneggio* detto *svedese*. Un fuso conico di getto *h* è sostenuto da quattro puntoni di metallo gettato *a*; *a*, inchiavardati sopra una croce in legno di Sant'Andrea *ce*, murata nel terreno; il fuso conico sostiene, con una delle sue estremità; l'albero di scarpa *gg*, il quale è messo in moto dal rocchetto *e* ingranando sulla corona *d*; al di sotto della corona è accomodata la freccia alla quale il cavallo è attaccato.

La *freccia* del maneggio, ovvero il braccio di leva al quale si attacca il cavallo, deve generalmente èsser disposto in modo che il cavallo si trovi a 6 metri di distanza dall'albero verticale, il che gli fa descrivere una circonferenza di circa 19 metri. Egli tira allora presso a poco perpendicolarmente a questa leva, continuamente girando; nel mentre che se il braccio di leva fosse più corto, l'angolo che esso farebbe per percorrere il circolo sarebbe più sensibile, e una parte del suo sforzo si annullerebbe contro i punti fissi del maneggio. Un braccio di leva più lungo porterebbe delle spese più considerabili per la costruzione del maneggio, perchè bisognerebbe aumentare le dimensioni dell'armatura del legname che ricopre l'edificio.

Si costruiscono in metallo di ferro fuso dei maneggi *al di sopra*, simili a quello della (*Tav.* CC, *fig.* 3), i quali riuniscono al vantaggio della solidità e della leggerezza, una gran facilità di situazione e costano molto meno che i maneggi in legno.

Dobbiamo dire una parola del maneggio degli *ortolani*, apparecchio molto adoperato nelle vicinanze di Parigi per annaffiare i giardini. Questo maneggio semplicissimo e assai economico, si compone di un albero verticale che può girare sul suo asse, e al quale si adattano due vecchie ruote di vettura, sopra le quali sono inchiodate alcune assi situate obbliquamente per formare un tamburo (*Tav.* CCI, *fig.* 1) la cui superficie è concava. Una corda avvolta intorno di questo tamburo porta una secchia a ciascuna delle sue estremità; e quando il cavallo, attaccato ad una sbarra obbliqua che parte dal tamburo, gira in un senso, una delle secchie sale piena di acqua, e l'altra scende vuota nel pozzo. Siccome è necessario a ciascuna secchia di acqua che si fa cangiare la direzione del cavallo, vi è molto tempo e forza consumata in pura perdita; ma la piccola spesa necessaria allo stabilimento di questo apparecchio lo farà per lungo tempo preferire ad altri più perfetti. (*Vedi* il Trattato delle macchine del sig. Hachette, e il *Trattato delle macchine idrauliche*, del signor Borgnis).

MANFREDI (Eustachio), celebre geometra ed astronomo italiano, nacque a Bo-

logna il 20 Settembre 1674. Di buon' ora annunziò le più felici disposizioni, ed una circostanza interessante per la storia della scienza si riferisce a queste prime manifestazioni del suo carattere e de' suoi talenti. Ei raduneva in casa sua i suoi compagni di studio, ripeteva loro le lezioni dei professori, rischiarava i dubbj che avesser potuto imbarazzarli, ed affrettava in tal guisa la rapidità dei loro progressi. Da tale accademia di ragazzi trae la sua origine l' Istituto di Bologna, che di tanto splendore ha brillato nei fasti della scienza. Dapprima si diede allo studio della legge, e non aveva che diciotto anni quando conseguì la laurea dottorale; ma in seguito avendo assistito ad alcune lezioni di geometria del celebre Guglielmini, si sentì sì vivamente trasportato per le matematiche che, lasciata da parte la giurisprudenza, ad esse diresse interamente i suoi studj e le sue meditazioni. Si applicò poscia all' astronomia, scienza allora trascurata a Bologna, e con quell' ardore che lo caratterizzava in tutto ciò che imprendeva a fare, formò in esse sua un osservatorio in cui studiavano i suoi fratelli, ed anche le sue sorelle, cui iniziò nel segreto cammino de' corpi celesti. Nel 1698 fu fatto professore di matematiche, e nel 1704 gli venne data la soprintendenza delle acque, ufficio importante in un paese in cui i frequenti straripamenti dei fiumi danno origine a continue contese sulle confinazioni delle proprietà. In tale carica succedeva egli a Guglielmini, e se ne disimpegnò con non minor lode e reputazione del suo predecessore. Nel 1711 gli fu conferita la cattedra di astronomia nell' Istituto di Bologna, e da tal momento ei divise tutto il suo tempo tra l' astronomia e l' Idrostatica. Manfredi fu tormentato negli ultimi anni della sua vita dalla pietre, e morì di tale malattia il 15 Febbrajo 1739. Era socio straniero dell' Accademia di Parigi e membro corrispondente della Società Reale di Londra.

Le opere matematiche di questo dotto sono: I *Ephemerides motuum coelestium ab anno 1715 ad annum 1750, cum introductione et variis tabulis*, Bologna, 1715-25, 4 vol. in-4. Tali effemeridi furono continuate da Zanotti e Matteucci fino all' anno 1810. L'*Introduzione*, scritto assai stimato, venne ristampata a parte nel 1750, in-4; II *De novissimis circa siderum fixorum errores observationibus*, *Epistola*, ivi, 1730, in-4. In questo scritto si osserva come per rispetto al pregiudizj dal tempo e del suo paese il Manfredi non osa affermare il moto della terra; III *De transitu Mercurii per solem anno 1723*, ivi, 1724, in-4; IV *Liber de gnomone meridiano Bononiensi*, *deque observationibus astronomicis eo instrumento peractis*, ivi, 1736, in-4; V *Istituzioni astronomiche*, ivi 1749, in-4; VI Un gran numero di *Dissertazioni* nella raccolta dell' Istituto di Bologna, tra le quali è da notarsi quella *De annuis inerrantium stellarum aberrationibus*, nella quale il Manfredi espone i tentativi da lui fatti per dimostrare le parallassi delle stelle fisse. La vita di questo dotto è stata scritta da Fabroni nelle sue *Vitae illustrium Italorum*.

MANFREDI (GABRIELE), fratello del precedente, nato a Bologna il 25 Marzo 1681, si applicò del pari allo studio delle matematiche e vi fece rapidi progressi: in età di 24 anni, pubblicò un trattato delle equazioni differenziali del primo grado, che ottenne il suffragio dei dotti. Un talento particolare lo chiamava a correre l' arringo dell' insegnamento, e nel 1710 ottenne finalmente la cattedra di analisi cui miravano i suoi voti. Successe nel 1739 a suo fratello nella carica di soprintendente ai lavori idraulici, e morì a Bologna il 13 Ottobre 1761. È autore delle opere seguenti: I *De constructione aequationum differentialium primi gradus*, Pisa, 1707, in-4; II *Considerazioni sopra alcuni dubbj che debbono esaminarsi nella congregazione delle acque*, Roma, 1739, in-4; III Parecchie *Memorie* e *Dissertazioni* nella raccolta dell' Istituto di Bologna di cui era membro e in varj giornali italiani di quel tempo. Il resultato delle osservazioni astronomiche fatte da lui di concerto con suo fratello Eustachio si legge nella Raccolta dell' Accademia delle Scienze di Parigi.

MANILIO (Marco), autore di un poema latino sull'astronomia, fioriva verso la fine del regno di Augusto. S' ignora ogni particolarità della sua vita. Si congettura però che fosse straniero; infatti s'incontrano nel suo poema modi singolari di dire, che difficilmente si troverebbero in altro autore dello stesso secolo. Bentley lo suppone nativo di Asia. Havvi chi crede che Manilio non sia che una medesima persona con quel Manlio matematico, che innalzò nel campo Marzio, a Roma, per ordine di Augusto, uno gnomone alto settanta piedi. Si veda quanto ne dice Montucla nella sua *Storia delle matematiche*, tom. I, pag. 485 e segg. Il poema di Manilio, che è intitolato *Astronomicon*, non è compiuto. I cinque libri che si posseggono trattano principalmente delle stelle fisse, ma in varj luoghi del suo lavoro il poeta promette di parlare anco dei pianeti. Il manoscritto dell' *Astronomicon* fu scoperto da Poggio nel 1416, e Regiomontano (G. Muller) fu quegli che primo lo pubblicò a Norimberga nel 1473, in-fol. Tra le molte edizioni che ne sono state fatte sono da rammentarsi come le più stimate e le più corrette le seguenti: Londra, 1739, in-4, colle note di Riccardo Bentley; Padova, Comino, 1743, in-8; Strasburgo, 1767, in-8, *cum notis Bentleii et variorum*, per cura di Elia Stoeber; e finalmente, Parigi, 1786, 2 vol. in-8, colle note e la traduzione in francese di Pingré. Manilio è stato tradotto in italiano da Gaspero Bandini, e tale traduzione si legge nei tomi XVI e XVII della *Raccolta degli antichi poeti latini*, Milano, 1737, in-4. A tale edizione Filippo Argelati aggiunse la vita dell' autore e l' indice dei passi più oscuri che s' incontrano nel poema.

MANOMETRO (*Mec.*). Instrumento di fisica che serve a misurare la forza elastica dei gas. Abbiamo indicato la sua natura e i suoi usi alla parola Forza elastica.

MANOVELLA. (*Mec.*) Si dà questo nome ad una sbarra che gira intorno di un asse, e all' estremità della quale è applicata una potenza o una resistenza, secondo che si vuole trasformare un moto rettilineo alternativo in circolare continuo, o *vice-versa*. Vi sono delle manovelle semplici, doppie, triple, ec. (*Vedi* composizione delle macchine, § II.) Quest' organo meccanico viene spesso sostituito mediante una *cura eccentrica*. (*Vedi* questa parola).

MAPPAMONDO (*Geogr.*). Carta geografica che rappresenta i due emisferi del globo terrestre (*Tav.* LV, *e* LVI). È una *projezione stereografica* fatta sopra un piano che s' immagina condotto pel centro della terra perpendicolarmente alla retta che unisce il centro all' occhio.

MARALDI (Giacomo Filippo), astronomo distinto, nacque a Perinaldo, piccola città della contea di Nizza, il 21 Agosto 1665. Terminati i consueti studj, si applicò alle matematiche, per le quali coi suoi rapidi progressi annunziò le più belle disposizioni. Il celebre Cassini, suo zio, che da varj anni soggiornava in Francia, ve lo chiamò nel 1687 per coltivare egli stesso i talenti del suo parente. Giunto a Parigi, Maraldi si dedicò interamente all'astronomia, e formò il progetto di pubblicare un nuovo catalogo delle stelle fisse. La sua assiduità al lavoro alterò la sua salute; ma non potè risolversi a prendere il riposo di cui aveva bisogno, e preferì una vita sofferente ad una vita inoperosa che sembravagli ancora meno sopportabile. Comunicava di buon grado a chiunque lo richiedeva il resultato delle sue osservazioni, e staccò più volte dalla sua opera notizie di posizioni di stelle che altri astronomi gli domandavano. Ricevuto membro dell' Accademia delle Scienze, fu occupato nel 1700 nella prolungazione della meridiana, e nella misura dei grandi triangoli fino all' estremità delle Basse Alpi. Nel 1718, concorse con altri accademici a terminare la gran meridiana dalla parte del nord. Tranne i prefati viaggi, dice Fontenelle che ha scritto il suo elogio, passò la vita chiuso

nell'Osservatorio, o piuttosto nel cielo a cui i suoi sguardi e le sue ricerche erano sempre rivolte. I lavori di Maraldi sono del numero di quelli che meritano la stima dei dotti ma che poca gloria fruttano al loro autore. Egli accingevasi a dare l'ultima mano al suo catalogo delle stelle fisse, quando infermò: mancò ai vivi e alla scienza il primo Dicembre 1729. Oltre il catalogo summentovato, rimasto manoscritto e divenuto oggi inutile per i grandi lavori fatti modernamente sullo stesso soggetto, Maraldi ha fatto un numero grandissimo di osservazioni astronomiche e fisiche, che si leggono nella Raccolta dell' Accademia delle Scienze.

MARALDI (Gian Domenico), nipote del precedente, nato a Perinaldo nel 1709, creato astronomo aggiunto nel 1731, associato all' Accademia delle Scienze nel 1733, pensionario nel 1758, e veterano nel 1772, morì il 14 Novembre 1789. Egli ebbe la maggior parte nella compilazione della carta dei triangoli che hanno servito per base alla gran carta della Francia conosciuta sotto il nome di *Carta di Cassini.* Tra le numerose osservazioni astronomiche che egli ha inserito nella Raccolta dell' Accademia delle Scienze, si nota una memoria *sul moto apparente della stella polare verso i poli del mondo*, ed altre dissertazioni interessanti *sui satelliti di Giove*. Dopo la morte di suo zio, continuò le osservazioni meteorologiche nell'Osservatorio. È pure alle di lui cure dovuta la stampa del *Coelum australe* di La Caille suo intimo amico. Per motivi di salute essendo stato obbligato nel 1770 a tornare in patria, vi continuò pel corso di quindici anni colla massima assiduità le osservazioni degli ecclissi dei satelliti che faceva a Parigi dal 1730 in poi.

MAREA (*Fisica matematica*). Moto alternativo giornaliero delle acque del mare, che copre e abbandona successivamente le rive.

Due volte il giorno l' Oceano si solleva e si abbassa per un movimento di oscillazione regolare. Dapprima le acque si alzano per circa sei ore; allora esse inondano le spiagge e si precipitano nell' interno dei fiumi fino a grandi distanze dalla loro foce: questo movimento dicesi il *flusso*. Dopo esser giunte alla loro maggiore altezza, rimangono per qualche istante in riposo, ed è questo il tempo dell' *alta marea*. A poco a poco cominciano ad abbassarsi colle stesse gradazioni colle quali erasi effettuato il loro accrescimento, e finiscono con abbandonare i luoghi che avevano invaso: questo movimento dicesi il *riflusso*, e dura presso a poco sei ore: quando le acque sono giunte alla massima loro depressione, rimangono un istante in riposo, ed è questo il momento della *bassa marea*, dopo la quale ricomincia il flusso e così di seguito.

Gli antichi avevano già concluso dai fenomeni delle maree che esse dovevano esser prodotte dal sole e dalla luna; ma era questa una semplice congettura mancante di ogni specie di prova, e può dirsi che fino a Cartesio nessuno si era accinto a dare una spiegazione particolarizzata di questo fenomeno. Se a quell' uomo sommo non fu allora dato di svelare la causa di questi movimenti singolari e di sottoporli al calcolo, egli ha almeno il merito di avere il primo aperto l' arringo. A Newton era riserbata la gloria di penetrare questo mistero, il quale non è che una conseguenza semplice e necessaria del sistema della gravitazione universale e può anco al bisogno servirgli di verificazione e di prova a *posteriori*.

La teoria delle maree è stata trattata completamente da Maclaurin, da Daniele Bernoulli, da Eulero e da d' Alembert, ed è dovuta a Laplace una formula generale per trovare l' altezza del mare in qualunque istante dato. Noi cercheremo di spiegare questa teoria senza uscire dai limiti che ci siamo prescritti.

Le acque del mare, per la loro mobilità in tutti i sensi, possono ricevere movimenti isolati, e debbono necessariamente alzarsi quando una causa esterna agisca sopra di esse per attrarle. Ora, la terra non gira intorno al sole che per l' unica ragione che la forza attrattiva del sole la ritiene nella sua orbita; ma

questa forza si esercita in ragione inversa del quadrato delle distanze, e per conseguenza la sua azione sulle acque poste alla superficie della terra che è rivolta verso il sole, è maggiore di quella che esercita sul centro della terra, donde avviene che queste acque sono più attratte del centro, e debbono costantemente elevarsi verso il sole sotto la forma di una protoberanza. Nello stesso momento, nella regione diametralmente opposta, deve aver luogo lo stesso fenomeno, per cause inverse: infatti, le acque vi si trovano più lontane dal sole che il centro della terra, ed essendo meno attratte di questo centro debbono restarsene indietro. Da una parte è dunque l'acqua del mare che si eleva verso il sole, dall'altra è la terra che s' innalza più delle acque. Due protoberanze acquose opposte si avanzano dunque a misura che la terra gira sopra sè stessa, per trovarsi continuamente nella direzione della linea che unisce il centro della terra con quello del sole. Queste masse, nel loro movimento progressivo, invadono le spiagge, mentre al contrario, a 90° di distanza in longitudine, le acque si abbassano per alimentare il flusso. L' azione del sole deve dunque produrre, nel corso di una rivoluzione della terra sul suo asse, due maree, ossia due flussi e due riflussi ogni giorno.

Ciò che adesso abbiamo detto del sole si applica esattamente alla luna, e quantunque la massa di quest' astro sia piccolissima, la sua prossimità alla terra rende la sua azione quasi tripla di quella del sole. La luna deve dunque produrre anch' essa due maree per giorno; ma le acque del mare, trovandosi sottoposte a due azioni simultanee, non presentano quattro maree ogni giorno, perchè le azioni si compensano; e secondo che esse concorrono o si contrariano, è soltanto la loro somma o la loro differenza che agisce, dimanierachè non può aversi mai che due maree.

Così, nel novilunio, i due astri agiscono presso a poco nella stessa direzione e nello stesso senso, e la marea effettiva è la somma delle maree lunare e solare: nel plenilunio, i due astri agiscono pure nella stessa direzione, e quantunque le loro azioni siano in senso inverso, siccome tendono ambedue ad elevare le acque nel medesimo tempo, la marea effettiva anco in questo caso è la somma delle due maree. Nella quadrature al contrario, l' alta marea lunare avviene nel tempo medesimo della bassa marea solare, e reciprocamente, ed allora la marea effettiva non è più che la differenza delle maree solare e lunare. Quanto alle altre situazioni relative del sole e della luna, la marea di uno dei due astri non tende che ad avanzare o a ritardare, ad accrescere o a diminuire quella dell'altro, secondo le posizioni che prende la resultante delle due forze. Le distanze della terra dalla luna e dal sole essendo variabili, le azioni di questi astri lo sono pure, e conseguentemente lo è anco la grandezza delle maree.

Se le acque del mare non fossero, come tutte le particelle della materia, dotate di quella forza d' inerzia per la quale i corpi in moto conservano l' impulso che hanno ricevuto, l' ora dell' alta marea dovrebbe sempre esser quella del passaggio della luna pel meridiano: ma ciò non è così, e l'inerzia delle acque non solo ritarda l' alta marea, ma diminuisce ancora la sua elevazione. Per rendersi ragione di questo fenomeno, basta supporre un istante la terra in riposo, e fare astrazione dall' azione del sole, la forza del quale per innalzare le acque è molto minore di quella della luna; allora l' acqua s' innalzerà dalla parte della luna. Se ora s' immagina che la terra riprenda il suo moto e giri traendo seco quest'acqua innalzata dalla luna, da una parte l' acqua tenderà a conservare l' elevazione a cui è giunta, e dall' altra tenderà a perdere successivamente una parte di questa elevazione allontanandosi dalla luna; e siccome questi due effetti si contrariano, l' acqua trasportata dal moto della terra si troverà più elevata all' oriente della luna di quello che dovrebbe essere senza questo movimento, ma

nel tempu stesso sarà meno elevata di quello che sarebbe stata sotto la luna se la terra fosse immobile. In generale, il moto della terra deve ritardare le maree e diminoire la loro elevazione. Oltre questa rausa di ritardo, ve ne sono parecchie altre alle quali è necessario aver riguardo nei calcoli numerici: sono queste la configurazione delle rive, la direzious delle correnti, e la forza dei venti.

Il ritardo dovuto alla configurazione delle spiagge o ad altre circostanze della località, è ciò che comunemente si dice lo *stabilimento del porto*: è questo un ritardo costante per ciascun porto di mare iu particolare, ma varia da un porto all'altro. I piloti hanno della tavole di questo ritardo per ognuno dei porti più frequentati: per essi è importante il conoscere l'ora della marea, perche spesso non si può entrare o uscire da un porto che nel momento iu cui la marea è alta.

Il ritardo dovuto al moto della terra e alla resistenza delle acque, è costantemente di 36 ore: è universalmente dimostrato dall'esperienza che la marea di un giorno qualunque è determinata dalle circostanze in cui trovavansi il sole e la luna un giorno e mezzo prima. Così, sapendo, per esempio, che il novilunio del mese di Novembre 1836 ha luogo il dì 9 a ore 1 e minuti 44 da mattina, si conoscerà l'epoca della più alta marea che corrisponde a questo novilunio, aggiungendo 36 ore a 1 ora e 44 minuti, il che dà 37 ore e 44 minuti, e trasferisce per conseguenza questa marea al 10 Novembre a ore 1 e minuti 44 da sera. Bene inteso però che qui si tratta del luogo nel quale la luna farà il suo passaggio al meridiano il 9 Novembre a ore 1 e 44 minuti da mattina, e che per avere l'ora vera dell'alta marea bisogna aggiungere ancora a 1 ora e 44 minuti da sera, l'ora dello *stabilimento del porto* di questo luogo.

Nei giorni del novilunio e del plenilunio, l'istante della maggiore azione dei due astri è quello del passaggio della luna al meridiano, e lo stesso deve porre dirsi dell'epoca del primo e dell'ultimo quarto: ma, nelle altre posizioni, quest'istante precede o vien dopo il passaggio al meridiano, senza mai però allontanarsene molto. Ed è appunto l'ora di questo istante che deve determinarsi per ciascun luogo in particolare, ed alla quale bisogna poi aggiungere 36 ore e più l'ora dello *stabilimento del porto* di questo luogo: la somma di questi tre tempi è l'ora dell'alta marea.

La determinazione generale dell'istante della maggior marea vien data in un modo sufficientemente approssimativo dalla seguente formula che Daniele Bernoulli espose in una memoria che riportò nel 1740 il premio proposto dall'Accademia delle Scienze di Parigi:

$$\text{sen}\,\alpha = \sqrt{\left[\frac{1}{2}\left(1+\frac{A}{\sqrt{(4+A^2)}}\right)\right]},$$

ove α è il tempo, espresso in gradi, che scorre tra il passaggio della luna al meridiano del luogo e l'istante dell'alta marea, ed A una quantità determinata dalla relazione

$$A = \frac{4\,\text{sen}^2\varphi - 7}{2\,\text{sen}\,\varphi\cos\varphi},$$

indicando con φ l'arco della distanza in ascensione retta tra il sole e la luna. Se ora si prende un arco ausiliare ψ, tale che si abbia

$$-\frac{1}{2}A = \text{tang}\,\psi = \frac{7-4\,\text{sen}^2\varphi}{4\,\text{sen}\,\varphi\cos\varphi},$$

donde si otterrà

$$\text{tang}\,\psi = \frac{2,5 + \cos 2\varphi}{\text{sen}\,2\varphi},$$

e la formula precedente si ridurrà a

$$\text{sen}\,\alpha = \text{sen}\left(45^\circ - \frac{1}{2}\psi\right),\ \text{ossia}\ \alpha = 45^\circ - \frac{1}{2}\psi.$$

Si calcolano immediatamente le 36 ore di ritardo osservando che in questo intervallo la luna si avanza di circa 19°, e che così basta cangiare φ in $\varphi - 19^\circ + 1$, ossia in $\varphi - 20^\circ$, come fa Bernoulli per avere un numero tondo, ed allora la formule divengono

$$\text{tang}\,\psi = \frac{2,5 + \cos 2(\varphi - 20^\circ)}{\text{sen}\,2(\varphi - 20^\circ)},$$

$$\alpha = 45^\circ - \frac{1}{2}\psi,$$

ed α ridotto in tempo dà, a seconda del suo segno, il ritardo o l'anticipazione dell'alta marea sull'ora del passaggio della luna pel meridiano.

Queste formule, dalle quali si può dedurre una tavola comodissima per la pratica, danno dei resultati numarici che sono sensibilmente d'accordo coi fatti osservati, quantunque parecchi elementi importantissimi vi siano trascurati. Laplace, considerando tutte le circostanze omesse da Bernoulli, è giunto ad una formola senza dubbio più esatta, ma talmente complicata che la lunghezza dei calcoli che essa trae seco la rende di un uso troppo difficile; e siccome di più basta sempre conoscer l'ora dell'alta marea con un'approssimazione di qualche minuto, perchè diverse circostenze accidentali, come la direzione e la forza dei venti, apportano spesso variazioni più considerabili, si fa uso generalmente della formula di Bernoulli, prendendo però dei valori più precisi di quelli che egli dà nella sua tavola. Nell'*Annuario* dell'Ufizio delle Longitudini di Parigi, si trovano due tavolette comodissime, e varj esempj di calcolo ai quali rimandiamo il lettore.

L'altezza delle maree si misura prendendo per termine di confronto la media tra l'alta e bassa marea, ed è questa altezza media che si esprime coll'unità: siccome tale altezza è differente secondo le località, per rendere i resultati del calcolo applicabili a un luogo particolare bisogna preventivamente determinare il valore dell'unità di altezza per questo luogo, il che non può farsi che mediante una lunga serie di osservazioni.

In tal guisa si è trovato l'unità di altezza pei seguenti porti della Francia:

	Unità di altezza
Porto di Brest	3^m, 21
» di Lorient	2, 24
» di Cherbourg.	2, 70
» di Granville.	6, 35
» di St-Malo	5, 68
» di Audierne.	2, 00
» di Croisic.	2, 68
» di Dieppe.	2, 87

La formula di cui si fa uso per calcolare l'altezza della marea non si riferisce che alle maree sizigie, ossia alle massime maree, le sole d'altronde di cui possa essere importante il conoscere l'altezza assoluta delle acque: essa è dovuta a Laplace; eccola:

$$z = \frac{40}{163} \left(i^3 \cos^2 D + 3 i'^3 \cos^2 D' \right),$$

ove D e D' sono le declinazioni respettive del sole e della luna nell'istante della sizigie, i è eguale all'unità divisa pel raggio vettore del sole, prendendo per unità il valore medio di questo raggio, ed i' è la parallasse orizzontale attuale della luna divisa per 51' 1'' che ne è il valore medio. Per mezzo di questa formula si danno ogni anno, nella *Connaissance des temps*, le altezze delle maree sizigie; basta poi moltiplicare queste altezze per l'unità di altezza di un luogo, per ottenere l'altezza assoluta della marea. Trovando, per esempio, che per il novilunio di Settembre 1836 l'altezza della marea è 0,93, se si vuol conoscere l'elevazione delle acque nel porto di Brest, si moltiplicherà 0,93 per l'unità di altezza di Brest, vale a dire per 3m.,21, e il prodotto 2m.,9853 sarà l'elevazione cercata. Si vede che essa sarà al di sotto della media. In generale, essendo a l'unità d'altezza di un porto, espressa in metri o in qualunque altra misura, az sarà l'altezza della marea nelle sizigie.

Il massimo valore di z è 1,178, e il suo valore minimo 0,67

MARIE (Giuseppe Francesco), nato a Rodez nel 1738, si recò a Parigi ove fece i suoi studj e vestì l'abito ecclesiastico. Succeduto nel 1762 all'abate La Caille nell'impiego di professore di matematiche nel collegio Mazarino, si applicò a rivedere le *Lezioni di matematiche* del suo predecessore, delle quali diede un'eccellente edizione arricchita d'importanti aggiunte. Tali lezioni, sovente ristampate, sono state per lungo tempo classiche nelle scuole e sono tuttora usate in alcuni collegi. Esse comparvero nel 1781, in Firenze, tradotte in italiano dai pp. Stanislao Canovai e Gaetano Del-Ricco delle Scuole Pie, che diedero nuovo pregio al libro illustrandolo con utili schiarimenti ed ampliandolo d'interessanti aggiunte. Tale traduzione è stata ristampata in Firenze parecchie volte e sempre con nuovi miglioramenti per le cure indefesse che vi hanno portato i dotti traduttori e il loro successore p. Giovanni Inghirami delle Scuole Pie; ma la sesta edizione pubblicata nel 1816, e più particolarmente la settima del 1825, dovute ambedue a quest'ultimo, si distinguono per tali e tante variazioni e perfezionamenti, che hanno assunto l'aspetto e il carattere di opera originale. L'ab. Marie rivide ancora le *Lezioni di ottica* di La Caille, e presedè alla ristampa delle *Tavole dei logaritmi* dello stesso autore. Egli morì a Memel in Prussia il 25 Febbrajo 1801.

MARIO (Simone Mayer, più noto sotto il nome di), astronomo, nato nel 1570 a Guntzenhausen, dopo avere studiato la scienza sotto il celebre Ticone Brahé nell'isola di Hueen, si recò in Italia ove soggiornò tre anni. In questo tempo, tradusse in latino con alcune varianti il *Trattato del compasso di proporzione* di Galileo, e diede tale traduzione a Baldassarre Capra, che poi la stampò come opera sua originale. Reduce in Germania, Mario divenne astronomo dell'elettore di Brandeburgo, e morì nel 1624 a Norimberga. Mario è noto principalmente per avere spacciato di essere stato il primo in Germania ad osservare i satelliti di Giove e le macchie del sole. Egli affacciò questa pretensione in un'opera intitolata: *Mundus jovialis anno* 1609 *detectus ope perspicilli belgici*, Norimberga, 1614, in-4, nella quale dimostra le rivoluzioni dei satelliti di Giove, che quasi in nulla differiscono da quelle pubblicate due anni prima da Galileo nel suo *Nuncius sidereus*. Egli vi suppone alcune osservazioni da lui fatte di questi

piccoli pianeti, e colla prima di esse, che è in data del 29 Dicembre 1609, vecchio stile, intende di dimostrare la sua anteriorità sopra Galileo che non osservò i satelliti che il 7 Gennajo 1610, nuovo stile. Galileo gli rimproverò questa soperchieria di data, notando come per la diversità di dieci giorni che esisteva nel computo del tempo tra i cattolici che avevano adottata la riforma gregoriana e i protestanti che continuavano a far uso del calendario di Giulio Cesare, il 7 Gennajo dei primi corrispondeva al 28 Dicembre dei secondi Rivendicata così l'anteriorità della propria scoperta, in quanto che l'osservazione di Mario, ancorchè non si fosse voluta supporre copiata dal *Nuncius sidereus*, non sarebbe stata che dell'8 Gennajo, Galileo sostenne che Mario non aveva mai veduto i satelliti, dimostrando ciò per mezzo dei diversi abbagli che esso non avrebbe presi se gli avesse realmente osservati. Ma, sia che Mario non osservasse mai i satelliti, o gli osservasse dopo l'annunzio datone da Galileo, è certo che il *Mundus jovialis* nulla contiene che un astronomo non avesse potuto scrivere dopo aver letto il libro di Galileo e senza aver veduto co' proprj occhi i nuovi pianeti. Mario però ha fatto delle osservazioni sulla scintillazione delle stelle che ha preteso di spiegare, ed è stato il primo a descrivere la nebulosa della cintura di Andromeda. Egli ha pubblicato ancora: I *Tabulae directionum novae universae Europae inservientes*, Norimberga, 159·, in 4; Il *Discorso sulla cometa del* 1618 (in tedesco), ivi, 1619, in-4 Mario aveva pubblicato pure a Norimberga dal 1610 in poi diversi almanacchi che ebbero molta voga; ed aveva tradotto in tedesco i *primi sei libri della geometria d'Euclide*, Auspach, 1610, in-fol.

MARIOTTE (Edmo), uno dei dotti più distinti del secolo decimosettimo, ed uno dei primi che abbiano introdotto in Francia la fisica sperimentale, nacque nelle vicinanze di Digione in un'epoca che non si conosce. Aveva abbracciato lo stato ecclesiastico ed era priore di san' Martino sotto Beauna, quando all'epoca della fondazione dell'Accademia delle Scienze fu chiamato a farne parte. Più fisico che geometra, Mariotte ha confermato con moltiplici esperienze la teorie del moto dei corpi trovata da Galileo, e quella dell'idrostatica o della scienza dell'equilibrio dei fluidi, che lo stesso Galileo e Pascal avevano resuscitata Il *Traité du mouvement des eaux* di Mariotte, dato in luce da F. de la Hire, Parigi, 1786, in-12, è stato oscurato dalle opere che d'Alembert, Bossut, ec. hanno pubblicate sulla stessa materia; ma gli rimane l'onore di aver dimostrato che l'applicazione della geometria alle scienze fisiche era il solo mezzo di ottenere resultati veramente soddisfacenti. Il suo *Discours sur l'air*, che comparve nel 1679, contiene una serie di esperienze interessanti, allora assolutamente nuove. Mariotte morì il 12 Maggio 1684, e la *Raccolta* delle sue opere è stata pubblicata a Leida nel 1717, 2 vol. in-4, e ristampata all'Aja, 1740, 2 vol. in-4. Gli articoli che la compongono sono: *Trattato della percussione o urto dei corpi*; — *Saggi di fisica: della vegetazione delle piante*; *della notura dell'aria*; *del caldo e del freddo*; *della natura dei colori*; — *Trattato del moto delle acque*; — *Regole per gli zampilli d'acqua*; — *Nuova scoperta concernente la vista*; — *Trattato di livellazione*; — *Trattato del moto dei pendoli*; — *Esperienze concernenti i colori e la congelazione dell'acqua*; — *Saggio logico*. L'elogio di Mariotte è stato scritto da Condorcet.

MARTE (*Astron*). Nome di uno dei pianeti del nostro sistema solare; è il quarto nell'ordine delle distanze dal sole. Si rappresenta col segno ♂.

Questo pianeta, la cui luce è rossastra e comparisce sempre appannata, il che indica l'esistenza di un'atmosfera, eseguisce la sua rivoluzione intorno al sole in 686 giorni, 23 ore 30′ 39″. Sebbene lontano dal sole più della terra, Marte è assai più piccolo della terra; infatti il suo diametro non ha più di 1693 leghe di 2000 tese l'una, e il suo volume è appena la sesta parte di quello della

terra. Nulladimeno su questo piccolo pianeta si distinguono dei contorni che sembrano indicare dei continenti e dei mari. La figura 2 della tavola XXXIV rappresenta Marte quale è stato osservato a Slough con un fortissimo telescopio. Le parti che possono considerarsi come continenti sono rivestite di un colore rosso che proviene probabilmente dalla tinta ocracea del suolo, mentre le parti che si assomigliano a dei mari compariscono verdastre. Queste macchie, che solcano così la luce che ci tramanda questo pianeta, non sono sempre visibili, ma quando si scorgono presentano sempre la stessa apparenza. Sembra dunque omai fuor di dubbio che Marte sia circondato da un' atmosfera, le cui nubi ora nascondono ed ora scoprono queste macchie. Se ne osservano alcune assai distinte situate verso i poli e di una bianchezza abbagliante, che si è supposto esser formate da grandi masse di neve. Questa congettura sembra tanto più probabile in quanto che queste macchie spariscono quando sono state esposte molto tempo al sole, mentre all' opposto acquistano la massima loro dimensione dopo le lunghe notti degl' inverni polari.

Il giorno e la notte succedonsi su questo pianeta presso a poco come sulla terra, perchè la durata dalla sua rotazione sopra sè medesimo è di 24 ore 39′ 21″,3. Prendendo per *unità* il volume, la massa e la densità della terra, il volume di Marte vien rappresentato da 0,17, la sua massa da 0,13, e la sua densità media da 0,77; così la sua densità si approssima troppo a quella della terra, per non far supporre che su questo pianeta tutto avvenga presso a poco come sul pianeta che noi abitiamo.

Prendendo per unità di misura la lega di posta, cioè di 2000 tese, le dimensioni dell' orbita di Marte, secondo Delambre, sono

Asse maggiore	124 545 920 leghe
Eccentricità.	5 566 896
Massima distanza dal sole	65 839 856
Minima distanza dal sole	59 206 064

Questo pianeta si allontana dalla terra fino alla distanza di 105227117 leghe, e se ne avvicina fino a quella di 14318803 leghe. Ecco i suoi elementi riferiti al 1.° Gennajo 1801:

Semiasse maggiore, preso per unità quello della terra . . .	1,5236923
Eccentricità in parti del semiasse maggiore	0,0933070
Diametro equatoriale, preso per unità quello della terra . . .	0,5170000
Periodo siderale medio, in giorni solari medj.	686^g,9796458
Inclinazione sull' ecclittica	1° 51′ 6″,2
Longitudine del nodo ascendente	48 0 3 ,5
Longitudine del perielio.	332 23 56 ,6
Longitudine media dell' epoca	64 22 55 ,5

Marte non presenta delle fasi complete e distinte come Mercurio e Venere, ma il suo diametro medio apparente, che non è che di 9″,7 nelle sue congiunzioni, aumenta fino a 29″,2 nelle sue opposizioni: la sua parallasse è presso a poco doppia di quella del sole. Il moto di Marte, veduto dalla terra, apparisce talvolta retrogrado, ma questo fenomeno, che gli è comune con tutti gli altri pianeti più distanti dal sole della terra, sarà esposto all' articolo Pianeta.

MARTIN (Beniamino), matematico ed ottico inglese, nato nel 1704 e morto nel

1782, ha composto un numero grande di opere non prive di merito: le principali sono: I *Aritmetica decimale*, Londra, 1747, in-8; II *Dottrina dei logaritmi*, ivi, 1740, in-8; III *Teoria delle comete*, ivi, 1752, in-4; IV *Istituzioni matematiche*, ivi, 1759, 2 vol. in-8; V *Nuovi elementi di ottica*, ivi, 1756, in-8. VI *Micrografio*, o *Nuovo Trattato del microscopio*, ivi, 1743, in-4; VII *Trigonometria piana e sferica*, ivi, 1736, 2 vol. in-8.

MARZO (*Calend.*). Terzo mese dell' anno. Verso il 21 di questo mese il sole entra nel segno dell' Ariete, e comincia allora la primavera. *Vedi* Calendario e Armillare

MASCHERONI (Lorenzo), matematico, nato a Bergamo nel 1750, si applicò dapprima a coltivare le lettere, e non aveva che diciotto anni quando insegnava già il greco ed il latino nel collegio della sua città nativa. Chiamato in seguito a professare la lingua greca nell' università di Pavia, v' insegnò fino all' età di ventisette anni: ma non era questo l' arringo che fruttar doveva a Mascheroni la sua celebrità. Una circostanza fortuita sviluppò in lui una inclinazione particolare per le scienze esatte e rivelò la sua vera vocazione. Un' opera di matematiche essendogli un giorno capitata tra le mani, la lesse con avidità e concepì tanta passione per tale scienza, che rinunziò per applicarvisi a tutti gli altri studj. I suoi progressi furono rapidi: in breve ottenne la cattedra di geometria nel collegio di Bergamo, e non molto dopo fu fatto professore di geometria e d' algebra nell' università di Pavia. Nel 1787 pubblicò una memoria intitolata: *Metodo per la misura dei poligoni piani*, nel quale trattava tutti i problemi che si trovano pure nella *Poligonometria* di Lhuillier, stampata due anni dopo a Ginevra nel 1789. Quest' ultima opera non giunse che alcuni anni dopo la sua pubblicazione a notizia del Mascheroni, che maravigliossi come lo stesso soggetto, gli stessi problemi, fossero stati trattati con uno stesso metodo da un altro geometra. Fece stampare a Pavia nel 1793, col modesto titolo di *Problemi per gli agrimensori, con diverse soluzioni*, un' opera di cinque libri, i primi tre dei quali e parte del quarto non sono che una nuova edizione della memoria da lui pubblicata nel 1787; la fine del quarto ha per oggetto di dare una maggior generalità ai problemi contenuti nei libri precedenti; e il quinto è consacrato interamente alla misura dei solidi. Ei profittò di questa pubblicazione per riveodicare, nella prefazione, la proprietà della sua prima memoria, e il fece col calore che gl' ispirava una produzione cui era affezionato, e con tutti i riguardi per un matematico del quale non voleva attenuare il merito nell'opinione pubblica.

All'epoca della venuta dei Francesi in Italia, il Mascheroni tuttochè si manifestasse partigiano del nuovo ordine di cose, seppe adempire scrupolosamente ai doveri dello stato ecclesiastico che aveva abbracciato. I suoi talenti e la rettitudine dei suoi principj fissarono sopra di lui i suffragj de' suoi concittadini: fu nominato membro del corpo legislativo della repubblica cisalpina: ma mentre esercitava queste nuove funzioni col massimo zelo, non tralasciava di applicarsi allo studio delle scienze matematiche, per le quali conservava la stessa predilezione. Egli continuava ad occupare la cattedra di matematiche nell' università di Pavia, quando nel 1798 il governo italiano lo inviò a Parigi per cooperarvi allo stabilimento del nuovo sistema dei pesi e misure. Ed ei si applicò a questo lavoro con tanto zelo e intelligenza, e vi spiegò tali talenti che si guadagnò la stima dei suoi colleghi, come colla sua dolcezza e colla sua modestia seppe guadagnarsi la loro amicizia. Ma la soverchia applicazione sconcertò la sua salute, e fu rapito alle scienze ed agli amici il 14 Luglio 1800, in età di 50 anni. Il suo elogio fu scritto dal marchese Ferdinando Landi, e si legge nel tomo II delle *Memorie* della Società Italiana.

Le opere di Mascheroni sono: I *Sulle curve che servono a delineare le ore ineguali degli antichi nelle superficie piane*, Bergamo, 1784, in-4; II *Nuove ricerche sull' equilibrio delle volte*, Bergamo, 1785, in-4: opera profonda, in cui col soccorso del calcolo integrale e delle differenze del secondo ordine l'autore tentò di inoltrarsi in tale soggetto più avanti che fatto non avevano Bossut e Lorgna nelle memorie da essi pubblicate negli anni 1774, 1779 e 1780; III *Metodo per la misura dei poligoni piani*, Pavia, 1787, in-8; IV *Problemi per gli agrimensori con diverse soluzioni*, Pavia, 1793, in-8; V *Geometria del Compasso*, Pavia, 1797, in-8; tradotta in francese da Carette, Parigi, 1798, in-8, ed ivi ristampata, 1828, in-8. Fino allora erasi fatto uso della riga e del compasso per la risoluzione dei problemi della geometria piana. Mascheroni in quest' opera si propone di fare uso del solo compasso, e con tale strumento risolve i quesiti della geometria elementare. Ei vi ha raccolto un numero grande di proposizioni non meno nuove che interessanti: quelle soprattutto che riguardano la divisione del circolo meritano di essere osservate, perchè possono ricevere utili applicazioni nella pratica per la costruzione degli strumenti di matematica e di astronomia. VI *Note sul trattato del calcolo differenziale di Eulero*. Mascheroni ha scritto anco delle poesie, e tra queste il suo *Invito di Dafni a Lesbia* non gli fa meno onore che la sua *Geometria del Compasso*: ei vi descrive con pari precisione e facilità gli oggetti curiosi dell' anfiteatro di fisica e del museo di storia naturale dell' università di Pavia. Ha lasciato manoscritte diverse memorie, e tra le altre una sulla piramidometria, soggetto trattato dall' illustre Lagrange prima di lui, ma che egli esamina sotto un aspetto nuovo. Una di queste memorie intitolata: *Spiegazione popolare della maniera colla quale si regola l'anno sestile o intercalare, e il cominciamento dell' anno repubblicano* è stata inserita dopo la sua morte nelle *Memorie di fisica e matematica* della Società Italiana, tomo IX, pag. 321, Modena 1802. Mascheroni aveva altresì avuto parte nelle esperienze fatte a Bologna per provare il moto della terra mediante la caduta dei corpi.

MASERES (Francesco), nato a Londra il 15 Dicembre 1731 da una famiglia originaria francese, si è reso celebre in parte pei suoi scritti e in parte per le grandi spese da lui impiegate nella ristampa di opere matematiche utili per la storia della scienza e divenute rare. Dopo aver fatto eccellenti studj letterarj e matematici, nell' università di Cambridge, Maseres si diede allo studio delle leggi: il suo primo impiego fu di procuratore generale a Québec, e al suo ritorno in Inghilterra nel 1773 fu fatto barone dello scacchiere, uffizio che occupò fino alla sua morte avvenuta il 19 Maggio 1824. Le sue opere scientifiche, scritte tutte in inglese, sono: I *Dissertazione sull' uso del segno negativo in algebra*, Londra, 1758, in-4; II *Elementi di trigonometria piana con una dissertazione sulla natura ed uso dei logaritmi*, ivi, 1760, in-8; III *Principj della teoria dei vitalizj*, ivi, 1783, 2 vol. in-4; IV *Appendice ai principj d' algebra di Frend*, ivi, 1799, in-8; V *Trattati sulla risoluzione delle equazioni cubiche e biquadratiche*, ivi, 1803, in 8; VI *Risoluzione delle equazioni algebriche secondo i metodi di approssimazione di Halley, Raphson e Newton*, ivi, 1800, in-8; VII Parecchie note ed osservazioni sui trattati da lui pubblicati nella raccolta intitolata: *Scriptores logaritmici*, di cui adesso parleremo, e varie memorie nelle *Transazioni filosofiche*. Delle ristampe fatte dal barone Maseres a sue proprie spese la più importante è quella intitolata: *Scriptores logarithmici*, ossia *Collezione di un gran numero di trattati curiosi sulla natura e sulla costruzione dei logaritmi dei più eccellenti matematici di Europa*; questa raccolta comprende sei volumi in-4 pubblicati dal 1791 al 1807. Vi si trovano le opere di Keplero, di Neper o Napier, di Snell, ec., sui logaritmi, e

sopra soggetti intimamente connessi con tale teoria. La ristampa di questi antichi scritti gli ha posti nelle mani di molti studiosi ai quali sarebbero stati in altro modo inaccessibili, ed ha così contribuito a promuovere le cognizioni storiche e ad eccitare nuove indagini. Gli *Scriptores optici*, pubblicati nel 1823, è una ristampa degli scritti di ottica di Giacomo Gregory, di Cartesio, di Schooten, di Huygens, di Halley e di Barrow, ed ha un merito del medesimo genere: tale raccolta, cominciata molto tempo prima, e per alcune circostanze rimasta sospesa, è stata terminata sotto la direzione di Babbage. Oltre queste opere, Maseres ha ristampato ancora il trattato di Giacomo Bernoulli sulle permutazioni e sulle combinazioni, che forma il primo libro dell' *Ars conjectandi* di questo matematico. A sue spese pure fu stampata la traduzione fatta da Colson delle *Istituzioni analitiche* di Gaetana Agnesi, e il trattato latino di Hales sulle flussioni.

MASKELYNE (NÉVIL), astronomo reale d'Inghilterra, ed uno dei principali osservatori del secolo XVIII, nacque a Londra nel 1732. Il desiderio di dedicarsi specialmente all'astronomia gli fu, dicesi, inspirato dall'ecclisse solare del 1748 che fu di dieci digiti a Londra; e per riuscirvi si applicò indefessamente allo studio della geometria, dell'algebra e dell'ottica. Strinse amicizia con Bradley, e sulle osservazioni di questo grande astronomo calcolò quella tavola di refrazioni che per tanti anni fu sola adoperata. Inviato nel 1761 all'isola di S. Elena per osservarvi il passaggio di Venere sul disco del sole, non potè per la contrarietà del tempo adempire alla sua commissione, ma mise a profitto il suo viaggio per esperimentare tutti i metodi proposti pel problema delle longitudini. I suoi confronti confermarono pienamente le osservazioni fatte da La Caille nel di lui viaggio al Capo di Buona Speranza; e ritornato in Inghilterra pubblicò la sua *Guida del marinaro* (*British mariner's guide*, 1763). Proponeva in essa all'Inghilterra di adottare il progetto d'almanacco nautico ideato da La Caille. A forza di perseveranza, e per la considerazione che gli meritarono altri lavori, gli riuscì alla fine di far approvare tale impresa, e incaricato di dirigere i calcoli pubblicò per quarantacinque anni tale utile effemeride, imitata poi da tutte le nazioni cha hanno marina (*The Nautical Almanac*). Pubblicò le tavole che potevano agevolarne l'uso a tutti i naviganti (*Tables requisite to be used with the nautical ephemeris*, 1781). Nel 1765 succeduto era a Bliss nell'Osservatorio di Greewich; e colà per quarantasette anni osservò il cielo con un'assiduità e con un'esattezza di cui avevansi pochi esempj.

Maskelyne ha fatto poco per la teoria della scienza, ma ha fatto moltissimo per il perfezionamento degli strumenti e dei metodi di osservazione. Fu il primo a notare scrupolosamente e con una esattezza mirabile gl'istanti precisi del passaggio degli astri al meridiano: s'impose la legge di osservarli tutti ai cinque fili del suo canocchiale: è a lui dovuta la mobilità che seppe dare all'oculare per condurlo successivamente dirimpetto a ciascuno di tali fili, premunendosi così contro qualunque parallasse: a lui si deve pure, pei quarti di circolo, pei settori e per gli altri strumenti astronomici, una sospensione del filo a piombo molto migliore e che oggi è generalmente adottata: finalmente fu egli il primo a darci l'esempio di dividere un secondo di tempo in dieci parti; non già ch'ei sperasse di non ingannarsi mai di uno o due decimi, ma è pressochè impossibile che i cinque errori operino nello stesso senso; i fili debbono correggersi l'un l'altro; ed è poi cosa di fatto che la media aritmetica tra le cinque osservazioni, paragonata coll'osservazione fatta al filo di mezzo, vi concorda sempre con mirabile esattezza. Tutti i prefati mezzi uniti, imitati dopo da tutti gli astronomi, condussero l'arte dell'osservazione ad una precisione cui sembra quasi impossibile di superare. Tali obbligazioni, già sì importanti, non sono le sole che si abbiano a Maskelyne; prima di lui, tutte le osservazioni rimanevano sepolte

negli Osservatorj ove erano state fatte, erano come non avvenute, e perdevano tutta l'importanza che potevano avere nell'interesse della scienza. Egli ottenne dal consiglio della Società Reale di Londra che tutte le sue osservazioni fossero stampate per fascicoli, e d'anno in anno. Tali fascicoli formano presentemente quattro volumi in-fol., che uniti ai due volumi delle osservazioni di Bradley, pubblicate anch'esse quarant'anni dopo la morte di questo astronomo per le reiterate istanze di Maskelyne, formano una raccolta preziosa, la quale, se per qualche gran rivoluzione le scienze si perdessero, basterebbe a somministrare i materiali per ricostruire l'edifizio della moderna astronomia. Maskelyne si applicò ancora a determinare l'attraziona delle montagne: per le sue esperienze scelse la montagna Schehallien nella contea di Perth, nella Scozia, e ne concluse che la densità della montagna doveva essere pressochè la metà della densità media della terra: si avevano già molti altri riscontri che la densità deve andar crescendo dalla circonferenza al centro. Un'altra conclusione che trasse dalle sue osservazioni è che la densità della terra deve essere circa quattro in cinque volte quella dell'acqua. Col mezzo di esperienze di un genere affatto diverso, Cavendish la trovò dipoi cinque volte e mezzo; ed in ricerche tanto delicate difficilmente si sarebbe aspettato un accordo più soddisfacente. Maskelyne morì il 9 Febbrajo 1811, in età di settantotto anni. Oltre le opere di sopra citate, ha pubblicato parecchie memorie nelle *Transazioni filosofiche* e nel *Nautical Almanac:* e fu pure editore delle tavole lunari di Tobia Mayer, alla vedova del quale fece accordare dal governo inglese una ricompensa di 5000 lire sterline.

MASON (Carlo), astronomo inglese, era assistente di Bradley nell'Osservatorio reale di Greenwich, allorchè le tavole lunari di Mayer furono inviate a Londra pel premio delle longitudini. Si trattava di valutare il pregio di queste tavole; e poichè esistevano 1220 osservazioni esattissime fatte da Bradley dal 1750 al 1760, si concepì la speranza non solo di verificare ma di migliorare pur anco l'opera di Mayer. Mason, che fu incaricato di tale lavoro dalla *Commissione delle longitudini*, introdusse nelle prefate tavole parecchie equazioni indicate da Mayer, ma di cui questi per mancanza di osservazioni convenienti non aveva potuto determinare l'esatto valore; vi fece inoltre alcune leggere correzioni, e Maskelyne pubblicando il lavoro di Mason col titolo di *Mayer's Lunar tables improved by M. Charles Mason, published by order of the commissioners of longitudes*, Londra 1787, tenne di potere assicurare che in nessun caso l'errore delle tavole così corrette oltrepasserebbe i 30″. Mason, inviato in America insieme con Dixon per determinare i confini della Pensilvania e del Maryland, colse questa occasione per misurare un grado del meridiano, di cui la latitudine media è di 39° 12′. Tale operazione è unica nel suo genere, almeno tra i gradi moderni; imperocchè non ha per base alcun triangolo. I due astronomi segnarono sulla superficie della terra la loro linea meridiana, e la misurarono colla catena da un'estremità all'altra. Non avevano da attraversare che terre incolte o foreste, nelle quali erano padroni di fare le tagliate convenienti. Mason morì in Pensilvania nel mese di Febbrajo 1787. Il suo lavoro era stato inviato a Londra, ove fu calcolato da Maskelyne, di cui la memoria comparve nelle *Transazioni filosofiche* del 1768. Maskelyne trovò tale grado di 363763 piedi inglesi, cui valutò 56904 $\frac{1}{2}$ tese di Parigi, cioè più corto di circa 50 tese di quello resultato dalle operazioni fatte in Francia per l'istituzione del sistema metrico. Cavendish ha sospettato che l'attrazione delle montagne Alleghany dall'una parte, e dall'altra la minore attraziona del mare abbiano potuto diminuire tale grado di 60 in 100 tese.

MASSA (*Fis. Mat.*). I fisici indicano sotto il nome di *Massa* la quantità assoluta di materia della quale un corpo è composto. Questa quantità varia col volume del corpo, ma non è ad esso proporzionale, poichè un corpo può

contenere una piccolissima quantità di materia sotto un volume grandissimo, e *vice-versa*; ciò proviene dai vuoti o interstizj chiamati *pori*, i quali separano le molecole dei corpi. Considerando gli elementi primitivi dei corpi come punti materiali uguali tra loro, possiamo dire che due corpi di uno stesso volume, quello che ha maggior massa contiene un maggior numero di elementi; questo numero essendo indefinitamente grande non potrebbe essere espresso, e non possiamo misurare direttamente la massa di un corpo, ma possiamo trovare, come lo vedremo, il suo rapporto con la massa degli altri corpi.

Osserviamo che ciascun punto materiale di un corpo è sottoposto alla forza della gravità, e che questa forza è rappresentata dalla velocità g che un corpo acquista, nel primo secondo della sua libera caduta alla superficie della terra. L'intensità della resultante di tutte le forze parziali che agiscono sopra un numero qualunque M di punti materiali legati tra loro, e che formano un corpo, è uguale alla somma di queste forze, vale a dire ad $M \times g$ e siccome questa resultante è d'altra parte uguale al peso del corpo, si ha, P indicando il *peso* (*Vedi* QUESTA PAROLA), la relazione

$$P = M \times g.$$

Qualunque altro corpo la cui massa fosse M' e il peso P' dando ugualmente

$$P' = M' \times g,$$

ne resulta

$$P : P' = M \times g : M' \times g = M : M';$$

vale a dire che *le masse di due corpi sono tra loro come i loro pesi*; poichè i numeri M ed M' dei punti materiali sono, per quello che abbiamo detto, le masse respettive dei corpi i cui pesi sono P e P'. È facile vedere che la nozione di *massa* non ha altro valore reale che quello che essa deduce dalla concezione trascendente di *forza*.

La relazione $P = Mg$, donde si deduce $M = \frac{P}{g}$, permette di sostituire alla massa il peso in tutte le questioni di meccanica, e per conseguenza di valutare in numeri delle quantità che rimarrebbero indeterminate senza questa circostanza.

Se vogliamo, per esempio, valutare la velocità comune che avranno dopo l'urto due corpi non elastici, i cui pesi espressi in chilogrammi sono P e P', e i quali s'incontrano direttamente con le velocità respettive v e v'; si sa (*Vedi* URTO) che nel caso dell'urto diretto, quando i corpi si muovono nel medesimo senso, si ha l'espressione generale

$$u = \frac{Mv + M'v'}{M + M'},$$

u indicando la velocità cercata e M ed M' le masse dei mobili. Ponendo dunque $M = \frac{P}{g}$, $M' = \frac{P'}{g}$, e sostituendo, viene, riducendo,

$$u = \frac{Pv + P'v'}{P + P'};$$

donde si vede che basta sostituire le masse con i pesi. Se si avesse, per esempio

$$P = 12^{ch.}, \quad P' = 8^{ch.}, \quad v = 1^{m},5, \quad v' = 2^{m},$$

si troverebbe

$$u = \frac{12 \times 1,5 + 8 \times 2}{12 + 8} = 1^m,7;$$

vale a dire che dopo l'urto i due corpi avrebbero una velocitè comune di $1^m,7$ per secondo. Se si trattasse di paragonare le *quantità di moto* dei due mobili avanti l'urto, si comincerebbe da avere, per la loro valutazione,

$$Mv = \frac{Pv}{g} = \frac{1}{g} . 12 \times 1,5 = \frac{1}{g} . 18,$$

$$M'v' = \frac{P'v'}{g} = \frac{1}{g} . 8 \times 2 = \frac{1}{g} . 16,$$

e, senza aver bisogno di tener conto del fattore $\frac{1}{g}$, se ne concloderebbe che le quantità di moto dei due mobili stanno tra loro come 18 : 16, ovvero come 9 : 8. Dopo l'urto, la qoantità di moto del primo mobile sarebbe

$$\frac{1}{g} 12 \times 1,7 = \frac{1}{g} 20,4;$$

e quella del secondo

$$\frac{1}{g} 8 \times 1,7 = \frac{1}{g} 13,6.$$

Possiamo verificare questi resoltamenti di calcolo osservando che, poichè la somma delle quantità di moto dev'essere la stessa avanti e dopo l'urto, bisogna che si abbia l'ugnaglianza

$$\frac{1}{g} 18 + \frac{1}{g} 16 = \frac{1}{g} 20,4 + \frac{1}{g} 13,6,$$

la quale si riduce infatti all'identità

$$\frac{1}{g} 34 = \frac{1}{g} 34.$$

Questi esempj bastano per indicare il metodo da seguire in tutti i casi.

Il rapporto della massa di un corpo al suo volume è ciò che si chiama la sua densità (*Vedi* DENSITA'). Possiamo ancora, nelle questioni di meccanica sostituire il prodotto del volume nella densità alla massa; e reciprocamente.

MASSE DEI PIANETI. Le masse dei pianeti che hanno dei satelliti possono trovarsi assai facilmente, almeno per approssimazione, nel modo seguente: sia T il tempo della rivoluzione siderale del pianeta intorno del sole, a la sua distanza media, m la massa del pianeta ed M quella del sole, si avrà (*Vedi* RIVOLUZIONE)

$$T = \frac{2\pi a^{\frac{3}{2}}}{M^{\frac{1}{2}}} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{m}{M}\right).$$

Sia ora t il tempo della rivoluzione siderale di un satellite intorno del suo pianeta, a' la sua media distanza ed m' la sua massa, si avrà egualmente

$$t = \frac{2\pi a'^{\frac{3}{2}}}{m^{\frac{1}{2}}}\left(1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{m'}{m}\right).$$

Trascurando le frazioni piccolissime $\frac{1}{2}\cdot\frac{m}{M}$, e $\frac{1}{2}\cdot\frac{m'}{m}$, queste equazioni divengono

$$T = \frac{2\pi a^{\frac{3}{2}}}{M^{\frac{1}{2}}}, \quad t = \frac{2\pi a'^{\frac{3}{2}}}{m^{\frac{1}{2}}},$$

e dividendole termine a termine si ottiene

$$\frac{T}{t} = \left(\frac{m}{M}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{a}{a'}\right)^{\frac{3}{2}},$$

donde, prendendo la massa del sole per unità, si ha

$$m = \left(\frac{a'}{a}\right)^3\left(\frac{T}{t}\right)^2.$$

Con questa formula che si è potuta ottenere una prima approssimazione delle masse di Giove, di Saturno e di Urano. Quella della Terra, il cui valore à il più importante, poichè essa deve in seguito servire a determinare comparativamente la massa del sole presa per unità, è stata calcolata in un modo più rigoroso, col seguente metodo. Conoscendo lo spazio che un corpo percorra liberamente nel primo secondo della sua caduta alla superficie della Terra, possiamo mediante la legge d'attrazione calcolare lo spazio che esso descriverebbe nel medesimo tempo se esso fosse trasportato ad una distanza eguale a quella della Terra dal Sole; ma da un'altra parte si può ancora calcolare lo spazio che la Terra descrive in un secondo per avvicinarsi al Sole, poichè questo spazio è il seno-verso dell'arco che essa percorre nella sua orbita in un secondo (*Vedi* Centrale e Gravità): ora, lo spazio descritto dal corpo trasportato alla distanza dal Sole sta allo spazio descritto dalla Terra, come la forza d'attrazione della Terra sta alla forza d'attrazione del Sole, o come la massa della Terra sta a quella del Sole, giacchè l'attrazione sta in ragione diretta delle masse.

Le masse di Venere e di Marte che sfuggono ai due precedenti metodi sono state valutate mediante le perturbazioni che esse producono nei movimenti della Terra. Finalmente la massa di Mercurio è stata dedotta dalla sua densità, nell'ipotesi che le densità dei pianeti siano reciprocamente proporzionali alle loro medie distanze dal Sole, ipotesi che soddisfa con sufficiente esattezza alle densità respettive della Terra, di Giove, e di Saturno. Quanto alle masse dei pianeti secondarj o satelliti, quella della Luna è stata dedotta dal fenomeno delle *maree* (*Vedi* Marea), e le masse dei satelliti di Giove sono state calcolate per mezzo delle perturbazioni che essi esercitano gli uni sopra gli altri.

Tutte queste masse si trovano alla parola Elemento.

MASSIMI E MINIMI. (*Alg. e Geom.*). S'indicano sotto questi nomi i più grandi e i più piccoli valori di una funzione di quantità variabili; e i processi con l'aiuto dei quali si determinano questi valori formano il METODO DEI MASSIMI E MINIMI. Se, per esempio, fx indica una funzione qualunque della quantità variabile x, e che a sia un valore particolare di x, che renda il valore della funzione fx il più grande o il più piccolo possibile, fa sarà il *massimo* o il *minimo* di fx.

Per considerare il metodo dei *massimi* e *minimi* in un modo puramente algebrico, osserviamo che se fx diventa un *massimo* facendovi $x=a$, qualunque altro valore di x maggiore o minore di a, sostituito invece di x, deve dare per fx un valore *più piccolo* di quello che resulta da $x=a$, e che se, al contrario fx, diventa un *minimo* per questo valore a di x, qualunque altro valore più grande o più piccolo di a, deve dare per fx un valore *più grande* di quello che resulta da $x=a$. Vale a dire che nel caso del *massimo* si deve avere, h essendo una quantità qualunque,

$$fa > f(a \pm h) \ldots\ldots (1),$$

e in quello del *minimo*

$$fa < f(a \pm h) \ldots\ldots (1).$$

Ora, l'oggetto principale del metodo in questione, dipende dalla determinazione di questo valore di a.

Osservando, che l'oggetto generale del CALCOLO DELLE DIFFERENZE è esattamente la generazione degli accrescimenti che subisce una funzione in seguito degli accrescimenti che ricevono le sue variabili, è facile concludere che il metodo dei *massimi* e *minimi* non è che un'applicazione dei processi di questo calcolo, e che questi processi impiegati in un modo conveniente debbono, in tutti i casi, fare ottenere la determinazione del valore particolare della variabile, che rende una funzione proposta un massimo o un minimo, quando questa funzione è capace di tali valori. Infatti, se supponiamo fx, giunta ad un tale stato di grandezza che essa non possa più ricevere alcuna variazione in *più* o in *meno*, la sua differenziale dfx, che è l'espressione generale della variazione che essa può subire in *più* o in *meno* inseguito della variazione infinitamente piccola che si fa provare alla variabile x, deve essere zero, così

$$dfx = 0 \ldots\ldots (2)$$

è l'equazione di condizione del massimo o del minimo, e il valore di x, se esso esiste, e che possa soddisfare a quest'equazione, è quello che rende la funzione proposta un massimo o un minimo.

Proponiamoci, per esempio, di trovare un valore di x, che renda la funzione $2ax - x^2$ un massimo o un minimo; differenziando questa funzione abbiamo

$$d(2ax - x^2) = 2adx - 2xdx$$

e, per conseguenza, l'equazione di condizione è

$$2adx - 2xdx = 0$$

ovvero, semplicemente, dividendo i due membri per dx,

$$2a - 2x = 0;$$

donde si deduce $x = a$. Questo valore sostituito nella funzione proposta la rende uguale ad a^2.

Per sapere ora se a^2 è il massimo o il minimo della funzione $2ax - x^2$; sostituiamo successivamente in questa funzione $a+h$, e $a-h$, in luogo di x, h essendo una quantità qualunque, avremo per resultamenti i due valori

$$2a(a+h)-(a+h)^2=a^2-h^2,$$
$$2a(a-h)-(a-h)^2=a^2-h^2,$$

i quali essendo tutti due più piccoli di a^2, ci fanno conoscere che a^2 è un massimo.

Le condizioni (1) che distinguono il massimo dal minimo, danno luogo ad una considerazione generale importantissima, poichè essa comincia dall'abbreviare le operazioni, e quindi essa serve a riconoscere la possibilità stessa dell'esistenza dei massimi e minimi in una funzione proposta. Ecco questa considerazione: se si sviluppa mediante la formula del Taylor le funzioni $f(x+h)$ e $f(x-h)$, si ottiene (*Vedi* Differenza) le due espressioni

$$f(x+h)=fx+\frac{dfx}{dx}\cdot\frac{h}{1}+\frac{d^2fx}{dx^2}\cdot\frac{h^2}{1.2}+\frac{d^3fx}{dx^3}\cdot\frac{h^3}{1.2.3}+\text{ec.}\ldots\ldots$$

$$f(x-h)=fx-\frac{dfx}{dx}\cdot\frac{h}{1}+\frac{d^2fx}{dx^2}\cdot\frac{h^2}{1.2}-\frac{d^3fx}{dx^3}\cdot\frac{h^3}{1.2.3}+\text{ec.}\ldots\ldots$$

Ora, mediante le condizioni (1), perchè fx sia un massimo o un minimo bisogna che questi due sviluppi siano tutti due più piccoli o tutti due più grandi di fx, il che prima di tutto non può generalmente aver luogo che quando si dà ad x un valore che renda $\frac{dfx}{dx}=0$, il che è la condizione (1); e che quindi questo medesimo valore di x, messo in $\frac{d^2fx}{dx^2}$, renda questa quantità negativa nel primo caso, e positiva nel secondo. Infatti, possiamo supporre sempre la quantità arbitraria h abbastanza piccola, perchè ciascuno dei termini di questi sviluppi sia più grande della somma di tutti quelli che lo seguono, e allora il *segno* che deve affettare una tal somma è necessariamente lo stesso di quello del suo primo termine. Ora il segno di $\frac{dfx}{dx}\cdot\frac{h}{1}$ essendo positivo nel primo sviluppo e negativo nel secondo, la somma di tutti i termini, a cominciare da questo, sarà similmente positiva nel primo sviluppo e negativa nel secondo, dimodochè se il termine $\frac{dfx}{dx}\cdot\frac{h}{1}$, ovvero il suo coefficiente $\frac{dfx}{dx}$ non è zero, $f(x-h)$ sarà più piccola di fx, e $f(x+h)$ più grande, vale a dire che non potrà esservi nè massimo nè minimo. Ma se $\frac{dfx}{dx}=0$, gli sviluppi di sopra si riducono a

$$f(x+h)=fx+\frac{d^2fx}{dx^2}\cdot\frac{h^2}{1.2}+\frac{d^3fx}{dx^3}\cdot\frac{h^3}{1.2.3}+\text{ec.}\ldots\ldots$$

$$f(x-h)=fx+\frac{d^2fx}{dx}\cdot\frac{h^2}{1.2}-\frac{d^3fx}{dx^3}\cdot\frac{h^3}{1.2.3}+\text{ec.}\ldots\ldots$$

e allora il *segno* della somma di tutti i termini che seguono fx, dovendo essere lo stesso di quello del primo, $\frac{d^2fx}{dx^2}\cdot\frac{h^2}{1\,.\,2}$, ovvero del suo coefficiente, $\frac{d^2fx}{dx^2}$, se questo coefficiente è positivo $f(x+h)$ e $f(x-h)$ saranno tutte due più grandi di fx, il che è il caso del minimo, nel mentre che se esso è negativo, $f(x+h)$ e $f(x-h)$ saranno tutte due più piccole di fx, che è il caso del massimo.

Se si ha, per esempio, $fx=ax^3-x^4$, prendendo le due prime derivate differenziali si trova

$$\frac{dfx}{dx}=3ax^2-4x^3,$$

$$\frac{d^2fx}{dx^2}=6ax-12x^2.$$

La prima, eguagliata a zero, dà l'equazione

$$3ax^2-4x^3=0,$$

la quale può essere soddisfatta dai valori di $x=0$, e $x=\frac{3}{4}a$; sostituendo questi valori nella seconda essa dà

$$\text{Per } x=0,\quad \frac{d^2fx}{dx^2}=0,$$

$$\text{Per } x=\frac{3}{4}a,\quad \frac{d^2fx}{dx^2}=-\frac{9a^2}{4};$$

il valore $\frac{3}{4}a$, corrisponde dunque al massimo della funzione ax^3-x^4.

Quando un valore della variabile x, somministrato dall'equazione $dfx=0$, rende $\frac{d^2fx}{dx^2}=0$, esso non può corrispondere a un massimo o a un minimo che nel caso che esso renda ancora $\frac{d^3fx}{dx^3}=0$, allora il segno di $\frac{d^4fx}{dx^4}$ determina la natura del valore della funzione fx, vale a dire, che questa quantità è un massimo se $\frac{d^4fx}{dx^4}$, è negativa, e un minimo nel caso contrario. In generale, quando la prima derivata differenziale, la quale non si annulla sostituendo in luogo di x i valori dati dell'equazione $dfx=0$, è d'ordine pari, vi è massimo se questa derivata è negativa e minimo se essa è positiva

Applichiamo questa teoria ad alcuni problemi numerici e geometrici. Si abbia la funzione

$$fx=3a^2x^3-b^4x+c,$$

si trova differenziando

$$\frac{dfx}{dx}=9a^2x^2-b^4,$$

$$\frac{d^2fx}{dx^2}=18a^2x;$$

la prima derivata uguagliata a zero, dà

$$9a^2x^2-b^4=0, \quad \text{donde} \quad x^2=\frac{b^4}{9a^2}$$

e

$$x=\pm\sqrt{\left[\frac{b^4}{9a^2}\right]}=\pm\frac{b^2}{3a},$$

questi due valori di x essendo messi successivamente nella seconda derivata la rendono

$$\text{per } x=+\frac{b^2}{3a}, \quad +6ab^2$$

$$\text{per } x=-\frac{b^2}{3a}, \quad -6ab^2.$$

la prima può dunque rendere il valore della funzione proposta un minimo, e la seconda, un massimo; ed abbiamo

$$fx=c+\frac{2b^6}{9a}=massimo$$

$$fx=c-\frac{2b^6}{9a}=minimo$$

Problema. *Di tutti i triangoli costruiti sopra una stessa base e che hanno lo stesso perimetro, determinare quello la cui superficie è la più grande.*

Indichiamo con a la base comune, con $2p$ il perimetro, e con x uno dei due altri lati; il terzo lato sarà $2p-a-x$. Ora l'espressione della superficie di un triangolo qualunque con l'aiuto dei suoi tre lati è

$$S=\sqrt{\left[p\left(p-a\right)\left(p-b\right)\left(p-c\right)\right]},$$

p indicando la metà del perimetro ed a, b, c ciascuno dei lati (*Vedi* Triangolo); abbiamo dunque in questo caso

$$S=\sqrt{\left[p\left(p-a\right)\left(p-x\right)\left(a+x-p\right)\right]}\ldots\ldots(3).$$

Eseguendo la moltiplicazione dei fattori del secondo membro, verrà

$$S=\sqrt{\left[2ap^3-a^2p^2-p^4+\left(a^2p-3ap^2+2p^3\right)x-\left(p^2-ap\right)x^2\right]}.$$

Così, facendo per abbreviare

$$2ap^3-a^2p^2-p^4=A,$$
$$a^2p-3ap^2+2p^3=B,$$
$$p^2-ap=C;$$

la funzione di cui si tratta di trovare il massimo, sarà

$$S=\left[A+Bx-Cx^2\right]^{\frac{1}{2}},$$

e differenziando si otterrà

$$dS=\frac{Bdx-2Cxdx}{2\sqrt{[A+Bx-Cx^2]}}.$$

Dividendo per dx, ed uguagliando a zero la derivata, viene

$$B-2Cx=0,$$

donde

$$x=\frac{1}{2}\frac{B}{C}=\frac{1}{2}\frac{a^2p-3ap^2+2p^3}{p^2-ap}$$

$$=\frac{1}{2}\frac{a^2-3ap+2p^2}{p-a}=\frac{1}{2}\left(2p-a\right).$$

Il lato x deve dunque essere uguale alla metà del perimetro diminuito di a, vale a dire che i due altri lati debbono essere uguali e che il triangolo cercato è isoscele.

Possiamo ottenere questo risultamento in un modo molto più sollecito, impiegando un processo indiretto di differenziazione che qui sotto facciamo conoscere, perchè generalmente esso è applicabile alle funzioni composte di fattori.

Eleviamo alla seconda potenza i due membri dell' eguaglianza (3), essa diventerà

$$S^2=p(p-a)(p-x)(a+x-p);$$

prendiamo ora i logaritmi naturali dai due membri di quest' ultima uguaglianza, avremo

$$2LS=Lp+L(p-a)+L(p-x)+L(a+x-p);$$

differenziando, osservando che Lp e $L(p-a)$ sono quantità costanti, troveremo

$$\frac{2dS}{S}=\frac{-dx}{p-x}+\frac{dx}{a+x-p},$$

e, per la derivata differenziale,

$$\frac{dS}{dx}=\frac{S}{2}\left[\frac{1}{a+x-p}-\frac{1}{p-x}\right];$$

eguagliando a zero, avremo

$$\frac{1}{a+x-p}-\frac{1}{p-x}=0,$$

donde

$$a+x-p=p-x;\quad e\quad x=\frac{1}{2}(2p-a).$$

È facile dedurre da questa proposizione, come corollario, che *di tutti i triangoli isoperimetri, quello che ha la più grande superficie è equilatero.*

Non possiamo entrare in maggiori particolarità sopra l' importante metodo dei *massimi* e *minimi*; ciò che precede contiene i suoi principii fondamentali, ma

il loro sviluppo dev' essere studiato nell' opere sul calcolo differenziale. *Vedi* il gran trattato del Lacroix: *Vedi* ancora la *geometria* del Simpson per i *massimi* e *minimi* delle figure geometriche.

MATEMATICHE. Questa parola, che deriva dalla voce greca μαθησις, *scienza*, *disciplina*, e che in oggi non si usa quasi più che nel plurale, perchè le diverse parti della scienza che in origine essa indicava hanno ricevuto demarcazioni precise, o sono divenute altrettante scienze particolari, dimostra nella sua etimologia, la Scienza, l' importanza e l' idea nobile e giusta che gli antichi annettevano alle cognizioni alle quali l' avevano data.

La *matesi*, o la *scienza*, era infatti presso i Greci la riunione di tutte le cognizioni evidenti e *certe*: poche nozioni di aritmetica, di geometria, d' astronomia, di musica, ed in seguito di meccanica e di ottica, costituivano tutto il suo regno: non fu che dopo lunghi lavori che ognuna di queste parti ricevette sufficiente sviluppo da costituire per sè stessa un corpo di scienza a parte. Non esamineremo adesso come abbia potuto effettuarsi una tale separazione, e per qual rapido progresso siasi elevato il vasto e maestoso edifizio delle matematiche moderne: questa parte storica delle scienza si trova, se non trattata, almeno sufficientemente accennata nella nostra Introduzione, non meno che in un gran numero di articoli particolari: noi dobbiamo perciò limitarci adesso a considerare la scienza in sè stessa.

I moderni hanno definito le matematiche in generale: la *scienza dei rapporti delle quantità*; questa definizione è viziosa o almeno incompleta, perchè per potersi occupare del *rapporto* delle quantità, bisogna prima che queste quantità esistano o siano generate: ora le leggi della generazione delle quantità sono le sole che rendono possibili le leggi della loro comparazione o dei loro rapporti, e formano così la parte più essenziale delle scienza. Una definizione più esatta, sebbene più antica, è quella che fa delle matematiche la *scienza delle quantità*: ma essa è lungi dal dare un' idea precisa dell' alta importanza del loro oggetto. Nulladimeno, per quanto ristretta possa sembrare quest' ultima definizione, cercheremo di dimostrare, sviluppandola, che essa comprende implicitamente il concetto del vero fine delle matematiche, e che per conseguenza è migliore di quella che si è voluto sostituirle.

La *quantità*, presa in generale, è una legge *formale* dell' Intelligenza, in virtù della quale noi concepiamo successivamente lo stesso oggetto come *uno* o *più*, come *unità* o *moltitudine*, vale a dire come formante *un* insieme composto di *parti*. Esaminando con attenzione le *intuizioni* che abbiamo degli oggetti sensibili, scorgiamo facilmente che la rappresentazione delle parti rende sola possibile e precede necessariamente quella del tutto. Per esempio, noi non possiamo rappresentarci una linea, comunque piccola possa essere, senza descriverla col pensiero, vale a dire senza produrne successivamente tutte le parti da un punto ad un altro, e senza render così sensibile questa intuizione. Lo stesso deve dirsi di ciascuna parte del tempo, anco la più piccola Noi non possiamo rappresentarcela che come la progressione successiva da un istante ad un altro, donde resulta finalmente un complesso di parti del tempo, una *quantità* di tempo determinato.

In forza di questa legge, tutti i fenomeni del mondo fisico, considerati nella loro *forma*, sono scorti primieramente come aggregati di parti date primitivamente, o come complessi suscettibili di *più* e di *meno*, di *aumento* e di *diminuzione*: tutti questi fenomeni sono dunque *quantità*, e per conseguenza la Scienza delle quantita' abbraccia l' universalità dei fenomeni o le Leggi della forma del mondo fisico. Tale infatti è l' oggetto elevato delle matematiche.

Per meglio precisare questa deduzione, osserviamo che lo *spazio* e il *tempo*,

queste condizioni primordiali del mondo fisico, sono in sè stesse *quantità*, in quanto che niuna delle loro parti può esser l'oggetto di una intuizione senza esser contenuta dentro certi limiti, che sono o punti o istanti; in guisa che questa parte non è anch' essa che uno spazio o un tempo, e che lo spazio non si compone che di spazj, il tempo di tempi. Ora, i fenomeni del mondo fisico, cioè gli oggetti esterni e le rappresentazioni interne che ne abbiamo, ci compariscono necessariamente nel tempo e nello spazio, perchè sono le intuizioni pure del del tempo e dello spazio che servono di base a tutte le intuizioni che abbiamo degli oggetti, e particolarmente il tempo per tutti gli oggetti fisici in generale, e lo spazio per tutti gli oggetti fisici esterni; il tempo e lo spazio sono dunque le *forme* del mondo fisico, ed è nel considerarli in questa guisa, vale a dire non ciò che sono in sè stessi, astrazion fatta dagli oggetti, ma come appartenenti agli oggetti o ai fenomeni fisici dati *a posteriori*, che il più gran metafisico della nostra epoca ha così bene definito le matematiche: LA SCIENZA DELLE LEGGI DEL TEMPO E DELLO SPAZIO.

Per mezzo di questa definizione o di questa determinazione dell'oggetto generale delle matematiche, facile ci diviene l'esporre la classificazione dei diversi rami della scienza. Osserviamo primieramente che le leggi del tempo e dello spazio possono esser considerate in sè stesse, e nei fenomeni fisici ai quali si applicano. La considerazione *in abstracto* di queste leggi è l'oggetto delle MATEMATICHE PURE, la loro considerazione *in concreto*, quello delle MATEMATICHE APPLICATE.

Occupiamoci primieramente delle matematiche pure, dalle quali dipendono necessariamente le altre. Per ciò che precede, il loro oggetto generale è la quantità considerata nel *tempo* e nello *spazio*: ora la legge formale della *quantità* applicata al tempo, dà la *successione degl' istanti*, ossia il NUMERO, vale a dire il concetto dell' *unità* sintetica della *diversità* di una intuizione omogenea; applicata allo spazio, essa dà il concetto della *congiunzione dei punti*, ossia l' ESTENSIONE. I *numeri* e l' *estensione* formano dunque due determinazioni particolari dell' oggetto generale delle matematiche pure, e danno così origine a due parti distinte di questa scienze. La prima è l' ALGORITMIA, o la *scienza dei numeri*; la seconda, la GEOMETRIA o la *scienza dell' estensione*.

All' articolo GEOMETRIA abbiamo dato la classificaziona delle diverse scienze di cui si compone questo ramo fondamentale delle matematiche pure; ci resta qui a parlare della classificazione delle diverse parti dell' ALGORITMIA, che non abbiamo fatto che indicare nelle *Nozioni preliminari*, e alla parola ALGEBRA.

L' ALGORITMIA si divide in due rami principali, uno dei quali ha per oggetto i numeri considerati in generale, ossia le *leggi dei numeri*, ed è l' ALGEBRA; o l' altro ha per oggetto i numeri considerati in particolare, cioè i *fatti dei numeri*, ed è l' ARITMETICA. *Vedi* ALGEBRA *e* ARITMETICA.

I fatti dei numeri essendo subordinati alle loro leggi, l' aritmetica non ha altre suddivisioni che quelle che essa prende dall' algebra: noi dunque non ci occuperemo che di quest' ultima.

1. I numeri potendo esser considerati sotto il rapporto della loro costruzione o della loro generazione, e sotto quello della loro relazione o della loro comparazione, avremo così due specie di leggi distinte, cioè: le leggi della *generazione dei numeri*, e le leggi della *comparazione dei numeri*.

2. La generazione dei numeri si presenta anch' essa sotto due aspetti differenti: nel primo, la generazione di un numero è data da una costruzione individuale e indipendente che fa conoscere la sua *natura*; nel secondo, la generazione di tutti i numeri è data da una costruzione universale, che fa conoscere la loro *misura*, o la loro valutazione; per esempio, l' espressione $x = \sqrt{a}$ ci dà

la *natura* del numero x, mentre l'espressione equivalente

$$x = 1 + \frac{1}{2}(a-1) - \frac{1}{8}(a-1)^2 + \frac{1}{16}(a-1)^3 - \text{ec.} \; \ldots \; (m).$$

riguarda la *misura* del numero x, e ci dà la sua *valutazione*. Ora, la forma $\sqrt{a}$ si riferisce unicamente ai numeri che sono le *radici* di altri numeri, e per conseguenza è un modo individuale di generazione; mentre la forma $A+Ba+Ca^2+$ ec., alla quale si riduce l'espressione (m), può riferirsi ad un numero qualunque, ed è perciò un modo universale di generazione.

Ciò che abbiamo detto dei due aspetti sotto i quali si presenta la generazione dei numeri può applicarsi egualmente alla loro comparazione; così la riunione di tutti i modi individuali e indipendenti della generazione e della comparazione dei numeri forma un ramo particolare dell'algebra, e la riunione di tutti i modi universali di questa generazione e di questa comparazione forma un altro ramo. Wronski, al quale è dovuta questa importante distinzione, chiama le prima Teoria e la seconda Tecnia. Noi conserveremo queste denominazioni.

3. La teoria dell'algebra ha dunque per oggetto le leggi individuali e indipendenti della generazione e della comparazione delle quantità numeriche. Ora, tra queste leggi bisogna distinguere quelle che costituiscono gli *elementi* di tutte le operazioni numeriche possibili, da quelle che costituiscono la *riunione sistematica* di questi elementi. Così, si presentano primieramente tre algoritmi o tre modi primitivi elementari di generazione: le loro forme sono

$$1.^\circ \ldots A+B=C; \quad 2.^\circ \ldots A\times B=C; \quad 3.^\circ \ldots A^B=C;$$

e queste forme generano successivamente i *numeri interi*, i *numeri frazionarj*, i *numeri irrazionali*, e di più ci conducono ai numeri detti *immaginarj*: se ne deduce ancora la distinzione dei *numeri positivi* e *negativi*, osservando la funzione differente del numero B nei due rami $A+B=C$, $C-B=A$ del primo algoritmo, funzione che riguarda la *qualità* di questo numero e gli dà uno stato *positivo* e *negativo*.

4. Questi algoritmi primitivi, essenzialmente differenti, sono dunque gli *elementi* della scienza, che non può trarre che da essi soli i materiali delle sue costruzioni facendoli derivare dalle loro combinazioni; ma fra tutti gli algoritmi derivati, il cui numero è indefinito, ve ne sono due la cui derivazione è *necessaria*, per la possibilità stessa della scienza, e che questa necessità colloca nella classe degli *algoritmi elementari*, e sono questi la Numerazione e le Facoltà.

La *numerazione* ha per oggetto la generazione di un numero, mediante la combinazione dei due primi algoritmi, chiudendo questi algoritmi componenti tra limiti dati, in modo però che possa ottenersi in tutti i casi la generazione completa del numero proposto. La sua *necessità* si manifesta particolarmente nell'aritmetica che non sarebbe possibile senza questo algoritmo (*Vedi* Aritmetica e Numerazione), e la sua forma generale è

$$A\varphi x + B\varphi_1 x + C\varphi_2 x + D\varphi_3 x + \text{ec.}$$

ove A, B, C, D, ec. sono quantità indipendenti da x, e φx, $\varphi_1 x$, $\varphi_2 x$, ec. sono funzioni qualunque di x legate tra loro mediante una legge qualunque.

Le *facoltà*, la cui forma generale è

$$\varphi x \cdot \varphi_1 x \cdot \varphi_2 x \cdot \varphi_3 x \cdot \varphi_4 x \ldots \ldots$$

hanno per oggetto la generazione di una quantità numerica mediante la combinazione degli ultimi due algoritmi elementari, racchiudendo egualmente gli algoritmi componenti tra limiti dati. La sua *necessità* si manifesta nell'algebra,

particolarmente per la generazione di certe quantità trascendenti che non sarebbero possibili senza questo algoritmo. *Vedi* FACOLTA'.

5. La *numerazione* e la *facoltà* sono tra loro connesse mediante il secondo algoritmo primitivo che come parte costituente entra nella loro composizione, e stabilisce per conseguenza tra questi algoritmi derivati una specie di unità che permette di passare dall' uno all' altro. La transizione dalla numerazione alle facoltà è operata dai LOGARITMI, e quella dalle facoltà alla numerazione dalle funzioni darivate chiamate SENI e COSENI (Si vedano nel Dizionario queste parole, e l'articolo FILOSOFIA DELLE MATEMATICHE). I *logoritmi* e i *seni* terminano definitivamente il sistema di tutti gli algoritmi elementari.

6. Wronski ha dato ai tre algoritmi primitivi

$$A+B=C,\quad A\times B=C,\quad A^{B}=C,$$

i nomi respettivi di *sommazione*, *riproduzione* e *graduozione*: noi perciò in ciò che saremo per dire ci serviremo di queste denominazioni, senza le quali saremmo costretti ad ogni istante a fare uso di perifrasi.

7. Prima di passare alla *riunione sistematica* degli algoritmi elementari primitivi e derivati, procediamo alla deduzione degli oggetti della comparazione elementare dei numeri. La relazione reciproca dei numeri, considerata in tutta la sua generalità, consiste nell' *eguoglionza* o nell' *ineguoglianao* di questi numeri; ma l' eguaglianza, nella sua semplicità elementare, non ha altra leggi che quelle dell' *identità*, e non può formare l' oggetto di una considerazione particolare, per conseguenza non dobbiamo più occuparci che della sola ineguaglianza.

Ora, l' ineguaglianza di due nomeri può esser considerata secondo la relazione delle quantità A o B con C in ognuno degli algoritmi primitivi, ed è questa relazione che prende il nome di RAPPORTO. Noi abbiamo dunque, pei *rapporti di sommazione*:

$$C-A=B,\quad C-B=A;$$

pei *rapporti di riproduaione*:

$$\frac{C}{A}=B,\quad \frac{C}{B}=A;$$

e pei *rapporti di graduazione*:

$$\frac{\operatorname{Log} C}{\operatorname{Log} A}=B,\quad \sqrt[B]{C}=A:$$

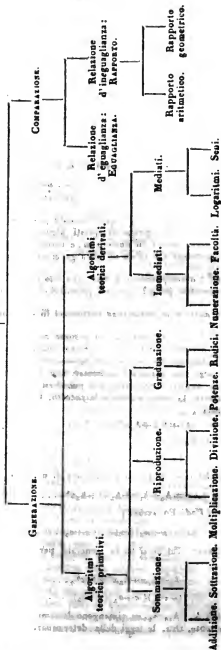
ma le due relazioni delle due prime specie di rapporti essendo le stesse, e la prima della terza specie essendo identica con quelle della seconda, ne consegue che non esistono realmente che tre *rapporti* differenti; che anzi non si considerano che i due primi, cioè:

$$C-A=B,\quad \frac{C}{A}=B,$$

ai quali si danno i nomi di *ropporto oritmetico* e di *rapporto geometrico*.

Due rapporti egoali, aritmetici o geometrici, costituiscono una *proporzione* (*Vedi* PROPORZIONE), ed una serie di rapporti eguali, i cui termini medj siano gli stessi, forma una *progressione* (*Vedi* PROGRESSIONE). La teoria della comparazione elementare delle quantità ha dunque per oggetto i *rapporti*, le *proporzioni* e le *progressioni*.

Riepilogheremo tutta la parte elementare della teoria dell' algebra nel quadro seguente.

TEORIA DELL' ALGEBRA
Parte elementare.
Generazione.
Comparazione.
Algoritmi teorici primitivi.
Algoritmi teorici derivati.
Relazione d'eguaglianza: Eguaglianza.
Relazione d'ineguaglianza: Rapporto.
Rapporto aritmetico.
Rapporto geometrico.
Sommazione.
Riproduzione.
Graduazione.
Immediati.
Mediati.
Addizione.
Sottrazione.
Moltiplicazione.
Divisione.
Potenze.
Radici.
Numerazione.
Facoltà.
Logaritmi.
Seni.

8. La riunione degli algoritmi elementari, che forma la parte *sistematica* della teoria dell' algebra, non è una semplice combinazione di questi algoritmi come nella formazione degli algoritmi derivati: è una vera *riunione sistematica*, in forza della quale le quantità numeriche ricevono nuove determinazioni e nuove leggi nella loro generazione e nella loro comparazione. Senza risalire adesso ai principj filosofici di questa riunione (*Vedi* FILOSOFIA DELLA MATEMATICHE), esporremo come essa si manifesti nella scienza.

Se si considerano due algoritmi elementari come concorrenti alla generazione di una quantità, si potrà considerare questa generazione in due maniere: 1° come data indistintamente dall' uno e dall' altro di questi algoritmi; 2.° come operata dall' influenza distinta di uno di questi algoritmi sull' altro. Per esempio, abbiasi

$$m = A + B, \quad m = C^D,$$

ossia la doppia generazione di un numero m, mediante i due algoritmi primitivi elementari della sommazione e della graduazione; la riunione di queste due generazioni, $A+B=C^D$, se fosse generalmente possibile, ci permetterebbe di considerare indistintamente ognuno di questi algoritmi primitivi come suscettibile di dare la generazione di un numero m; e tutte le volte che avessimo $m=A+B$, potremmo concludere che esiste un' altra generazione equivalente dello stesso numero $m=C^D$, o reciprocamente. Ora, una tale *identità sistematica* di generazione non è possibile per gli algoritmi primitivi elementari, che sono indipendenti gli uni dagli altri; e le circostanze particolari in cui può avarsi o $A+B=C^D$, o $A+B=E\times F$, o $E\times F=C^D$, non possono mai permettere di considerare in generale la generazione di un numero come data indistintamente dall' uno e dall' altro degli algoritmi che entrano in ognuna di queste riunioni.

Ma se gli algoritmi primitivi elementari non possono nella loro riunione dar luogo ad una identità sistematica, non può dirsi lo stesso dei due algoritmi elementari derivati, la *numerazione* e le *facoltà*. Dando al primo di questi algoritmi la forma

$$A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + \text{ec.} \ldots\ldots + A_mx^m,$$

e al secondo la forma

$$(x+a_1)(x+a_2)(x+a_3)\ldots\ldots\ldots(x+a_m),$$

si dimostra che se si ha per la generazione di una quantità qualunque φx,

$$\varphi x = A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 \ldots\ldots\ldots + A_mx^m,$$

si avrà pure (*Vedi* EQUAZIONE)

$$\varphi x = (x+a_1)(x+a_2)(x+a_3)\ldots\ldots\ldots(x+a_m),$$

e reciprocamente. Talchè si ha in generale per l' identità di che si tratta l' espressione

$$A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3, \ldots\ldots + A_mx^m =$$
$$(x+a_1)(x+a_2)(x+a_3)\ldots\ldots + (x+a_m)\ldots\ldots(n).$$

Le quantità A_0, A_1, A_2, ec. rimangono determinate dalle quantità a_1, a_2, a_3, ec. e reciprocamente. Ora, le leggi della determinazione di queste quantità le une

per mezzo delle altre formano una parte distinta ed essenziale dell'algebra, alla quale è stato dato il nome di TEORIA DELLE EQUIVALENZE.

Nella sua *Introduzione all' analisi degl' infinitamente piccoli*, Eulero ha dimostrato le due belle equivalenze trovate da Giovanni Bernoulli,

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \frac{x^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \text{ec.}$$

$$= x\left(1-\frac{x}{\pi}\right)\left(1+\frac{x}{\pi}\right)\left(1-\frac{x}{2\pi}\right)\left(1+\frac{x}{2\pi}\right) \text{ec.}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} - \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} - \text{ec}$$

$$= \left(1-\frac{2x}{\pi}\right)\left(1+\frac{2x}{\pi}\right)\left(1-\frac{2x}{3\pi}\right)\left(1+\frac{2x}{3\pi}\right) \text{ec.}$$

e ne ha dedotte parecchie importanti conseguenze per la sommazione delle serie infinite.

9. Esaminando ora la seconda maniera, mediante la quale il concorso di due algoritmi elementari può operare la generazione delle quantità, si vede facilmente che questi due algoritmi dovendo esser considerati come distinti l'uno dall'altro, ne resulta per la loro riunione una *diversità sistematica*, che si manifesta in tre modi: 1.° per l'influenza della sommazione nella generazione delle quantità in cui domina la graduazione; 2.° per l'influenza della graduazione nella generazione delle quantità in cui domina la sommazione; 3.° per l'influenza reciproca della sommazione e della graduazione nella generazione delle quantità in cui dominano ambedue questi algoritmi.

10. L'influenza della sommazione nella generazione delle quantità in cui domina la graduazione ha luogo quando si considerano le funzioni di una o di più quantità variabili come esprimenti la generazione per graduazione delle quantità numeriche, mentre si ha in mira la variazione di queste quantità rapporto alla sommazione. Per esempio, essendo φx la generazione per graduazione di una quantità qualunque, se x varia per *addizione* o per *sottrazione*, vale a dire se diviene $x+\Delta$ o $x-\Delta$, la variazione corrispondente di φx sarà necessariamente dovuta all'influenza dell'algoritmo della sommazione. Questa variazione si chiama in generale DIFFERENZA, e le leggi che la regolano formano l'oggetto della TEORIA DELLE DIFFERENZE.

Gli elementi della sommazione potendo essere considerati come *reali* o *ideali*, cioè come *finiti* o *infinitamente piccoli*, la teoria delle differenze ha due rami che sono il CALCOLO DELLE DIFFERENZE e il CALCOLO DIFFERENZIALE. Se si considerano inoltre gli elementi della sommazione come *indeterminati*, si ha il CALCOLO DELLE VARIAZIONI. *Vedi* DIFFERENZIALE e VARIAZIONE.

11. Il secondo caso della tripla diversità sistematica che si esamina dà origine ad un calcolo nuovo la cui importanza per l'algoritmia non è ancora sviluppata, quantunque ne costituisca una parte necessaria. Nulladimeno un tal calcolo ha questo di particolare, che la sua scoperta non è il resultato di un problema da risolversi, o di un bisogno manifestatosi nella scienza, ma è stata fatta *a priori* dal geometra di cui seguiamo i principj in questa classificazione, e resulta dalle alte deduzioni filosofiche che egli ha date di tutti i rami dell'algoritmia. La sola applicazione che per ora sia stata fatta di questo calcolo è la determinazione della *forma* e della *natura* delle radici delle equazioni. Senza voler pronunziare alcun giudizio sull'utilità di che potrà essere un giorno questo calcolo, credia-

mo che l' esposizione che siamo per farne non debba essere senza interesse pei nostri lettori.

Se si considerano le funzioni di una o di più variabili come esprimenti la generazione per sommazione delle quantità numeriche, si può evidentemente e sotto un punto di vista opposto alle differenze, aver riguardo alla variazione di queste quantità rapporto alla graduazione. Per esempio, sia y una funzione φx della variabile x, cioè si abbia

$$y = \varphi x.$$

Se s'immagina che x varii per un accrescimento che riceva il suo esponente, l'esponente di y riceverà un accrescimento corrispondente; cosicchè, indicando con γx l' accrescimento dell' esponente di x e con γy quello dell' esponente di y, si avrà

$$y^{1+\gamma y} = \varphi\left(x^{1+\gamma x}\right).$$

Ora, dividendo questi valori derivati pel valore primitivo $y = \varphi x$, si otterrà

$$y^{\gamma y} = \frac{\varphi(x^{1+\gamma x})}{\varphi x} \quad \ldots\ldots\ldots (o)$$

e sarà questo l' *accrescimento per graduazione* della funzione φx, corrispondente ad un accrescimento simile della variabile x.

Ora, questo accrescimento per graduazione è necessariamente sottoposto a leggi particolari, il complesso delle quali forma l'oggetto di un calcolo particolare. Questo calcolo è stato chiamato dal suo autore Wronski: Calcolo dei Gradi, indicando col nome di *gradi* le quantità γx, γy.

I gradi potendo esser considerati come *finiti* o come *infinitamente piccoli*, il calcolo dei gradi ha dunque al pari del calcolo delle differenze due rami particolari; il primo sarà il calcolo dei gradi finiti, o semplicemente il *calcolo dei gradi*, e il secondo il *calcolo dei graduli*, chiamando *graduli* i gradi infinitamente piccoli.

Per avere l' espressione generale del grado e del gradulo di una funzione qualunque per mezzo di altri algoritmi noti, facciamo nella espressione (o)

$$x^{1+\gamma x} = x + \omega,$$

e prendiamo ω per l'accrescimento delle differenze che ci serviranno per esprimere i gradi: si otterrà

$$y^{\gamma y} = \frac{\varphi(x+\omega)}{\varphi x} = 1 + \frac{\varphi(x+\omega) - \varphi x}{\varphi x} = 1 + \frac{\Delta\varphi(x+\omega)}{\varphi x},$$

ossia

$$y^{\gamma y} - 1 = \frac{\Delta\,\varphi(x+\omega)}{\varphi x} \quad \ldots\ldots\ldots (p).$$

Ora, per la teoria delle differenze, indicando con Fx una funzione qualunque di x, e colla caratteristica L i logaritmi naturali che hanno e per base, si ha

$$\Delta LFx = LFx - LF(x-\omega) = L\frac{Fx}{F(x-\omega)},$$

donde si trae

$$e^{\Delta LFx} = \frac{Fx}{F(x-\omega)} = 1 + \frac{Fx - F(x-\omega)}{F(x-\omega)} = 1 + \frac{\Delta Fx}{F(x-\omega)},$$

e per conseguenza

$$\Delta Fx = F(x-\omega)(e^{\Delta LFx} - 1).$$

In forza di questa espressione si ha dunque

$$\Delta\varphi(x+\omega) = \varphi x\,(e^{\Delta L\varphi(x+\omega)} - 1);$$

e sostituendo questo valore nell' espressione (p) si troverà

$$y^{\gamma y} = e^{\Delta L\varphi(x+\omega)} \ldots\ldots (q)$$

prendendo ora i logaritmi dei due membri di quest' ultima eguaglianza, si avrà

$$\gamma y L y = \Delta L\varphi(x+\omega),$$

donde finalmente si otterrà, sostituendo φx in luogo di y,

$$\gamma\varphi x = \frac{\Delta L\varphi(x+\omega)}{L\varphi x}.$$

Tale è l' espressione generale del grado di una funzione x. Quando si tratta del gradulo, la quantità ω è infinitamente piccola e la differenza diviene un differenziale: allora si ha semplicemente

$$g\varphi x = \frac{dL\varphi x}{L\varphi x},$$

ove la lettera g indica i graduli.

Partendoci da quest' ultima espressione, si trovano pei graduli delle funzioni elementari le seguenti espressioni generali:

$$g(x^m) = gx$$

$$gLx = \frac{1}{LLx}gx$$

$$g(a^x) = Lxgx$$

$$g\,\text{sen}\,x = \frac{xLx\,.\,\cot x}{L\,\text{sen}\,x}gx$$

$$g\cos x = -\frac{xLx\,.\,\tan x}{L\cos x}gx$$

Questi non sono che i graduli del *primo ordine*, giacchè deve osservarsi che i gradi e i graduli sono suscettibili, al pari delle differenze e dei differenziali, di tutti gli ordini possibili, positivi o negativi: ma adesso non possiamo entrare in ulteriori particolarità; ciò che precede basta per dare una idea esatta della natura di questo nuovo calcolo, e dobbiamo rinviare quei lettori che desiderassero di conoscerlo più a fondo alla *Introduzione alla filosofia delle matematiche*, ove si trova esposto in tutta la sua pienezza.

13. Ci rimane da esaminare l' influenza reciproca della sommazione e della graduazione nella generazione delle quantità in cui dominano ambedue questi algoritmi. Questa influenza, che non può manifestarsi che nei numeri già prodotti dalla loro generazione e non in questa generazione medesima, è l' oggetto della Teoria dei numeri.

La *Teoria dei numeri* non può avere, come quella delle differenze, due diramazioni corrispondenti alle parti finite e infinitamente piccole che possono considerarsi in quest' ultima, perchè l' influenza sistematica che forma il suo oggetto non si esercita che sui numeri dati dalla loro generazione; ma essa ammette però la considerazione della *determinazione* e della *indeterminazione* di questi numeri, vale a dire che i numeri si possono considerare come dati di per sè stessi ossia immediatamente, e come dati da altri numeri o mediatamente. Nel primo caso la teoria prende il nome di Teoria dei numeri determinati, e nel secondo quello di Teoria dei numeri indeterminati. Quest' ultima si chiama volgarmente Analisi indeterminata. *Vedi* Indeterminato.

Per fissar meglio l' idea che dobbiamo formarci dell' oggetto della *Teoria dei numeri*, deve notarsi che l' algoritmo della sommazione ci fa concepire i numeri come *aggregati di unità*, mentre quello della graduazione, egualmente che quello della riproduzione, introducono nella loro natura la considerazione dell' esistenza dei *fattori*. Questi due caratteri distintivi, riuniti in uno stesso numero, costituiscono l' influenza sistematica reciproca che forma l' oggetto della teoria di che si tratta, e questa riunione non può presentarsi che come una *diversità sistematica*, perchè per la loro natura essenzialmente differente gli algoritmi primitivi non possono mai dare indistintamente la generazione di un numero. Ora, considerando per una parte un numero dato come formato mediante l' addizione di più quantità, e per l' altra come formato dal prodotto di più fattori, queste quantità e questi fattori sono necessariamente tra loro collegati da leggi particolari che regolano la possibilità di questa doppia generazione. Il complesso di tutte queste leggi forma precisamente la teoria generale dei numeri. *Vedi* Numero.

14. La *comparazione* sistematica delle quantità numeriche ha necessariamente per oggetto, come la comparazione elementare, l' *eguaglianza* o l' *ineguaglianza* che può esistere tra queste quantità, ma avuto riguardo alle nuove determinazioni della loro natura cagionate dalla loro generazione sistematica. Per esempio, la generazione di una funzione qualunque φx di una variabile x essendo

$$\varphi x = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + A_4 x^4 + \text{ec.} \ldots\ldots (r),$$

se vi si unisce la considerazione della equivalenza tra questa generazione per sommazione e quella per graduazione che deve essere

$$\varphi x = (x+a_1)(x+a_2)(x+a_3)(x+a_4) \text{ ec.} \ldots\ldots (s),$$

e se si osserva che quando uno dei fattori di quest' ultima generazione diviene zero, il che la rende nulla, la prima deve egualmente annullarsi ponendovi in luogo della variabile x il valore che rende zero il fattore, si vedrà che questa circostanza è generalmente espressa col dare all' eguaglianza (r) la forma

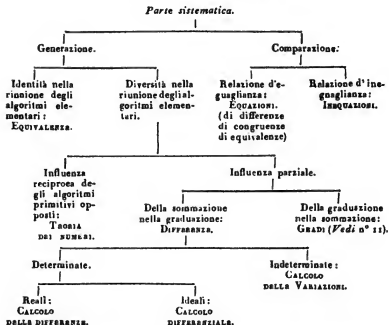
$$0 = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + A_4 x^4 \ldots\ldots (t),$$

relazione che implica necessariamente quella stessa relazione che hanno con zero i fattori della funzione di graduazione (s) considerati separatamente, vale a dire che la variabile x del secondo membro dell' eguaglianza (t) riceve dei valori determinati, il cui numero è eguale a quello dei fattori di (s), che riducono a zero questo secondo membro. L' eguaglianza (t) non è più dunque una semplice *iden-*

tità; essa si chiama allora Equazione, e la *Teoria delle equazioni* forma la parte principale della comparazione teorica sistematica dell'algebra. *Vedi* Equazione.

L'ineguaglianza delle quantità riceve egualmente, considerandola nella circostanza della riunione sistematica degli algoritmi opposti, un carattere particolare che la rende Inequazione; ma siccome le *inequazioni* non hanno una significazione determinata che per mezzo delle relazioni di equazioni, così si può considerare tutta la teoria della comparazione sistematica come riducentesi alla Teoria delle equazioni.

Noi termineremo tutto ciò che ha rapporto ai diversi rami della parte sistematica della Teoria dell'algebra col seguente quadro.

TEORIA DELL' ALGEBRA

25. Passiamo adesso alla deduzione delle diverse parti della Tecnia dell'Algebra, e primieramente determiniamo l'oggetto generale di questa parte importante dell'algoritmia.

Nella Teoria, la generazione o la costruzione delle quantità è data immediatamente da algoritmi semplici o composti che possono unicamente far conoscere la *natura* di queste quantità, ma non mai la loro determinazione numerica o il loro *valore* comparativo ad una unità. Questo valore non può mai esser dato che accidentalmente dalla teoria dell'algebra, e soltanto nel caso in cui le operazioni, che colla loro riunione costituiscono la *natura* di una quantità e danno la sua generazione, possano effettuarsi mediante l'applicazione dei metodi primitivi ossia delle sei regole elementari della scienza, cioè l'addizione, la moltiplica-

zione, l'elevazione alle potenze, e le loro inverse. Per esempio, abbiasi una quantità m, la cui generazione sia data dall'espressione

$$m = \sqrt[2]{5}.$$

Questa generazione non ci fa conoscere immediatamente che la *natura*, o la costruzione primitiva della quantità m, e soltanto coll'applicarvi il metodo dell'*estrazione delle radici* possiamo determinare il suo *valore numerico*

$$m = 2,23606 \ldots \ldots$$

Ora, in tutti i casi in cui questa applicazione dei metodi o delle regole primitive non può effettuarsi in un modo immediato, il valore delle quantità non è più dato accidentalmente, e nondimeno la determinazione di questo valore è richiesta imperiosamente per la possibilità della scienza. È vero però che quando è dato un modo qualunque particolare di generazione, ovvero una *funzione* particolare, si può, mediante l'applicazione delle leggi generali della generazione sistematica delle quantità, ottenere le leggi particolari della generazione elementare di questa funzione, e queste leggi particolari possono servire alla loro volta alla determinazione della *natura primitiva* della funzione e per conseguenza alla determinazione del suo *valore*. Ma una tale determinazione teorica non potrebbe avere alcuna legge generale, ed ogni funzione particolare esige necessariamente una determinazione particolare; talmentechè il numero delle funzioni o dei modi differenti da cui può esser prodotta la generazione delle quantità mediante la combinazione degli algoritmi semplici o composti essendo indefinito, questa determinazione è per sè stessa indefinita e per conseguenza *impossibile* in tutta l'estensione della generazione sistematica delle quantità. Si presenta dunque il problema necessario di una generazione *secondaria*, differente dalla generazione *primaria* che vien data dagli algoritmi semplici o composti della teoria elementare dell'algebra. Ora, questa generazione secondaria, dovendo abbracciare in tutti i casi la determinazione numerica delle quantità, deve essere UNIVERSALE, vale a dire che deve potersi applicare indistintamente a tutte le quantità. La TECNIA dell'algebra ha dunque per oggetto generale *la generazione e la comparazione universale* delle quantità.

Prima di passare alla ricerca degli algoritmi capaci di dare questa generazione universale, facciamo osservare la differenza caratteristica che gli distingue subito dagli algoritmi teorici; questi ultimi, formando dei metodi di costruzione, sono per così dire identici colle quantità stesse che essi producono, mentre i primi dovendo formare dei metodi di valutazione, sono indipendenti dalle quantità che essi valutano. In una parola, gli algoritmi teorici fanno parte della natura stessa delle quantità, mentre gli algoritmi tecnici debbono essere indipendenti da questa natura, e si riferiscono evidentemente ad un *fine*, ad uno *scopo* da raggiungersi, estraneo affatto alla natura delle quantità. Questo fine o questo scopo che comparisce nei metodi della TECNIA, la separa interamente dalla TEORIA, e non permette di confondere insieme, come sempre si era fatto fino ad ora, queste due parti tanto distinte della scienza. La teoria è propriamente la parte speculativa dell'algoritmia, mentre la tecnia ne è la parte pratica, o, per meglio dire, presenta un carattere di azione, un'*arte*, τέχνη. Si consulti l'opera di Wronski intitolata la *Filosofia della Tecnia*, sez, 1ª.

16. La generazione secondaria, che forma l'oggetto principale della tecnia dell'algebra, dovendo presentare la determinazione numerica delle quantità, non può evidentemente aver luogo che mediante l'uso arbitrario degli algoritmi elementari, perchè in ultima analisi la valutazione numerica di una quantità si riduce

alla realizzazione delle operazioni primitive date da questi algoritmi. Ma i due algoritmi derivati immediati, la *numerazione* e le *facoltà*, ci offrono la possibilità di ottenere la generazione di una quantità qualunque, per mezzo dei limiti arbitrarj di cui sono suscettibili; così, per ottenere la generazione secondaria della quale si tratta, bisogna potere, mediante una funzione arbitraria, trasformare, per mezzo degli algoritmi primitivi, qualunque funzione teorica, data mediatamente o immediatamente, in funzioni di numerazione o di facoltà. Questa funzione arbitraria sarà nella massima sua generalità la quantità che nelle applicazioni dell' aritmetica si dice *misura* o *unità della valutazione* delle quantità.

Ora, la trasformazione di qualunque funzione teorica in funzione di numerazione o di facoltà, mediante l' uso di una misura arbitraria secondo la quale debba essa esser valutata, esige evidentemente una determinazione della relazione che esiste tra questa funzione e la funzione arbitraria che serve di misura, vale a dire la determinazione del rapporto geometrico di queste funzioni, perchè su questo rapporto si fonda appunto generalmente l' operazione aritmetica chiamata *misura*. Inoltre la generazione secondaria che forma l' oggetto della trasformazione di cui si tratta, dovendo operarsi mediante l' uso degli algoritmi primitivi, questa trasformazione deve esser subordinata alla *forma* dell' algoritmo impiegato. Ciò posto, se s' indica con Fx una funzione qualunque di una variabile x, e con φx una funzione arbitraria che le debba servire di misura o nella quale la funzione Fx debba esser trasformata, l' operazione di questa trasformazione in funzioni di numerazione o di facoltà, avrà le *forme* respettive

$$Fx = A + \Theta x \quad \text{e} \quad Fx = A \times \Theta x,$$

essendo A una quantità dipendente o indipendente da x, e Θx una quantità dipendente dalla misura φx.

17. Occupiamoci primieramente della funzione di numerazione. Per potere in generale decomporre Fx in due quantità A e Θx, tali che Θx sia in qualunque caso comparabile colla misura φx, bisogna necessariamente che Θx divenga zero quando lo diviene φx, perchè senza questo il rapporto di queste due funzioni non potrebbe divenire l' oggetto di una determinazione generale. Così la quantità A deve esser tale che si abbia

$$Fx = A,$$

quando la variabile x riceve il valore che rende $\varphi x = 0$, e per conseguenza $\Theta x = 0$, donde consegue che questa quantità è indipendente da x.

Ora il rapporto delle quantità Θx e φx essendo

$$\frac{\Theta x}{\varphi x}, \quad \text{ovvero} \quad \frac{\varphi x}{\Theta x},$$

se si considera in primo luogo soltanto il rapporto diretto $\frac{\Theta x}{\varphi x}$, si avrà, indicandolo con $F_1 x$,

$$\frac{\Theta x}{\varphi x} = F_1 x,$$

e questa funzione $F_1 x$, che in tutti i casi deve avere un valore determinato, potrà subire una trasformazione ulteriore

$$F_1 x = B + \Theta_1 x,$$

nella quale $\Theta_1 x$ esprime una quantità comparabile sempre con φx, tale cioè che divenga zero quando $\varphi x = o$, e B è una quantità tale che si abbia nello stesso caso

$$F_1 x = B.$$

Esprimendo di nuovo con $F_2 x$ il rapporto diretto delle quantità $\Theta_1 x$ e φx, potremo trasformare la funzione $F_2 x$ in

$$F_2 x = C + \Theta_2 x,$$

e proseguendo successivamente queste decomposizioni, si troverà riunendo tutti i resultati

$$\begin{aligned} F\,x &= A + \Theta x \\ \Theta\,x &= (B + \Theta_1 x)\,\varphi x \\ \Theta_1 x &= (C + \Theta_2 x)\,\varphi x \\ \Theta_2 x &= (D + \Theta_3 x)\,\varphi x \\ &\text{ec.} \end{aligned}$$

e, sostituendo, si avrà

$$Fx = A + B\varphi x + C(\varphi x)^2 + D(\varphi x)^3 + \text{ec.}$$

che è la forma generale delle espressioni che diconsi *serie*, almeno nel caso semplice in cui le trasformazioni si effettuano colla stessa misura φx.

18. Se si eseguiscono le stesse trasformazioni prendendo il rapporto inverso $\frac{\varphi x}{\Theta x}$, si otterrà successivamente

$$Fx = A + \Theta x, \quad \frac{\varphi x}{\Theta x} = {}_1Fx,$$

$${}_1Fx = B' + \Theta_1 x, \quad \frac{\varphi x}{{}_1\Theta x} = {}_2Fx,$$

$${}_2Fx = C' + \Theta_2 x, \quad \frac{\varphi x}{{}_2\Theta x} = {}_3Fx,$$

$${}_3Fx = D' + \Theta_3 x, \quad \frac{\varphi x}{{}_3\Theta x} = {}_4Fx,$$

ec.

donde, sostituendo, si ottiene

$$Fx = A + \cfrac{\varphi x}{B' + \cfrac{\varphi x}{C' + \cfrac{\varphi x}{D' + \text{ec.}}}}$$

che è la forma generale delle espressioni che diconsi *frazioni continue*, parimente nel caso semplice di una stessa misura φx.

Le serie e le frazioni continue sono dunque i due rami particolari della classe generale dei metodi tecnici che dipendono dall'algoritmo della numerazione.

19. Riprendiamo adesso la seconda forma di trasformazione

$$Fx = A \times \Theta x,$$

che corrisponde all'uso dell'algoritmo delle facoltà. In questo caso, la quantità A può esser realmente dipendente o indipendente dalla variabile x, e le trasformazioni di qoesto secondo caso differiscono essenzialmente da quelle del primo, in cui qoesta quantità A è necessariamente indipendente da x, cioè una quaotità costante. Considerando la quantità A come dipendente da x, essa deve esser tale che ridotta a zero da un valore particolare di x, questo stesso valore renda Fx eguale a zero, affinchè la funzione Θx abbia un valora finito. Così questa qoantità A essendo in generale comparabile con Fx forma per sè stessa la *misura* di questa funzione: indicando dunque con $f_0 x$ la funzione arbitraria A, la prima trasformazione diverrà

$$Fx = f_0 x \times \Theta x,$$

e le altre trasformazioni saranno

$$\Theta x = f_1 x \times \Theta_1 x,$$
$$\Theta_1 x = f_2 x \times \Theta_2 x,$$
$$\Theta_2 x = f_3 x \times \Theta_3 x,$$
ec.

ove le fonzioni arbitrarie $f_1 x$, $f_2 x$, $f_3 x$, ec. sono prese respettivamente per la *misura* delle fnnzioni Θx, $\Theta_1 x$, $\Theta_2 x$, ec. Sostituendo dunqne ognuna di qneste trasformazioni in quella ehe la precede, si otterà la generazione tecnica

$$Fx = f_0 x \cdot f_1 x \cdot f_2 x \cdot f_3 x \;.\;.\;.\;.\;.$$

in cui il nnmero dei fattori è *indefinito*: e questa è la forma generale dei *prodotti continui*.

20. Quando al contrario la quantità A è indipendente da x, la trasformazione

$$Fx = A \times \Theta x$$

non è evidentemente possibile cbe mediante l'uso dell'algoritmo delle facoltà, rendendo i fattori indipendenti dalla variabile. Allora si ha la forma generale

$$Fx = (\psi z)^{\varphi x | \omega},$$

ove z e ω sono due quantità date, ψz indica una fuozione di z convenientemente determinata, e φx è la fonzione arbitraria di x presa per misura, perchè in qnesta gnisa tutti i fattori finiti ψz, $\psi(z+\omega)$, $\psi(z+2\omega)$ ec. che formano la facoltà, sono indipendenti dalla variabile x. È questa la forma genarale della *facoltà esponenziali*.

La *serie*, le *frazioni continue*, i *prodotti continui* e le *facoltà esponenziali* formano dunqne gli oggetti della parta elementare della tecnia e costituiscono quattro *algoritmi tecnici primitivi*, mediante ognuno dei quali si può ottenere la generazione tecnica o la valutazione numerica di una funzione qualunque. Le leggi fondamentali di questi quattro algoritmi compongono nel loro complesso la *parte elementare della generazione tecnica*.

21. I quattro algoritmi tecnici primitivi che abbiamo trovato per deduziona, e che formano le due classi di generazioue tecnica, dipendenti dall'uso della numerazione e delle facoltà, o, in ultima analisi, dall'uso della sommazione e della graduazione, non possono mediante la loro combinazione fare altro ehe riprodurre

gli algoritmi teorici; cosicchè a parlar propriamente non esistono, in quanto alla forma di generazione, algoritmi tecnici derivati. Nulladimeno, avendo riguardo al metodo diretto o inverso che può seguirsi nella determinazione della funzione Fx, per ottenere la sua generazione tecnica, si presenta una classe particolare di algoritmi tecnici derivati, che forma ciò che comunemente si dice *metodi d'interpolazione* (*Vedi* Interpolazione). Infatti, nelle serie, nelle frazioni continue e nelle facoltà esponenziali, s'incontrano delle quantità costanti il cui valore resulta dalle determinazioni particolari della funzione proposta Fx, che questi algoritmi debbono valutare. Ora, purchè queste determinazioni siano note o almeno possano ottenersi col soccorso di certe circostanze date, diviene sempre possibile, seguendo un metodo inverso, di valutare in generale la funzione Fx, alla quale si riferiscono le determinazioni particolari che si saranno impiegate. L'oggetto dell'Interpolazione è precisamente questo metodo inverso.

22. La riunione sistematica degli algoritmi tecnici elementari non può consistere che nella forma generale di questi algoritmi, e questa forma generale è necessariamente la forma primitiva di tutta la scienza dei numeri. Senza entrare adesso in estese particolarità, che sarebbero inconciliabili col nostro piano, osserveremo che la forma generale delle serie è

$$Fx = A + B\varphi x + C\varphi x^2 + D\varphi x^3 + \text{ec.}$$

il che in ultima analisi si riduce ad un aggregato di termini della forma

$$Fx = \Phi_0 + \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 + \Phi_4 + \text{ec.}, \ldots\ldots (\alpha),$$

che quella delle frazioni continue

$$Fx = A + \cfrac{\varphi x}{B + \cfrac{\varphi x}{C + \cfrac{\varphi x}{D + \text{ec.}}}}$$

si riduce parimente ad un aggregato di termini della forma

$$Fx = \Phi_0 + \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 + \Phi_4 + \text{ec.}$$

e che finalmente le forme generali dei prodotti continui e delle facoltà esponenziali, supponendo che la moltiplicazione dei fattori sia effettuata, divengono pure aggregati di termini simili ad (α). Così, tutti gli algoritmi tecnici elementari possono esser ridotti ad un aggregato di termini, ed è perciò in questa forma che si trova la loro riunione sistematica, vale a dire che l'algoritmo tecnico sistematico, che deve riunire tutti gli algoritmi elementari ed abbracciare tutti i metodi tecnici, deve presentarsi anch'esso sotto questa medesima forma (α).

Se s'indicano con Ω_0, Ω_1, Ω_2, ec. delle funzioni arbitrarie della variabile x, prese per misura, funzioni che possono esser tra loro legate da una legge, o anco non aver nessun legame, e con A_0, A_1, A_2 ec. delle quantità indipendenti da x, avremo per la forma della generazione tecnica sistematica della quale si tratta l'espressione generale

$$Fx = A_0\Omega_0 + A_1\Omega_1 + A_2\Omega_2 + A_3\Omega_3 + \text{ec.} \ldots\ldots (\beta).$$

Questa legge, la cui generalità assoluta si estende sopra tutta l'algoritmia, poichè abbraccia l'applicazione stessa, indipendente ed immediata degli algoritmi primitivi ed opposti della sommazione e della graduazione, è stata chiamata da Wronski, al quale è dovuta, Legge suprema o universale. Si consulti la sua opera intitolata la *Filosofia della Tecnia*.

23. Fino ad ora non abbiamo considerato la tecnia dell' algebra che nel ponto di vista della generazione delle qoantità; ei rimane a considerarla in qoello della loro relazione o della loro comparazione. Qoesta relazione, che in generale riguarda l' *eguaglianza* o l' *ineguaglianza* delle quantità, deve qoi presentarsi coi caratteri di *fine* o di *scopo*, che distinguono la tecnia dalla teoria: così, non considerando che le eguaglianze in quanto che costitoiscono esse le condizioni delle ineguaglianze, la comparazione tecnica consiste nella *formazione universale delle eguaglianze*, e nella loro trasformazione o risoluzione, vale a dire nella *risoluzione universale delle equazioni*. Le leggi respettive di questa formazione e di questa soluzione formano, le prime, la parte elementare della *comparazione tecnica*, e le seconde la parte sistematica di questa stessa comparazione. Qoeste due parti sono state chiamate da Wronski il *Canone algoritmico* e il *Problema universale*. Tali donque sono in fine tutte le parti integranti della Tecnia dell' algoritmia: il loro insieme forma il quadro seguente.

TECNIA DELL' ALGEBRA
Parte elementare.
Parte sistematica.
Generazione.
Comparazione.
Generazione.
Comparazione.
Risoluzione di tutte le equazioni:
Problema universale.
Generazione tecnica Primitiva.
Generazione tecnica derivata.
Interpolazione.
Costruzione di tutte le egoaglianze:
Canone algoritmico.
Legge suprema o universale.
Per sommazione.
Per graduazione.
Generale: Serie.
Particolare: Frazioni continue.
Generale: Facoltà esponenziali.
Particolare: Prodotti continui.

Matematiche applicate. Dietro la deduzione filosofica che abbiamo data dell'oggetto generale delle matematiche, si scorge che la loro applicazione è universale, e che debbono esistere tanti rami differenti di matematiche applicate, quante scienze differenti possono esistere per l'umano sapere. Si comprende pure che queste scienze non acquistano un grado più o meno grande di certezza che in virtù di questa applicazione, e secondochè le loro leggi fondamentali si appoggiano più o meno sopra leggi matematiche. Noi non abbiamo senza dubbio bisogno di fare osservare che qui si tratta delle scienze propriamente dette, vale a dire delle scienze il cui oggetto è realizzabile nello *spazio* e nel *tempo*; poichè la certezza delle scienze filosofiche deriva da una sorgente affatto diversa; destinate per la loro natura a dare la spiegazione delle leggi matematiche, esse non possono evidentemente trarre la loro validità da queste leggi medesime.

Questa applicazione universale delle matematiche non può essere assoggettata ad una classificazione determinata, che osservando primieramente che, tra tutti gli oggetti delle scienze umane, possono distinguersi quelli che sono dati dalla *natura* ossia dal complesso dei fenomeni fisici, da quelli che son dati dall'*arte*, che sono cioè i prodotti dell'azione dell'uomo. Così avremo per punto di partenza: 1° l'applicazione delle matematiche agli oggetti della natura, applicazione che dà origine alle scienze dette Fisico-matematiche; 2° l'applicazione delle matematiche agli oggetti dell'arte, e questa forma una classe di scienze che potrebbero chiamarsi Prammatico-matematiche.

I. Scienze Fisico-matematiche. La materia, astrazion fatta dalla sua natura, ci si presenta sotto l'aspetto di una qualche cosa *mobile* nello spazio; ora, in un movimento sonovi due cose da considerare, cioè: le leggi che segue nel suo effettuarsi, e le forze motrici che lo producono. Questa considerazione divide le scienze fisico-matematiche in due rami principali, il primo dei quali ha per oggetto generale le leggi delle forze motrici cioè la Meccanica, e il secondo ha per oggetto generale le leggi del moto. Quest'ultimo, che si compone come adesso vedremo di parecchi altri rami o scienze importantissime, non ha ricevuto una denominazione particolare.

La meccanica si divide in quattro rami particolari, i due primi dei quali hanno per oggetto l'*equilibrio* delle forze motrici dei corpi solidi e fluidi, e sono la Statica e l'Idrostatica, e gli altri due hanno per oggetto l'*azione* delle forze motrici dei corpi solidi e fluidi, e sono la Dinamica e l'Idrodinamica.

Le leggi del moto possono esser considerate: 1° in se stesse o *in astratto*, 2° negli oggetti o *in concreto*. Le leggi del moto astratto formano l'oggetto di una scienza che non ha ancora ricevuto un nome particolare, perchè fino ad ora è stata sempre confusa colla dinamica: seguendo alcuni matematici tedeschi noi la chiameremo Foronomia da φορὰ *trasporto*, e νομος *legge*. Le leggi del moto concreto formano l'oggetto di diverse scienze, che sono: 1° l'Idraulica o la scienza del moto dei fluidi; 2° la Pneumatica, o la scienza del moto dei gas; 3° l'Astronomia, o la scienza del moto dei corpi celesti; 4° l'Ottica, o la scienza della *luce*; 5° l'Acustica, o la scienza del moto del *suono*. Il quadro seguente completerà questa classificazione presentandola in un modo più sistematico.

SCIENZE FISICO-MATEMATICHE.
Matematiche applicate agli oggetti della natura.
Leggi del moto.
Leggi delle forze motrici: Meccanica.
Leggi del moto astratto, o considerato in sè stesso: Foronomia.
Leggi del moto concreto, o considerato negli oggetti:
Ponderabili.
Imponderabili.
Terrestri.
Celesti: Astronomia.
Solidi. Questo ramo non si distingue dalla dinamica.
Fluidi.
Liquidi: Idraulica.
Gassosi: Pneumatica.
Propagazione del suono: Acustica.
Propagazione della luce: Ottica generale.
Visione mediata: Prospettiva.
Visione immediata.
Diretta: Ottica propriamente detta.
Indiretta.
Per reflessione: Catottrica.
Per refrazione: Diottrica.
Azione delle forze.
Equilibrio delle forze.
dei corpi solidi: Dinamica.
dei corpi fluidi: Idrodinamica.
dei corpi solidi: Statica.
dei corpi fluidi: Idrostatica, e Aereostatica, quando si tratta in particolare dell' aria.

II. Scienza Prammatico-matematiche. Non si può qui stabilire una classificazione determinata, perchè i diversi rami dell' applicazione delle matematiche alle arti sì fisiche che intellettuali sono tanto indeterminati quanto lo sono queste arti stesse.

Ecco i principali:

Agrimensura,	Balistica,
Architettura,	Cronologia,
Navigazione,	Gnomonica,
Fortificazione,	Geodesia, ec.

Per gli sviluppi opportuni deve ricorrersi ai diversi articoli di questo Dizionario che trattano in particolare di queste scienze.

MATSKO (Giovan Matteo), astronomo e matematico, nato nel 1721 a Presborgo in Ungheria, e morto nel 1796 a Cassel, ha pubblicato: I *Generaliores meditationes de machinis hydraulicis*, Lemgo, 1761, in-4; II *Theoria jactus globorum igniariorum*, Berlino, 1761; III *Theorio virium quas mechanica considerat*, Rinteln, 1765; IV *Methodus rodices aequationum inveniendi*, ivi, 1766; V *Fondamenti del calcolo differenziale* (in tedesco), Cassel, 1768; VI *Observationes astronomicae*, ivi, 1770; VII *Programma de pictura lineari, quam perspectivam dicunt*, ivi, 1772, in-4. Per le altre opere di questo dotto si consulti la *Biografia universale*.

MATTEUCCI (Petronio), astronomo dell' Istituto di Bologna, osservò unitamente a Zanotti la cometa del 1739, e poi quella del 1744. Insieme col medesimo astronomo diresse le riparazioni dello gnomone di Cassini. Si veda su tale particolare la *Meridiana del tempio di S. Petronio rinnovata l' anno 1776.* Osservò il passaggio di Mercurio nel 1786, e rese conto di tale osservazione nel tomo VII delle *Memorie* dell' Istituto di Bologna. Finalmente nel 1798 pubblicò dodici anni di effemeridi col titolo di *Ephemerides motuum coelestium ex anno 1797 in annum 1810, supputatae a Petronio Matheucio*, Bologna, 1798. Matteucci morì nel Dicembre 1810.

MAUDUIT (Antonio Renato), nato a Parigi il 17 Gennajo 1731, fu uno dei migliori professori del suo tempo. L' ordine e la chiarezza mirabile con cui insegnava si ritrova ancora nei libri elementari che pubblicò, libri che non ostante i progressi della scienza e dei metodi possono tuttora esser consultati con frutto e meritano di esser presi a modello in siffatto genere di opere. Ei coprì la cattedra di geometria nel collegio di Francia, e poscia quella di matematiche nelle scuole centrali: fu pure membro della società delle scienze e arti di Metz, e potuto avrebbe riuscire ad essere ammesso nell' Accademia delle scienze di Parigi, se la sua mordacità non gli fosse stata un ostacolo insormontabile. Mauduit morì il 6 Marzo 1815. Ha scritto: I *Élémens des sections coniques démontrés par la synthèse*, 1757, in-8: opera eccellente; II *Introduction aux Élémens des sections coniques*, 1761, III *Principes d' astronomie sphérique, ou traité complet de trigonométrie sphérique*, 1765, in-8; tradotto in inglese da Crokell, nel 1768; IV *Leçons de géométrie théorique et pratique*, 1772, in-8; 1790, in-8; 1809, 2 vol. in-8. V *Leçons élémentaires d' arithmétique*, 1780, in-8; 1804, in-8: è una delle migliori opere che esistano in tale materia.

MAUPERTUIS (Pietro Luigi Moreau de), nato a Saint-Malo il 17 Luglio 1698. I lavori di questo geometra non sono nè numerosi nè abbastanza importanti per meritarli un posto distinto nella storia della scienza: pure è stato giudicato con troppo rigore specialmente in Francia, ove lo spirito ha così spesso ragione contro il sapere; è perciò nostro dovere di rammentare almeno i titoli veri e reali

che aveva acquistato alla stima delle dotte società che lo accolsero nel loro sèno. Maupertuis, che di buon' ora abbandonò la carriera militare per lo studio delle scienze e delle lettere, fu in Francia uno dei primi promotori delle dottrine di Newton; ed è da notarsi che Voltaire, allora suo amico, studiava sotto i suoi auspicj questo sistema che poi pretese di adattare all' intelligenza di tutti, ma cui la natura del suo talento e de' suoi studj non gli permetteva nè di comprendere nè per conseguenza di esporre per istruzione degli altri. Maupertuis fino dal 1723 era membro dell' Accademia delle Scienze, e in tal qualità fu incaricato di dirigere la commissione scientifica che varj anni dopo fu istituita per misurare un grado del meridiano sotto il circolo polare. Egli parlò della parte che ebbe in quella celebre operazione forse con poca modestia ed in modo da diminuire il merito dei suoi collaboratori Clairaut, Camus, Lemonnier e Outhier; ma questo errore o debolezza di spirito che voglia dirsi non deve far sì che debbano esser disprezzati i suoi lavori come geometra in quella difficile e pericolosa operazione, terminata coraggiosamente sotto un clima in cui il termometro acese successivamente ai 20, 25 e 37 gradi sotto zero.

Nel suo *Saggio di Cosmologia*, che Maupertuis pubblicò quando era presidente dell' Accademia di Berlino, propose diverse ipotesi nuove sulla teoria del moto, e fra le altre il *principio della minima azione*, sul quale fino dal 1744 aveva già letto una memoria nell' Accademia delle Scienze: questa scoperta, che certamente gli fa onore, gli attirò una delle contese più violenti che abbiano mai turbato il riposo di un dotto. Koenig, che imprese ad esaminare il valore di questo principio, aveva torto; ma Voltaire, che era divenuto nemico di Maupertuis, e che l'attaccò sotto il ridicolo pseudonimo del *Dottore Akokia*, non aveva diritto alcuno d' intervenire in tal disputa. Non ostante oppresse Maupertuis sotto il peso dei suoi sarcasmi, e il *principio della minima azione*, che quello spiritoso scrittore poco d' altronde si curava d' intendere, un' idea che avrebbe onorato un talento più elevato di quello di Maupertuis, fu posto in ridicolo al segno d' illudere i geometri stessi, che per molto tempo si astennero dall' enunciarlo. La posterità, più giusta, non avrà che un profondo disprezzo per l' ignoranza del *geometra* Voltaire, e il *principio della minima azione* salverà il nome di Maupertuis dall' oblio in cui deve andare a perdersi l' ingiuriosa diatriba del dottore Akakia. Maupertuis, che ebbe il torto gravissimo di farsi cortigiano e di trascurare la scienza che gli aveva aperto un rapido cammino alla fortuna, ha però pubblicato un numero non poco grande di scritti che sono stati raccolti sotto il titolo di *Oeuvres de Maupertuis*: la migliore edizione è quella di Lione, 1768, 4 vol. in-8: tra gli altri vi si osservano i seguenti: 1.° *Essai de cosmologie;* 2.° *Discours sur la figure des astres*; 3.° *Elémens de géographie*; 4.° *Relation d' un voyage fait par ordre du roi au cercle polaire*; 5.° *Memoire sur la moindre quantité d'action.* Ha pure somministrato parecchie memorie alla Raccolta dell' Accademia delle Scienze di Parigi, tra le quali si nota particolarmente la sua *Balistica aritmetica* (anno 1731), ed un comento elegante sulla sezione XII del 1.° libro dei *Principj* di Newton (anno 1732). Maupertuis, la cui salute era stata alterata dai disgusti che aveali cagionato la sua disputa con Koenig e con Voltaire, morì a Basilea il 27 Luglio 1759 in casa dei figli di Giovanni Bernoulli.

MAUROLYCO (Francesco), uno dei più dotti geometri che rammenti la storia della scienza nel secolo XVI, nacque a Messina il 16 Settembre 1494 da una famiglia greca, originaria di Costantinopoli. Ei non ebbe altro precettore che suo padre nelle scienze matematiche, delle quali si è occupato tutta la sua vita con quella perseveranza e con quella attività nelle ricerche che distinguono i dotti della sua epoca. Non crediamo cosa interessante il rammentare il piccolo numero di particolarità che hanno contrassegnato la lunga sua carriera. Maurolyco visse ri-

colmo d' oneri e circondato dalla pubblica stima in quell' Italia nobile e appassionata che ha sempre corone da offrire ai grandi talenti. I suoi lavori sono numerosi ed importanti, specialmente per l' epoca in cui furono fatti. Tutti i diversi rami delle matematiche furono l' oggetto delle sue ricerche e delle sue meditazioni. Gli si debbono delle traduzioni, arricchite di note, dei più grandi geometri dell' antichità. Si accinse a ristabilire, sulla scorta delle indicazioni lasciateci da Pappo, il quinto libro d' Apollonio, che trattava *de maximis et minimis*: e quantunque non sia stato fortunato appieno in tale assunto, è d' uopo convenire che solo un gran geometra ha osato tentarlo (*Vedi* Apollonio *e* Viviani). È autore di varj lavori originali sulle sezioni coniche, e La Hire ha sviluppate ed ampliato il suo metodo nel trattato cui pubblicò su questa parte importante della geometria. Maurolyco perfezionò la gnomonica; giovò pure all'aritmetica (*Vedi* Mariano Fontana), e compose parecchi trattati sull' astronomia, sulla natura degli elementi, sulla meccanica, sulle proprietà della calamita, e sopra altre parti della fisica e della meccanica. Maurolyco giunse ad un' estrema vecchiaja e morì nelle vicinanze di Messina il 21 Luglio 1575. Ecco la lista delle principali sue opere, che anco adesso possono esser consultate con frutto dai geometri: I *Traduzioni latine* di Teodosio, di Menelao, d'Autolico, d'Euclide, d'Apollonio, ec., le più corredate di dotti commentarj che sono stati assai utili ai nuovi editori; II *Cosmographia de forma, situ, numeroque coelorum et elementorum, ec.* Venezia, 1543, in-4; sovente ristampata nel secolo decimosesto; III *Theoremata de lumine et umbra ad perspectivum radiorum incidentium*, Venezia, 1575, in-4: Egli si accostò più che altri, in tale opera, al vero modo onde vediamo gli oggetti; ma gli restavano ancora da vincere varie difficoltà che hanno arrestato lungo tempo coloro che hanno terminato dopo di lui quanto aveva egli incominciato: si può su questo proposito consultare quanto ne dice Montucla nella sua *Storia delle matematiche*, Tom. I, pag. 696 e segg. Clavio ha pubblicato di quest' opera una seconda edizione arricchita di note e di osservazioni, Lione, 1613; IV *Admirandi Archimedis Syracusani monumento omnia quae extant*, Palermo, 1685. Quest' opera è piuttosto un comento o un' imitazione d' Archimede, che una traduzione letterale delle opere dell' antico geometra. La prima edizione essendosi perduta per un naufragio, fu rinnovata colla scorta di un esemplare rinvenuto nel 1681.

MAYER (Tobia), uno dei più celebri e dei più grandi astronomi moderni, nacque il 17 Febbrajo 1723 a Marbach, nel regno di Wurtemberg. I suoi principj furono poveri, ma al pari di tutti i grandi uomini che la scienza chiama ad una bella fama seppe lottare nobilmente contro tutti gli ostacoli, e percorse una breve ma gloriosa carriera. La storia della sua vita è riposta tutta ne' suoi lavori. La sua prima opera comparve nel 1745, ed è un *Trattato delle curve per la costruzione dei problemi di geometria*: nello stesso anno pubblicò un *Atlante matematico*, che è una collezione di sessanta tavole nelle quali sono rappresentate tutte le parti della scienza. Da quest' epoca Mayer si occupò più specialmente di astronomia, e molto contribuì alla pubblicazione delle *Memorie* della società cosmografica di Norimberga, che molta celebrità hanno avuto sotto il titolo di *Kosmographische Nachrichten und Sammlungen.* Nel volume pubblicato nel 1750 si nota soprattutto una memoria contenente le sue osservazioni e i suoi calcoli della librazione della luna. Tale memoria segna un passo importante nella scienza per l' esposizione che Mayer vi fa del *metodo delle equazioni di condizione*, mediante il quale nella risoluzione di un problema invece di essere costretti a fare uso solamente di tante osservazioni quante sono le costanti contenute nell' equazione, si può impiegarne migliaja se si hanno, e si giunge direttamente alle conclusioni più sicure o più probabili che resultano dalla totalità delle osserva-

zioni. A tale metodo, adottato oggigiorno da tutti gli astronomi, è dovuta la precisione che distingue le tavole astronomiche più recenti.

Nel 1751, Mayer si stabilì a Gottinga, ove fu incaricato della direzione dell'Osservatorio. Quivi si applicò egli con assiduità infaticabile alle osservazioni e ai lavori astronomici che hanno reso illustre il suo nome. Imprese a verificare i punti fondamentali dell'astronomia, le refrazioni, la posizione delle stelle e principalmente di quelle dello zodiaco, alle quali si raffrontano giornalmente i pianeti. Il suo catalogo zodiacale contiene 998 stelle, una gran parte delle quali sono state osservate fino 26 volte. Fu pure nell'Osservatorio di Gottinga, ricco di un magnifico quadrante murale di 6 piedi di raggio donato dal re d'Inghilterra, che Mayer terminò le sue tavole lunari ch'ei corresse con la massima cura fino alla sua morte avvenuta il 20 Febbrajo 1762. Tali preziose tavole inviate vennero dalla sua vedova a Londra per concorrere al premio delle longitudini, ed ottennero una ricompensa di 5000 lire sterline (*Vedi* Longitudine); e poichè, in uno scritto intitolato *Methodus longitudinum promota* che avea loro premesso, Mayer aveva indicato come le avesse costrutte e come potessero ancora migliorarsi, Mason per commissione del comitato delle longitudini di Londra, e sotto la direzione di Maskelyne, le rese più precise valendosi di 1200 osservazioni di Bradley. Esse furono pubblicate da Maskelyne col titolo di *Mayer's Lunar tables improved by M. Charles Mason, published by order of the commissioners of longitudes*, Londra, 1787. Per gli stessi mezzi, e giovandosi delle nuove ricerche teoriche di Laplace, le tavole di Mayer furono migliorate successivamente da Bouvard, da Burg e da Burkhardt; ma, qualunque sia il merito dei lavori successivamente intrapresi, converrà dire che non sono nuove tavole, ma le tavole di Mayer alle quali sono state fatte delle leggere correzioni per avvicinarle maggiormente alle osservazioni. Le suddette tavole hanno dunque giustamente reso celebre a perpetuità il nome di Tobia Mayer, al quale è dovuto pure il principio della moltiplicazione indefinita degli angoli, che perfezionato da Borda ha servito a dare tanta precisione ed esattezza alle moderne misurazioni geodetiche.

Le opere di Mayer dovevano esser pubblicate da Lichtenberg, astronomo di Gottinga e suo amico, ma non ne è comparso che un solo volume nel 1775. Esso contiene diverse memorie che tutte in sommo grado attestano l'ingegno di questo giovane ed illustre astronomo. Vi si osserva un progetto per determinare più esattamente le variazioni del termometro, una formula per assegnare il grado medio di calore che conviene ad ogni latitudine ed i tempi dell'anno in cui deve fare il maggior caldo e il maggior freddo, ed un metodo facile per calcolare gli ecclissi solari che ha molta analogia con quello di Keplero. L'elogio di Mayer è stato recitato da Kaestner all'Accademia di Gottinga, e si legge negli Atti di quella dotta società per l'anno 1762: esso termina coll'elenco delle sue opere, di cui le principali, oltre quelle citate di sopra, sono: *Descrizione di un nuovo globo della luna*, Norimberga, 1750; — *Refrazioni terrestri*; — *Descrizione di un nuovo micrometro*; — *Osservazioni dell'ecclisse solare del 1748*; — *Congiunzioni della luna e delle stelle osservate negli anni* 1747 e 1748; — *Prove che la luna non ha atmosfera*; — *Memoria sulla parallasse della luna e sulla sua distanza dalla terra dedotta dalla lunghezza del pendolo a secondi*; — *Della trasformazione delle figure rettilinee in triangoli*; — *Inclinazioni e declinazioni dell'ago calamitato dedotte dalla teoria*; — *Ineguaglianze di Giove*, ec.

MAYER (Federico Cristoforo), accademico di Pietroburgo, ha somministrato agli *Atti* dell'Accademia delle scienze di quella città parecchie memorie che contengono molte cose interessanti: come un metodo d'interpolazione, utile nei calcoli astronomici; dei complicati problemi d'astronomia nautica, risoluti elegantemente

coi mezzi della sola geometria elementare; diversi metodi per osservare le declinazioni delle stelle e l'altezza del polo, per calcolare gli ecclissi lunari, per determinare l'orbita solare, i tempi degli equinozj e dei solstizj e l'obliquità dell'ecclittica.

MAYER (Cristiano), nato in Moravia nel 1719, entrò nell'ordine dei gesuiti, ed ebbe la direzione dell'Osservatorio di Manheim. È morto il 16 Aprile 1783. Le principali sue opere sono: I *Basis palatina*; II *De transitu Veneris*, Pietroburgo, 1769, in-4; III *De novis in coelo sidereo phoenomenis*, 1780, in-4; IV *Pantometrum pacechianum, seu instrumentum novum pro elicienda ex una statione distantia loci inaccessi*, Manheim, 1762, in-4; V *Methode pour lever en peu de tems et avec un petite depense une carte générale exacte de la Russie*, Pietroburgo, 1770, in-8.

MAZEAS (Giovanni Maturino), matematico, nato a Landernau nel 1716, e morto nel 1801, ha pubblicato: *Élémens d'arithmétique, d'algèbre et de géométrie, avec une introduction aux sections coniques*, Parigi, 1758, in-8; opera pregiabile per una precisione ed una chiarezza non comune, e che ebbe molto spaccio: ne furono fatte sette edizioni, di cui l'ultima è del 1788; ed è stata compendiata dall'autore, 1775, in-12.

MECCANICA. Scienza delle leggi dell'equilibrio e del moto, ovvero, più esattamente, scienza delle leggi delle forze motrici. Essa è uno dei rami fondamentali delle matematiche applicate. (*Vedi* Matematiche).

Il nome di *meccanica*, che deriva dal greco μηχανή, *macchina*, indica abbastanza che, nell'origine, questa scienza non aveva per oggetto che conoscenze pratiche sul giuoco e l'uso delle macchine; ma in questa non è succeduto come nella geometria, la denominazione è rimasta malgrado l'immensa estensione della scienza e la sua completa trasformazione. Al giorno di oggi, sotto il nome generale di Meccanica s'indica il complesso di tutte le scienze che si rapportano, tanto all'equilibrio o al moto dei corpi, quanto alle leggi astratte o concrete del moto, quanto alle leggi delle forze motrici, quanto alla costruzione o all'uso delle macchine. Essa è una vasta riunione di conoscenze teoriche e pratiche, di cui le prime formano la *meccanica razionale*, e le seconde la *meccanica pratica* o *applicata*. Quest'ultima sola si avvicina alla meccanica degli antichi.

Dobbiamo al Newton la divisione della meccanica in *razionale* e in *pratica*, e indipendentemente dalle belle e immense scoperte delle quali esso ha arricchito questa scienza, possiamo dire che esso ne ha cangiato la faccia nel suo celebre libro dei principii, per la maniera nuova con cui esso l'ha presentata. Di volo dobbiamo fare osservare che esso non è stato tanto felice nelle considerazioni filosofiche che servono di base alla sua divisione, poichè esso ha preteso che la geometria non sia fondata che sopra delle pratiche meccaniche. Questa confusione di principii ha ciò non ostante eccitato l'ammirazione dei grandi filosofi dell'Enciclopledia!

Quantunque gli antichi avessero portato la costruzione delle macchine ad un grado sorprendente di perfezione, essi non ne hanno conosciuto che tardissimo i principii teorici. Gli scritti di Aristotile ci provano che questo filosofo, e conseguentemente tutti i suoi predecessori, non avevano che delle idee confuse o false sopra la natura dell'equilibrio e del moto. I veri principii dell'equilibrio non risalgono più alto che al tempo di Archimede, ed è questo gran geometra che ne ha stabilite le leggi elementari nel suo libro. *De aequi ponderantibus*. Gli dobbiamo, oltre la teoria della *leva* e quella dei *centri di gravità* le quali si trovano esposte in quest'opera, le teorie del *piano inclinato*, della *puleggia* e della *vite*. Da Archimede fino a Stevin, vale a dire fino al principio del secolo decimosesto, vediamo, è vero, apparire dei grandi meccanici, o piuttosto

dei grandi costruttori di macchine, ma non scorgiamo alcun progresso nella teoria, la quale sembra rimanere sterile tra le mani inabili dei successori dell' illustre matematico di Siracusa.

Vicino a venti secoli passano, e in questo lungo intervallo la scienza impotente non può superare lo stretto circolo delle proposizioni di Archimede; ma finalmente un progresso si manifesta, un nuovo principio si produce, principio fecondo in conseguenza di qualunque genere, questo è il famoso *paralellogrammo delle forze*, se non modellato esattamente, almeno indicato dallo Stevin. Poco dopo, la teoria del *moto variato*, incognita agli antichi, nasce tra le mani del Galileo; le leggi della comonicazione del moto abbozzate dal Descartes, sono stabilite dall' Wallis, dall' Wren, e soprattutto dall' Huygens, il quale diviene, mediante la sua bella teoria delle *forze centrali*, il precursore del Newton. Le scoperte si succedono allora con rapidità, le teorie si sviluppano, i processi del calcolo si estendono, e, come per riacquistare i venti secoli perduti, due secoli bastano per costituire tutti i rami della meccanica generale.

Abbiamo digià indicato, in un gran numero di articoli, l' immensa rivoluzione scientifica cominciata nel secolo decimosettimo, e i prodigiosi lavori di cui siamo debitori al secolo decimottavo; così, per evitare le repetizioni ci contenteremo di esporre in ciò che segue le nozioni preliminari della meccanica, rimandando per le particolarità agli articoli speciali.

1. Il moto di un corpo è la sua presenza successiva in diversi luoghi dello spazio.

2. La causa qualunque in virtù della quale un corpo è messo in moto si chiama *forza*.

3. La *direzione* di una forza è la linea retta che essa tende a far descrivere al punto materiale al quale si concepisce applicata.

4. Due forze sono *uguali* quando esse producono il medesimo effetto, o se, essendo applicate in senso contrario l' una dell' altra ad un medesimo punto materiale, esse si fanno equilibrio.

5. Due forze uguali che agiscono nel medesimo senso possono considerarsi come una sola forza. Si dice allora che quest' ultima è *doppia*. In generale, possiamo prendere una forza qualunque come unità di paragone e allora una forza e *doppia*, *tripla*, ec. ,secondo che essa è formata con la riunione di due, tre, ec., forze uguali ciascuna all' unità. Le forze diventano così delle quantità misurabili, e possiamo rappresentarle con linee o con numeri.

6. Quando più forze sono applicate ad un medesimo corpo, possono presentarsi due casi distinti: o esse si distruggono completamente, e il corpo rimane in riposo, il che si chiama allora *equilibrio*, ovvero queste forze non fanno che modificarsi reciprocamente, e il corpo si mette in moto.

La ricerca delle condizioni dell' equilibrio è l' oggetto di un ramo della meccanica che si chiama Statica, quella della condizione del moto è l' oggetto di un altro ramo che si chiama Dinamica. Quando si tratta di corpi fluidi, le ricerche delle condizioni dell' equilibrio e del moto formano due scienze particolari le quali hanno ricevuto i nomi d' *Idrostatica* e d' *Idrodinamica*. (*Vedi* queste diverse parole).

7. Un corpo che, in tempi uguali, percorre sempre spazj uguali, si dice che si muove *uniformemente*, il suo moto si chiama *moto uniforme*. Se al contrario, in tempi uguali, esso percorre spazj ineguali, il suo moto prende il nome di *moto variato*.

8. Se, di due corpi che si muovono uniformemente, il primo descrive nel medesimo tempo uno spazio maggiore di quello del secondo, si dice che esso si muove con maggiore *velocità*. La sua velocità sarà *doppia*, se lo spazio che esso

percorre è doppio di quello che percorre il secondo, *triplo*, se lo spazio è triplo, e così di seguito. Si chiama dunque *velocità*, nel moto uniforme, il rapporto dello spazio percorso al tempo impiegato a percorrerlo. Così, per un corpo che percorresse 6 metri in 8 secondi, l'espressione numerica della velocità sarebbe $\frac{6}{8}$, prendendo il metro per unità di lunghezza, e il secondo per unità di tempo. Ora, considerando che il quoziente di questa divisione esprime lo spazio percorso in un secondo, si vede che la *velocità* non è che lo *spazio* percorso nell'unità di tempo.

Se indichiamo con E lo spazio, con V la velocità e con T il tempo, avremo l'uguaglianza

$$V = \frac{E}{T},$$

la quale contiene tutte le relazioni di queste tre quantità nel moto uniforme.

9. Dalle definizioni del moto, si vede che la velocità è uniforme nel moto uniforme e che essa è variata nel moto variato.

Per misurare quest' ultima, si considera un tempo infinitamente piccolo nel quale possiamo sempre considerare il moto come uniforme, e si chiama allora, per ciascuno istante, *velocità* del corpo, il rapporto dello spazio infinitamente piccolo percorso in quest' istante al tempo infinitamente piccolo di questo medesimo istante. Così indicando respettivamente con e, v, e t lo spazio, la velocità e il tempo, avremo per l'espressione della velocità

$$v = \frac{de}{dt},$$

de e dt essendo le differenziali di e e di t.

10. Quando la velocità aumenta nella durata di un moto variato, il moto si dice *accelerato*; nel caso contrario, si dice *ritardato*. Se la velocità aumenta o diminuisce sempre in tempi uguali di quantità uguali, il moto è *uniformemente accelerato* ovvero *uniformemente ritardato*.

11. La velocità si distingue in *velocità assoluta* e *velocità relativa*. La velocità assoluta di un corpo è la sua velocità reale ed effettiva, quella che serve a misurare la quantità di cui esso si avvicina o si allontana dagli oggetti che si considerano come fissi nello spazio. La velocità relativa di due corpi, al contrario, è quella che serve a misurare le quantità di cui questi corpi si avvicinano o si allontanano l' uno dall' altro in un tempo dato.

12. L' intensità della forza che muove un corpo, si misura dalla velocità del moto, o dall' effetto che essa produce. Così quando le velocità comunicate ad un medesimo mobile e in un medesimo tempo, sono conosciute, il loro rapporto fa conoscere quello delle forze.

13. Considerando le forze, astrazione fatta dalla loro natura, come proporzionali agli effetti che esse producono, si vede che se due forze, che agiscono sopra due mobili differenti, producono la medesima velocità, quella che avrà messo in moto il mobile di cui la massa è la più grande sarà più grande dell'altra; essa sarà doppia se la massa è doppia, tripla se essa è tripla, ec. In generale il rapporto delle masse darà quello delle forze quando le velocità sono uguali.

14. Le forze essendo proporzionali alle velocità quando le masse sono uguali, e alle masse quando le velocità sono uguali, sono dunque proporzionali ai prodotti delle masse per le velocità, quando le masse e le velocità sono ineguali.

Così la misura generale di una forza è il prodotto della massa del corpo che essa muove per la velocità. Per evitare la considerazione astratta di *forza*, si è chiamato il prodotto che la rappresenta, *quantità di moto*.

Il D'Alembert ha riportato tutte le questioni che si riferiscono all'azione delle forze motrici, a semplici questioni di statica con l'aiuto di un bel teorema, del quale si troverà l'esposizione alla parola *quantità di moto*.

Vedi Moto, Forza, Centrale, Statica, Idrostatica, Idrodinamica. *Vedi* ancora Macchina, Leva, Bilancia, Piano inclinato, ec., ec.

MECHAIN (Pietro Francesco Andrea), astronomo moderno, nato a Laon il 16 Agosto 1744, e morto in Spagna il 20 Settembre 1805. Questo membro distinto dell'Accademia delle Scienze di Parigi ha consacrato l'intera sua vita a lavori oscuri ma preziosi, che poco sono suscettibili di esser sottoposti ad analisi. Questo sacrifizio sì generoso e sì raro di lavori di facile e brillante reputazione ad occupazioni più modeste, quantunque più utili, merita almeno di esser rammentato nella storia della scienza. Méchain tratto a Parigi da una passione invincibile per la scienza vi viveva ignorato e nelle più crude privazioni, quando Lalande ebbe occasione di distinguerlo e di apprezzarne appieno i talenti: ei lo fece nominare astronomo idrografo del deposito delle carte della marina. Fu lungo tempo occupato nei calcoli delle osservazioni che il marchese di Chabert faceva nel Mediterraneo, e mentre attendeva a lavori, sì lunghi, sì oscuri, sì penosi, trovava tempo di fare la notte delle osservazioni astronomiche di cui Lalande pubblicava i resultati. Méchain si applicò specialmente alla ricerca delle comete, le quali, come gli ecclissi, sono un facile oggetto di studj per l'astronomo sprovvisto degli strumenti che presuppongono alcuna ricchezza e che si trovano soltanto nei pubblici stabilimenti. Nel 1781 ebbe la fortuna di scoprirne due di cui calcolò subito l'orbita; ed in seguito, nel corso di diciotto anni, ne scoperse il primo altre nove, delle quali calcolò pure le orbite, come calcolò parimente quelle di altre tredici comete scoperte da altri astronomi, unendo così nella sua persona i meriti e i titoli de' suoi due confratelli Messier e Pingré. Osservatore instancabile quanto il primo, non fu calcolatore inferiore al secondo, e gli elementi delle comete da lui determinati sono abbastanza esatti da potere un giorno riconoscerle e stabilire la periodicità del loro cammino. Il nuovo pianeta Urano, scoperto recentemente da Herschell, fu in principio considerato generalmente come una cometa, quantunque non ne avesse le apparenze; Méchain gli tenne dietro assiduamente, ne calcolò il corso in diverse parabole, e in seguito fu il primo a trattarlo come un pianeta attribuendogli un'orbita circolare.

Méchain concorse insieme con Cassini e con Legendre a determinare la posizione relativa degli Osservatorj di Parigi e di Greenwich, e quando l'Assemblea Costituente decretò lo stabilimento di un nuovo sistema di misure, fondate sulla grandezza del meridiano terrestre, fu uno dei due astronomi scelti per tale operazione, che doveva determinare le differenze terrestre e celeste tra i paralleli di Dunkerque e di Barcellona: a lui fu assegnata la parte che si stende da Rodez a Barcellona. Tale operazione, e i calcoli trigonometrici che ne furono la conseguenza, hanno assorbito interamente il resto della sua vita. Ei fu a un tempo osservatore infaticabile e calcolatore esattissimo. Non ha pubblicato separatamente che i volumi dal 1786 al 1794 della *Connaissance des temps*, nella compilazione della quale era succeduto a Jeaurat, ed alcune memorie sulle comete da lui scoperte e sopra alcune longitudini geografiche. Tutti gli altri suoi lavori si trovano, o nei volumi della *Connaissance des tems*, o nella *Base du système métrique décimal, ou Mesure de l'arc du méridien compris entre les parallèles de Dunkerque et Barcelone faite dans* 1792 *et années suivantes par Méchain et Delambre, redigée par Delambre*, Parigi, 1806, 1807 e 1810, 3 vol. in-4.

MEDIO. In astronomia, questo termine si applica a tutte le quantità che sono ugualmente differenti, o che tengono il mezzo, tra i più grandi e i più piccoli valori di cui si trovano capaci i medesimi oggetti. Così si dice il moto *medio*, il luogo *medio*, la parallasse *media*, il tempo *medio*, l'anomalia *media*, il diametro *medio*, ec. (*Vedi* PIANETA, e i diversi articoli che si riferiscono a queste parole.)

MEDIO PROPORZIONALE O MEDIA PROPORZIONALE (*Alg.*). Quando in una proporzione il *conseguente* del primo rapporto è uguale all'*antecedente* del secondo, la quantità comune che forma questi due termini prende il nome di *media proporzionale*, *aritmetica* o *geometrica*, secondo la natura della proporzione. (*Vedi* PROPORZIONE.)

MEDIA ED ESTREMA RAGIONE. Si dice che una quantità è divisa in *media ed estrema ragione*, quando una delle sue due parti è media proporzionale geometrica tra la quantità intera e l'altra sua parte. (*Vedi* VEDI APPLICAZIONE DELL'ALGEBRA ALLA GEOMETRIA).

MELANDERHIELM (DANIELE MELANDER, nobilitato sotto il nome di), astronomo e geometra svedese, nato il 9 Novembre 1726, si fece di buon'ora conoscere con una memoria intitolata: *De natura et veritate methodi fluxionum*, in cui dimostrava le regole e l'esattezza di tale calcolo in un modo che alcuni geometri hanno trovato preferibile a quello del celebre Maclaurin. Dal prodursi con tal lavoro nel mondo dotto sembrava che Melander volesse applicarsi unicamente all'analisi trascendente, allorchè essendo stato fatto nel 1757 supplente di Strömer, professore di astronomia ad Upsal, si dedicò esclusivamente a questa scienza, della quale divenne professore titolato nel 1761 alla morte di Strömer. Nel corso di quarant' anni che occupò tale cattedra, seppe infondere nella sua patria il gusto degli studj astronomici, ed ebbe per discepoli i più distinti astronomi e matematici che onorino la Svezia, e tra i quali si notano principalmente Svanberg, Sjösten, Ofverbom, Prosperin. Melander, creato nobile nel 1778, cambiò secondo l'uso del paese il suo nome in quello di Melanderhielm, fu creato cavaliere della stella polare nel 1789, e consigliere nel 1801. Il peso dell'età lo indusse negli ultimi anni della sua vita a renunziare alla cattedra, ma non potè ricusare il posto di segretario perpetuo dell'accademia di Stockholm, ufficio che sebbene ristretto successivamente al solo carteggio coi dotti stranieri occupava ancora all'epoca della sua morte avvenuta a Stockholm negli ultimi giorni di Gennajo 1810. Le sue opere sono: I *Isaaci Newtoni tractatus de quadratura curvarum, in usum studiosae juventutis mathematicae explicationibus illustratus a Daniele Melandro*, Upsal, 1762, in-4; II *Danielis Melandri et Pauli Frisii alterius ad alterum de theoria lunari commentarii*, Parma, 1769; III *Conspectus praelectionum astronomicarum continens fundamenta astronomiae*, Upsal, 1779, 2 vol. in-8. Tale opera fu dallo stesso autore dietro le premure fattegli dall'Accademia di Svezia tradotta in svedese e pubblicata con grandi aggiunte nel 1795, in 2 vol. in-8 di circa 900 pag. IV Parecchie memorie sopra soggetti di astronomia, inserite nella Raccolta dell'Accademia di Stockholm. Fu per le sue istanze che il governo svedese ordinò che si facesse una nuova misura del grado di Lapponia, e tale operazione fu affidata a Svanberg e Ofverbom.

MEMBRO (*Alg.*). Si dà questo nome, in una eguaglianza, alle parti separate dal segno $=$. Così in $A+B = M$, $A+B$, è il primo membro ed M il secondo.

MENELAO, geometra greco della scuola d'Alessandria, viveva verso l'anno 80 dell'era nostra. È autore di un'opera divisa in sei libri sul *Calcolo delle corde*, che è perduta. Rimangono tre suoi libri intitolati *Sferici*, di cui l'originale greco è egualmente perduto, ma di cui si hanno due traduzioni, l'una araba e l'altra ebraica. La versione latina fatta sul primo di questi due testi è stata

unita agli *Sferici* di Teodosio nella bella edizione greco-latina che di quest'opera fu pubblicata ad Oxford nel 1707, in-8, con questo titolo: *Theodosii Sphaericorum libri tres*; *Menelai Alexandrini Sphaericorum libri tres*. L'opera di Menelao tratta unicamente dei triangoli, ma non insegna nè a risolverli nè a calcolarli: i suoi teoremi, ad eccezione di un solo, sono di pura speculazione, e di un uso presso che nullo in pratica. Il teorema da noi eccettuato è il primo del terzo libro; dagli Arabi fu denominato *regola d' intersezione*, ed esprime la relazione tra sei archi d'una specie di quadrilatero formato sulla superficie della sfera. Tale teorema, che è l'unico fondamento della trigonometria dei Greci, fu dimostrato da Tolomeo, il quale come Menelao tolto lo avea da Ipparco. Nel riportare tale proposizione al pari di tante altre, Menelao non si ferma a indicarne gli usi.

MENGOLI (Pietro), celebre geometra, nato a Bologna nel 1625, imparò le matematiche dal padre Cavalieri, celebre autore della *Geometria degl' indivisibili*, che fu il primo passo alla scoperta del calcolo differenziale. Il Mengoli ebbe al suo tempo fama di profondo matematico, e annoverò tra' suoi amici e corrispondenti i dotti più illustri di Europa. Morì a Bologna il 7 Giugno 1686: le principali sue opere sono: I *Via regia ad mathematicas per arithmeticam, algebram speciosam et planimetrium ornata*, Bologna, 1655, in-4; II *Geometriae speciosae elementa*, ivi, 1659, in-4; III *Theorema arithmeticum*, 1674, in-4; IV *Arithmetica realis*, ivi, 1675, in-4. Sopra Mengoli si consulti la *Storia delle matematiche* di Montucla, Tom. II pag. 92.

MENISCO (*Ottica*). Vetro lenticolare concavo da una parte e convesso dall'altra. Alla parola Lente abbiamo dato una formula generale per trovare il fuoco in qualunque lente, formula che senza difficoltà si applicherà ai menischi facendo negativo uno dei raggi.

MENO. Parola che in algebra viene rappresentata, col segno —, che indica una sottrazione. Così, A — B significa A *meno* B.

MERCATORE (Niccola Kauffmann, nome che tradusse in quello di), celebre geometra del secolo XVII. Poche notizie si hanno sulla sua vita. Nato nell'Holstein, si era già reso noto per alcune opere, allorchè passò in Inghilterra nel 1660. Fu uno dei primi membri della Società Reale di Londra, ed in seguito si recò in Francia, dove le sue cognizioni in idraulica il fecero chiamare pel lavoro delle fontane di Versailles. Morì a Parigi nel Febbrajo del 1687. Ecco i titoli delle sue principali opere: I *Cosmographia sive descriptio coeli et terrae*, Danzica, 1651, in-8: la trigonometria, la gnomonica, ec., vi sono trattate con singolare concisione; II *Rotiones mathematicae*, Copenaghen, 1653, in-4; III *De emendatione annua diatribes duae, quibus exponuntur et demonstrantur cycli solis et lunae*, ivi, in-4; IV *Hypothesis astronomica nova, et consensus ejus cum observationibus*, Londra, 1664, in-fol.; V *Logarithmotechnia, sive Methodus construendi logarithmos nova; cui accedit vera quadratura hyperbolae, et inventio summae logarithmorum*, ivi, 1668-74, in-4; VI *Institutiones astronomicae*, ivi, 1676, in-8; nuova edizione, Padova, 1685, in-4; VII *Euclidis elementa geometrica novo ordine ac methodo fere demonstrata, cum introductione brevi in geometriam*, ivi, 1678. Si hanno ancora di Mercatore parecchie memorie interessanti nelle *Transazioni filosofiche* del tempo. L'opera sua principale è la *Logarithmotechnia*, che gli assicura un posto distinto tra quelli che ampliarono i confini della geometria. In quest'opera, di cui è stato parlato all'articolo Leibnitz, cercando di applicare all'iperbola le regole dell'*Aritmetica degl' infiniti* di Wallis, Mercatore scoprì una serie che applicò alla costruzione dei logaritmi; Montucla espose tale scoperta ingegnosa nella sua *Storia delle Matematiche*, tom. II, pag. 356 e segg. Non sarà però discaro ai nostri lettori il darne qui un' idea succinta. Fino dal 1647, il p. Gregorio da S. Vincenzio, e

dopo di lui il p. Mersenne, avevano osservato che le aree comprese tra l' iperbola e il suo asintoto esprimevano il valore dei logaritmi delle ascisse corrispondenti misurate sull' asintoto; era pure noto che l' iperbola equilatera, il cui semiasse è eguale a $\sqrt{2}$, aveva per equazione $y = \frac{1}{1+x}$; e Wallis aveva già fatto vedere, nella sua *Arithmetica infinitorum*, pubblicata nel 1655, che se una curva aveva per equazione $y = 1+x+x^2+x^3+$ec., la sua area era rappresentata esattamente dalla serie infinita $x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} +$ ec. Mercatore, avendo eseguita la la divisione accennata nella equazione $y = \frac{1}{1+x}$, rimase colpito dall' analogia che scorse tra il resultato ottenuto $y = 1-x+x^2-x^3+$ec., e l' equazione considerata da Wallis; cercò con un metodo simile a quello tenuto da questo geometra l' area dell' iperbola, e trovò che era rappresentata dalla serie infinita $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$ ec., serie che conformemente all' osservazione del p. da S. Vincenzio esprimeva il logaritmo di $1+x$.

MERCATORE (Gerardo), nato a Rupelmonde nel 1512, si applicò con sommo studio alle scienze matematiche sotto la direzione di Gemma Frisio, e vi fece progressi sì rapidi, che non appena uscito dalla scuola fu in grado di dar lezioni di geometria e di astronomia. Stette alcun tempo agli stipendi dell' imperatore Carlo V, e quindi ottenuto avendo il titolo di cosmografo del duca di Juliers si ritirò nel 1559 a Duisburg, ove morì nel 1594. Mercatore è noto principalmente per aver dato il suo nome al metodo di projezione geografica di cui adesso si fa generalmente uso nella costruzione delle carte idrografiche, e nel quale i meridiani sono rappresentati da linee rette parallele tra loro, e i paralleli di latitudine, rappresentati anch' essi da linee rette, tagliano ad angolo retto i meridiani; la qual cosa non può ottenersi che ingrandendo la scala ed allungando i gradi di latitudine a misura che aumenta la distanza dall' equatore. Non sembra però che Mercatore abbia conosciuta la legge matematica che regola questo progressivo allungamento. L' elenco delle opere di Mercatore si trova nell' articolo biografico che lo riguarda nella *Biografia universale*.

MERCURIO (*Astron.*). Nome di uno dei pianeti del nostro sistema solare, ed il primo nell' ordine delle distanze dal sole. Viene indicato col segno ☿.

Mercurio descrive intorno al sole un' orbita ellittica assai allungata, la cui eccentricità supera il quinto della distanza media. Esso compie la sua rivoluzione siderale in un periodo di circa 88 giorni, girando sul suo asse presso a poco in 24 ore, come la terra; ma resta talmente involto nei raggi solari che non offre alla vista che un disco così brillante di luce da rendere impossibile lo scoprirvi alcuna macchia sulla quale possa stabilirsi qualche congettura per determinare la sua costituzione fisica. Nulladimeno, siccome questo pianeta al pari di tutti gli altri non ci apparisce luminoso che in forza dei raggi solari che esso ci riflette, e di più la sua orbita è racchiusa interamente in quella della terra, così è naturale il supporre che esso si trovi spesso rapporto a noi in situazioni tali che il suo emisfero illuminato non possa esser veduto che in parte o anco rimanga totalmente invisibile; finalmente, Mercurio deve presentarci delle *fasi* come la *luna*, ed è infatti dietro l' osservazione continuata delle apparenze di tali fasi che Schroeter è giunto a determinare la durata della rivoluzione di questo pianeta sopra sè stesso.

Il diametro di Mercurio, confrontato con quello della terra, sta nel rapporto dei numeri 0,39 e 1, e per conseguenza il rapporto dei volumi di questi corpi è presso a poco quello di 0,06 a 1. La massa di Mercurio, dedotta dalla teoria dell' attrazione, è espressa da 0,18, prendendo per *unità* quella della terra, donde resulta che la sua densità media sta a quella della terra come 2,78 a 1. Da ciò può concludersi che i materiali che compongono questo piccolo globo hanno un peso specifico medio superiore a quello del mercurio; perchè la densità media della terra è presso a poco eguale a quella dell' acqua. Nessun' altra particolarità si conosce rispetto a questo pianeta, che si crede però circondato da un' atmosfera.

Ecco i suoi elementi riferiti al 1° Gennajo 1801.

Semiasse maggiore, preso per unità quello della terra . . .	0,3870981
Eccentricità in parti del semiasse maggiore	0,2055149
Periodo siderale medio, in giorni solari medj.	87^g,9692580
Inclinazione dell' orbita sull' ecclittica.	7° 0′ 9″,1
Longitudine del nodo ascendente	45 57 30 ,9
Longitudine del perielio.	74 21 46 ,9
Longitudine media dell' epoca	166 0 48 ,6
Diametro, preso per unità quello della terra.	0,398
Rivoluzione sul suo asse	24^{or} 5′ 28″,3

Prendendo per termine di confronto la lega di 2000 tese, si scorge che la distanza media di Mercurio dal sole è di 15185465 leghe, la minima di 12064624, e la massima di 18306306, e che le sue distanze dalla terra variano tra i limiti estremi di 5819567 e di 20264433 leghe. Il suo diametro ha 1255 leghe.

Qualche volta Mercurio passa avanti al disco del sole e ci presenta un fenomeno analogo a quello degli ecclissi di quest' astro occasionati dalla luna, ma a motivo dell' estrema sua piccolezza esso ci comparisce allora soltanto come una piccola macchia che non può scorgersi che coll' ajuto del telescopio. La prima osservazione di questo fenomeno è stata fatta da Gassendi a Parigi il 7 Novembre 1631; in seguito è stata ripetuta frequentemente.

MERIDIANO (*Astron.*). (Dal latino *meridies, mezzo del giorno*). Circolo massimo della sfera celeste che passa per lo zenit, pel nadir e pei due poli del mondo. Questo circolo, che è perpendicolare all' equatore, divide la sfera in due parti eguali o in due emisferi, uno dei quali dicesi *orientale* e l' altro *occidentale*. *Vedi* ARMILLARE.

In geografia si dice *meridiano terrestre* un circolo terrestre, corrispondente al meridiano celeste, che si trova nello stesso suo piano, e che passa pei poli della terra. A parlar propriamente, il meridiano terrestre non è altro che l' intersezione della superficie della terra col piano del meridiano celeste.

Si veda alla parola LONGITUDINE l' uso dei meridiani per la determinazione della posizione dei luoghi terrestri.

Si dice *linea meridiana*, o semplicemente *meridiana*, una linea tracciata sopra una superficie qualunque nel piano del meridiano, o più esattamente la intersezione del piano del meridiano con una superficie qualunque.

La *meridiana* è di una utilità indispensabile nell' astronomia, nella gnomonica, nella geografia, ec., e di un uso frequente nella vita civile. La sua esatta determinazione è della più alta importanza, e perciò per ottenerla si sono inventati degli strumenti particolari e diversi metodi. All' articolo GNOMONICA abbiamo fatto conoscere un metodo semplicissimo per descrivere una meridiana; adesso passeremo ad esporre qualche altro mezzo più esatto.

La stella polare non essendo lontana dal polo che di circa soli due gradi, essa indica sempre presso a poco il nord in qualunque istante si osservi; ma se si sceglie il momento in cui è al meridiano, quando ancora si sbagliasse di qualche minuto, si otterrà per mezzo di questa stella la direzione del meridiano con una gran precisione. Basterà abbassare un primo filo a piombo, il cui piede indicherà uno dei punti della meridiana sulla superficie orizzontale o inclinata sulla quale si vuol condurre questa linea; quindi un secondo filo a piombo, situato a qualche distanza dal primo e che si porterà a destra o a sinistra finchè la stella polare non sia coperta dai due fili, darà un secondo punto, e non si tratterà più che di condurre una retta che passi per questi due punti. Facendo questa operazione due volte, quando la stella è nella massima sua deviazione verso l'oriente e nella massima deviazione verso l'occidente, e prendendo il mezzo, si avrà egualmente la meridiana esatta.

Con un solo filo a piombo, segnando esattamente due punti dell'ombra che questo filo projetta ai raggi solari in due momenti differenti in cui il sole si trovi ad una stessa altezza al di sopra dell'orizzonte, si può formare un angolo, che basta poi dividere in due parti eguali con una retta che è la meridiana. L'operazione riuscirà allora tanto più esatta, se le altezze eguali saranno state osservate in molta vicinanza del meridiano e con quarti di circolo ben graduati, e se il piano sul quale saranno stati segnati i punti di ombra sarà perfettamente orizzontale. Tracciata una volta la meridiana sopra un piano orizzontale, sarà facile il farla passare per un piano qualunque inclinato, declinante, ec., perchè basterà ottenerne la projezione per mezzo di perpendicolari innalzate sul piano orizzontale in due dei suoi punti.

Quando si è tracciata provvisoriamente una meridiana con uno dei mezzi di sopra accennati, ponendo nel suo piano un quarto di circolo armato di un canocchiale, possiamo rettificarla osservando i passaggi degli astri al meridiano, e confrontando i tempi delle osservazioni con quelli che danno le effemeridi; ma allora è necessario avere un buon pendolo, il cui moto sia ben noto. Si veda per tutte le particolarità occorrenti in pratica l'*Astronomia* di Lalande.

Si dice *meridiana del tempo medio* una curva a forma di 8, che si descrive intorno alla linea del mezzogiorno in un orologio solare, e che indica il mezzogiorno in tempo medio in ciascun giorno dell'anno. Il metodo di costruirla si trova indicato in tutti i trattati di gnomonica.

MERSENNE (Marino), religioso dell'ordine dei Minimi, occupa un posto distinto tra i geometri del secolo XVII, meno forse per la natura e per l'importanza de' suoi propri lavori, che per aver servito di corrispondente e d'interpositore tra i principali dotti del suo tempo. Nato nel 1588 nel borgo di Oizé nel Maine, incominciò gli studj nel collegio di Mans e andò a terminarli in quello di la Flèche recentemente istituito. Quivi conobbe Cartesio, e preso d'ammirazione per quell'ingegno sublime, che già si rivelava per l'ardire e per l'elevatezza delle sue idee, strinse con quell'uomo sommo una di quelle amicizie fondate sulla stima reciproca, cui non possono modificare nè il tempo nè la diversità della posizione sociale. Mersenne, dotato di una pietà sincera che lo allontanava dal mondo, si consacrò alla vita religiosa, e nel 1611 entrò nell'ordine dei Minimi, senza però abbandonare lo studio delle scienze. Fece diversi viaggi in Olanda e in Italia, e strinse quei moltiplici legami coi dotti che per parte sua necessitarono una corrispondenza attivissima, che fu tanto utile ai progressi della scienza, e che gli meritò la stima e la riconoscenza degli uomini celebri di quell'epoca memorabile. Difese con calore Cartesio contro i suoi detrattori, lo riconciliò con Fermat, ed osò dichiararsi contro le ingiuste sevizie che tormentavano i vecchi anni di Galileo, pubblicando in Francia il *Trattato di meccanica*

di quell' uomo straordinario. La Francia dovette pure al p. Mersenne la cognizione delle belle scoperte di Torricelli sol vuoto; esperienze che ripetute poi al Puy-de-Dôme da Pascal e da Perier sono divenute la base della fisica moderna. Il carattere e la dottrina di questo religioso gli diedero un grande ascendente sui suoi contemporanei, ed hanno inseparabilmente associato il suo nome a tutte le discussioni e a tutti i progressi scientifici del suo tempo. Ei morì a Parigi il primo Settembre 1648, in seguito di una malattia per la quale l'ignoranza di alcuni medici gli fece subire una dolorosa ed inutile operazione.

Ecco ciò che di lui dice Baillet, lo storico di Cartesio: » Mersenne era il » dotto del secolo che aveva il più buon cuore. Non si poteva avvicinarsegli » senza lasciarsi prendere dalle sue grazie: nessun mortale fu mai tanto curioso » di penetrare i segreti della natura, e bramoso di portare le scienze alla perfe- » zione. Le relazioni che manteneva con tutti i dotti l'avevano reso il centro » di tutti i letterati: a lui inviavano i loro dubbj, onde col suo mezzo fossero » proposti a quelli da cui se ne attendevano le soluzioni . . . . . La sua pas- » sione di essere utile non si limitò alla sua vita, ed aveva ordinato ai medici, » morendo, di fare l'apertura del suo corpo onde potessero conoscere la causa » della sua malattia ». Mersenne è autore di un gran numero di opere, molte delle quali interessano le matematiche. Noi citeremo soltanto le principali di quelle che a tali scienze si riferiscono: I *Cogitata physico-mathematica*, *in quibus tam naturae quam artis effectus admirandi certissimis demonstrationibus explicantur*, Parigi, 1644, in-4. Tale volume contiene i seguenti trattati: 1.° *De mensuris*, *ponderibus atque nummis haebroicis*, *graecis et romanis ad gallica expensis*; 2.° *Hydraulica*, *pneumatica*, *arsque navigandi*; 3.° *Harmonica theorica*, *practica et mechanica phoenomena*; II *Universae geometriae*, *mixtaeque mathematicae synopsis*, ivi, 1644, in-4. Vi si trova: *Euclidis elementa*; — *Rami geometria*; — *Archimedis opera*; — *Theodosii*, *Meneloi*, *Maurolyci*, *Autolyci sphaerica*; — *Apollonii*, *Mydorgii conica*; — *Mechonicorum libri duo*, *et opticorum libri septem*. Queste ultime due opere sono dell'autore, e contengono i principj fondamentali dell'ottica, della catottrica, della diottrica, della parallasse e delle refrazioni. L'*Ottica* e la *Catottrica* del p. Mersenne furono pubblicate in francese colla *Prospettiva* di G. F. Niceron, Parigi, 1652, in-fol. III *Novae observationes physico-mathematicae*, *quibus accessit Aristarchus Samius de mundi systemate*, Parigi, 1647, in-4. Questo volume serve di supplemento e di continuazione ai due precedenti. Il p. Mersenne aveva pubblicato, tre anni prima, il trattato di Aristarco di Samo: *De mundi systemate*, *partibus et motibus ejusdem*, *ex arabo latine*, *cum Ægid. Roberval notis*, Parigi, 1644, in-12. IV *Les Méchaniques de Galilée traduites de l'italien*, Parigi, 1634, in-8. Mersenne ebbe il merito di far conoscere il primo tale opera in Francia, e vi aggiunse parecchie osservazioni importanti; V *Harmonie universelle*, *contenant la théorie et la pratique de la musique*, *ec.* Parigi, 1636, in-fol. Quest' opera importante è divenuta rarissima: l'autore ne ha pubblicato un compendio in latino, in cui si trovano delle figure di strumenti omesse nel testo francese: questo compendio ha per titolo: *M. Mersenni Harmonicorum libri XII*, Parigi, 1636, in-fol.

MESE (*Calend.*). È stato dato questo nome alla dodicesima parte dell'anno. *Vedi* Calendario.

Come si hanno differenti specie di anni, così vi sono differenti specie di *mesi*: per esempio, vi è il *mese solare*, il *mese lunare*, il *mese civile*, ec.

Si dice *mese solare* lo spazio di tempo che impiega il sole a percorrere un segno dell'ecclittica: i mesi solari sono diseguali, perchè il sole va più lentamente ne' segni dell'estate che in quelli dell'inverno. Dividendo per 12 l'intera durata

dell' anno, che è di 365 giorni, 5 ore, 48 minuti e 52 secondi, si ottiene la lunghezza del mese solare medio, che è di 30 giorni, 10 ore, 29 minuti e 4 secondi. Siccome però per gli usi della vita sarebbero troppo incomode queste frazioni di giorno, così nel *calendorio civile* i mesi si compongono di un numero intero di giorni, che è di 30 o di 31, ad eccezione di Febbrajo che ne ha 28 negli anni comuni e 29 nei bisestili.

I *mesi lunari* sono o *sinodici* o *periodici*: il *sinodico*, che si dice ancora semplicemente *mese lunare*, o *lunazione*, è lo spazio di tempo compreso tra due congiunzioni della luna col sole, ossia tra due novilunj: la sua durata è di 29 giorni, 12 ore, 44 minuti e 3 secondi; il *periodico* è lo spazio di tempo nel quale la luna fa la sua rivoluziona intorno alla terra, cioè il tempo che essa impiega a tornare allo stesso punto dell' ecclittica; la sua durata è di 27 giorni, 7 ore, 43 minuti e 5 secondi.

MESSIER (Carlo), astronomo, nato a Badonviller in Lorena nel 1730, si recò a Parigi in età di venti anni, senz' altro ajuto, senz' altra raccomandazione che una scrittura nitida e chiara, e una certa franchezza nel disegnare. Essendo stato impiegato come scrivano nell' osservatorio di Delisle, si accese in lui una passione straordinaria per le osservazioni astronomiche che decise irrevocabilmente della sua carriera. Dapprima, seguendo gli ordini ricevuti da Delisle, fu obbligato a tenere un ordine sistematico ed arbitrario nelle sue ricerche, e non pubblicò alcuna delle sue osservazioni; ma poichè questo vecchio astronomo ebbe rinunziato alle scienze e alla sua cattedra nel Collegio Reale, Messier libero di sè e de' suoi studj si diede con uno zelo instancabile alla investigazione del cielo. Pel corso di quindici anni quasi tutte le comete che furono scoperte il furono da lui. La sua reputazione si dilatò per tutta l' Europa, le principali accademie furono sollecite ad ammetterlo nel loro seno, il suo titolo di *scrivano* fu mutato in quello di *astronomo*, e l' Accademia di Parigi gli aprì le sue porte nel 1770. Tali onori non fecero che raddoppiare il suo zelo; ei non abbandonò più il suo osservatorio, ed anco nei tempi procellosi della rivoluzione, quantunque privato della sua pensione, continuò ad osservare colla stessa perseveranza. In giorni più sereni, l' Istituto, l' Ufizio delle longitudini, la Legione d' onore ripararono le sue perdite. Ei morì a Parigi il 12 Aprile 1817: di lui non esistono che alcune memorie in cui riferisce diverse sue osservazioni, e che si leggono o nella Raccolta dell' Accademia, o nei volumi della *Connaissance des temps*.

MESSIER (*Astron.*). Costellazione boreale introdotta nelle nuove carte celesti in occasione della cometa del 1774, scoperta dall' astronomo Messier. Essa si compone di alcune stelle informi situate tra Cassiopea, Cefeo e la Giraffa.

METODO. Regola particolare che si segue per acquistare delle conoscenze.

Nelle *Matematiche*, s' indicano specialmente sotto il nome di *Metodi*, le proposizioni ausiliari ovvero i processi con l' aiuto dei quali si giunge alle proposizioni definitive. Per esempio, se per dimostrare il teorema dell' *equivalenza tra la superficie del circolo e il prodotto della sua circonferenza per la metà del suo raggio*, si considerano successivamente dei poligoni regolari inscritti e circoscritti e i quali si elevano per gradi approssimativi fino alla superficie del circolo, ci saremo serviti del metodo indiretto degli antichi, chiamato *Metodo di esaustione*. Nel mentre che se si considera immediatamente il circolo come un poligono regolare di un numero indefinito di lati per concluderne l' espressione della superficie, avremo adoprato il *metodo degli indivisibili*.

La classazione dei metodi matematici e la natura della certezza che comporta la loro applicazione non erano ancora stati oggetto di ricerche filosofiche, avanti la pubblicazione dell' opera tanto degna di stima del signor Wronski, sopra la *Filosofia dell' infinito*. Questo geometra, i lavori del quale cominciano un' era

nuova per le matematiche, ha portato nell' esame dei metodi quelle alte considerazioni filosofiche, alle quali esso ha riattaccato la scienza in queste diverse opere. Non possiamo meglio indicare l' estrema importanza del punto di vista superiore ove egli si è posto, che riportando in questo punto parola per parola i suoi principali resultamenti.

Dopo aver stabilito, nel modo il più rigoroso, che l'*infinito* è non solamente un istrumento esatto per le ricerche matematiche, ma ancora che esso è l'elemento il più importante delle verità matematiche esse stesse, e che in una parola, *non è che per mezzo dell' infinito che la scienza delle matematiche è possibile*, il sig. Wronski divide i metodi matematici in due classi; di cui la prima si compone dei metodi i quali non contengono che *implicitamente* l' idea dell' infinito, e la seconda dei *metodi infinitesimali* ovvero dei metodi che contengono *esplicitamente* l' infinito. Quest' ultimi sono quelli che risalgono *fino ai primi elementi* della generazione delle quantità, e i quali, conseguentemente, ci presentano il più alto grado d' interesse.

» Ora, dice egli, abbiamo due facoltà intellettuali distinte che possono condurci, più o meno esattamente, fino a questi primi elementi della generazione delle quantità: queste sono il Giudizio e la Ragione ».

» Il Giudizio come facoltà transitoria dell' Intendimento alla Ragione, può, per una specie d' anticipazione sopra quest' ultima, scoprire più o meno rigorosamente le determinazioni dell' infinito negli elementi della generazione delle quantità. La ragione, come facoltà dell' infinito, crea essa stessa queste determinazioni indefinite negli elementi della generazione delle quantità. — Così, servendoci in questo punto delle facoltà del Giudizio, i metodi fondati sopra questa facoltà non possono che *presumere* i primi elementi della generazione di cui v' è questione; nel mentre che servendoci della facoltà della ragione, i metodi fondati sopra quest' ultima facoltà RIPRODUCONO O DETERMINANO essi stessi questi elementi. Ed è per questo motivo che chiameremo i primi *metodi presuntivi*, e gli ultimi *metodi determinativi*. — Tale è dunque la prima divisione *a priori* dei metodi matematici che contengono esplicitamente l'idea dell' infinito. — Procediamo alla loro suddivisione ».

» Nei metodi presuntivi, che sono fondati sopra la facoltà del Giudizio sembra da principio, non attaccandoci che alla diversità delle funzioni di questa facoltà, che si potrebbe procedere per due differenti vie; poichè le funzioni in qualche sorte razionali del Giudizio, quelle che portano sulla transizione e l'intendimento, sono di due specie: l' induzione e l' analogia. Questi metodi presuntivi presenterebbero dunque, sotto quest' ultimo punto di vista, due specie particolari: le une fondate sull' induzione, che perciò chiameremo *metodi induzionali*; le altre, fondate sull' analogia, che, per questa ragione, chiameremo, almeno problematicamente, *metodi analogici*. Ma un poco di riflessione basta per riconoscere che gli ultimi di questi metodi, i metodi analogici, non potrebbero esistere. Infatti la funzione intellettuale, chiamata analogia, sopra la quale si troverebbero fondati questi metodi, porta essenzialmente sopra la specificazione, e non sopra la maniera di render generali le nostre conoscenze, vale a dire che questa funzione serve propriamente a discendere dalla Ragione all' Intendimento, e non a risalire da quest' ultima facoltà alla prima; dimodochè, col mezzo di questa funzione intellettuale, non si potrebbe niente affatto risalire ai primi elementi della generazione delle quantità, il che è l'oggetto generale dei metodi infinitesimali. Non rimane dunque di possibile, tra i metodi presuntivi, che i soli metodi induzionali. — Proseguiamo questa determinazione ».

» I metodi induzionali possono essere adoprati 1.° nella geometria, riferendosi sull' idea dell' infinito, applicata allo SPAZIO, e 2.° nell' algoritmia, riferendosi

all' idea dell' infinito, applicata al Tempo, che è il principio dei numeri. — Ne segue che questi metodi, considerati rapporto al loro scopo, formano due rami distinti *il metodo induzionale geometrico* e il *metodo induzionale algoritmico.* »

» Ora, il metodo degli antichi, conosciuto sotto il nome di *metodo di esaustione*, del quale sembra che dobbiamo la scoperta ad Archimede, non è evidentemente altra cosa che il metodo induzionale geometrico che abbiamo dedotto da principii *a priori.* »

Avendo fatto osservare che, dalla natura della facoltà intellettuale che agisce in questo metodo, il cui scopo è quello di risalire agli elementi indefiniti dell' *estensione*, esso non può, per se stesso, condurre che a verità presuntive, di una probabilità continuamente maggiore, ma il quale non potrebbe condurre a resultamenti rigorosi ovvero giungere alla *certezza*; il signor Wroushi prova inseguito che il *metodo induzionale algoritmico* è il *metodo di approssimazione* propriamente detto, metodo del quale abbiamo in altra parte esposto il carattere distintivo. (*Vedi* Approssimazione). Non lo seguiremo negli sviluppi, e passeremo a ciò che esso dice dei metodi infinitesimali determinativi.

» Abbiamo già veduto di sopra, dalla deduzione di questi metodi, che essi sono fondati immediatamente sull' uso della Ragione essa stessa. Ne segue che i resultamenti ai quali conducono i metodi determinativi di cui si tratta, sono di una rigorosa esattezza. — Ed è questo il carattere distintivo di questi metodi; e non ci rimane per conoscerli completamente, che a fissare a priori le differenti vie per le quali la ragione può risalire ai primi elementi della generazione delle quantità, poichè queste differenti vie sono evidentemente ciò che costituisce la specificazione dei metodi dei quali parliamo. »

» Ora, siccome non si tratta in questo punto che della sola funzione della ragione che produce l' idea dell' infinito, è in primo luogo chiaro che le differenti vie delle quali vi è questione, non potrebbero essere fondate sopra la differenza delle funzioni di questa facoltà superiore. Di più, ne segue che la prima specificazione di queste vie della ragione, se essa è possibile, dev' essere fondata sopra la differenza dell' uso Puro della ragione, nella produzione dell' idea dell' infinito, e sopra l' uso di questa facoltà Riunita all' intelletto: da ciò resulterebbe una divisione dei metodi infinitesimali determinativi di cui si tratta, in *metodi diretti* e in *metodi indiretti*. Questa divisione ha luogo realmente, perchè il doppio uso della ragione, sopra la quale si trova fondata questa divisione, ha luogo effettivamente. »

» I metodi diretti i quali si riportano sull'uso puro della ragione nella produzione dell' idea dell' infinito; si suddividono naturalmente in quelli che risalgono agli elementi indefiniti dello Spazio ovvero dell' estensione, e in quelli che risalgono agli elementi indefiniti del Tempo ovvero dei numeri. I primi formano il metodo conosciuto sotto il nome di *Metodo degl' indivisibili*, e gli ultimi costituiscono il *Calcolo differenziale* . . . . . »

» Confondendo le applicazioni Geometriche del calcolo differenziale con la natura medesima di questo calcolo, che è puramente Algoritmico, come nell' occasione del metodo di esaustione degli antichi, i geometri hanno creduto, ancora qui, che il metodo degl' indivisibili e il calcolo differenziale fossero identici; ed è, infatti, fondandosi sopra questa pretesa identità, che essi si sono immaginati che la vera scoperta del calcolo differenziale risalisse alla scoperta dei diversi metodi particolari degl' indivisibili. Questo è un errore: il metodo degl' indivisibili e il calcolo differenziale non hanno di comune che l' idea dell' indefinito che ne è il fondamento; ma questi due metodi differenti essenzialmente nella loro propria natura dei metodi, l' uno porta sopra l' indefinito dello spazio o dell' e-

stensione, e l'altro sopra l'indefinito del tempo o dei numeri; il che certamente è una cosa differentissima, e esige processi essenzialmente diversi. Per convincersene, basta considerare *in astratto*, come si deve, da una parte la generazione puramente algoritmica delle funzioni differenziali, e dall'altra parte, la generazione puramente geometrica degli elementi detti indivisibili. »

Abbandoneremo ancora quì gli sviluppi per passare ai metodi indiretti i quali, come lo abbiamo veduto sopra, sono fondati sull'uso della Ragione riunita all'Intelletto, nella produzione dell'indefinito.

» Nella riunione di queste due facoltà intellettuali, l'idea dell'indefinito, considerata obiettivamente, come Scopo dell'Intelletto, si trasforma in idea della Continuità; e considerata subiettivamente come Mezzo dell'Intelletto, essa si trasforma nell'idea della Discontinuità indefinita. Così, i metodi indiretti di cui si tratta, debbono, secondo questa doppia determinazione dell'indefinito, suddividersi in due classi, una fondata sopra la legge di continuità, e l'altra sopra la legge di discontinuità indefinita. »

» La prima classe di questi metodi è facile a riconoscersi: ed è, infatti, il metodo conosciuto sotto il nome di *Metodo dei limiti o delle prime e ultime ragioni*. — Quanto alla seconda classe, bisogna per riconoscerla, cominciare dal sapere che la discontinuità indefinita che ne è il fondamento, dà, in fatto di algoritmia, la sommazione indefinita che costituisce l'algoritmo tecnico delle serie (*Vedi* Filos. della Matem.); dimodochè, nella determinazione della serie indefinita dei termini che formano queste funzioni, debbono necessariamente entrare i primi elementi della generazione delle quantità che sono l'oggetto delle serie. E, infatti, come si sa dal teorema del Taylor e generalmente dalla nostra legge delle serie, le funzioni che formano i coefficienti sono funzioni differenziali o infinitesimali. Così, la seconda classe dei metodi di cui si tratta, deve evidentemente portare sopra i coefficienti dello sviluppo delle funzioni in serie; e, come possiamo riconoscerlo ora con facilità, questa seconda classe di metodi non è altro che il metodo conosciuto generalmente sotto il nome di *Metodo di derivazione*, e particolarmente sotto il nome di *Teoria delle funzioni analitiche*. »

» Questa deduzione dei due ultimi metodi, cioè, del metodo dei limiti e del metodo di derivazione, fissa immediatamente il loro vero carattere. Si vede infatti che in seguito di questa deduzione, il carattere comune di questi metodi consiste in ciò che essi non raggiungono l'indefinito che nel suo Resultamento (nella sua applicazione all'Intelletto), e non nel suo Principio (nella Ragione essa stessa). Da ciò viene essenzialmente per verità, che questi metodi possono essere sostituiti al calcolo differenziale, ma che io se stessi, essi non potrebbero essere concepiti o spiegati che per mezzo del calcolo differenziale. »

I metodi infinitesimali primitivi si trovano dunque riepilogati nel seguente quadro:

QUADRO dei METODI INFINITESIMALI PRIMITIVI

- Ascensione agli elementi indefiniti per mezzo della facoltà del Giudizio — METODI PRESUNTIVI
  - Per mezzo della funzione chiamata induzione — METODI INDUZIONALI
    - Ascensione agli elementi indefiniti dello spazio ovvero dell' estensione — METODO DI ESAUSTIONE
    - Ascensione agli elementi indefiniti del tempo ovvero dei numeri — METODO DI APPROSSIMAZIONE
  - Per mazzo della funzione chiamata analogia
    - METODI ANALOGICI (essi sono impossibili.)
- Ascensione agli elementi indefiniti per mazzo delle facoltà della Ragione — METODI DETERMINATIVI
  - Per l' uso puro della ragione — METODI DIRETTI
    - Ascensione agli elementi indefiniti dello spazio o dell' estensione. — METODO DEGL' INDIVISIBILI
    - Ascensione agli elemanti indefiniti del tempo o dei numeri. — CALCOLO DIFFERENZIALE.
  - Per l' uso della ragione riunita all' intelletto — METODI INDIRETTI
    - Obiettivamente, come scopo dell' intelletto per la legge di continuità. — METODO DAI LIMITI O DALLE PRIME E ULTIME RAGIONI.
    - Subiettivamente come mezzo dell' intelletto per la legge di discontinuità indefinita. — METODO DI DERIVAZIONE.

Tali sono dunque, come lo dice il signor Wronski, i soli metodi infinitesimali primitivi che siano possibili. Tutti gli altri metodi infinitesimali non possono essere che metodi Derivati da questi o metodi Erronei. Nella prima classe, quella dei metodi infinitesimali derivati, si annoverano l'applicazione o l'uso infinitesimale del *Metodo dei coefficienti indeterminati* (per esempio, la deduzione che abbiamo data con questo metodo del teorema del Taylor) (*Vedi* Coefficienti), l'*Analisi residuale* del Landen, e ancora il *Metodo delle flussioni*, sotto la forma del quale il Newton aveva da principio presentato il suo nuovo calcolo. Nella seconda classe, quella dei metodi erronei, si trovano il *calcolo delle ultime ragioni*, *il sistema di compensazione degli errori* del Carnot, e ancora la *teoria delle funzioni analitiche* del Lagrange, considerandola nel suo scopo di *spiegare* il calcolo differenziale.

METONE, astronomo antico, nato in Atene, viveva verso il V secolo prima di G. C., ed aveva eretto nella pubblica piazza uno gnomone, col quale nell'anno 430 avanti. G. C. osservò un solstizio. Tolomeo, che ci ha conservato tale osservazione, se ne servì, confrontandola colle sue, per determinare la lunghezza dell'anno solare, non senza però avvertirci che non bisognava contar molto sull'esattezza di tale antica osservazione. Metone è principalmente celebre nei fasti della scienza pel ciclo lunare di 19 anni, che porta il suo nome, e che viene altresì chiamato *numero d'oro*. Diciannove numeri, posti nei calendarj accanto ai giorni del mese, servivano a indicare i giorni in cui cadeva il novilunio: mutavano ogni anno, e ritornavano i medesimi in capo a 19 anni. Gli autori dell'*Arte di verificare le date* dicono che si segnavano in caratteri d'oro, donde è venuto il nome che loro è rimasto. La scoperta di tale ciclo, che riconduceva i novilunj nei medesimi giorni dell'anno solare, era abbastanza importante in quei tempi remoti da immortalarne l'autore. Questa gloria però è stata disputata a Metone: amico di Faino e di Euttemone, fu da alcuni attribuita a questi l'idea fondamentale del suo ciclo; e Gemino ne fa onore a Filippo e a Calippo. Se l'idea non è di Metone, sembra almeno che avesse il merito di farla adottare in Grecia. Tale periodo era composto di 19 anni, che formano 6940 giorni o 235 mesi, di cui sette erano embolismici o intercalari. Questi mesi erano o *pieni* cioè composti di 30 giorni, o *cavi* cioè di 29 giorni soltanto. In ciascun periodo, questi ultimi erano 110, e gli altri 125. Gemino narra come i Greci giungessero a tale periodo. Il mese lunare è realmente di 29 giorni, 12 ore, 44 minuti e 3 secondi circa. In principio, tutti i mesi si fecero *pieni* cioè di 30 giorni: in breve si conobbe l'errore e s'introdussero dei *mesi cavi*; fu allora stabilita l'*ottoeteride*, formata di 8 anni, e che contiene 99 mesi di cui 3 intercalari, che fanno in tutto 2922 giorni, cioè 8 volte 365 giorni e un quarto. Ma non si tardò a trovare insufficiente anco questa approssimazione: le fu surrogato il periodo di 16 anni detto *ottodecaeteride*, che non era abbastanza esatto, e che fece luogo al periodo di 19 anni detto *enneadecateride*, in cui l'errore non era che di 6 ore o di un quarto di giorno. Finalmente Calippo propose di riunire quattro periodi di 19 anni in un periodo di 76 anni, sopprimendo un giorno intero per correggere i quattro errori dei periodi parziali. Quest'ultimo ciclo è più conosciuto sotto il nome di *Periodo calippica*, e fu adottato principalmente dagli astronomi, i quali se ne servivano per segnare le date delle loro osservazioni. Nei nostri calendarj moderni, il numero aureo non serve più che a trovare l'*epatta*; e l'epatta, introdotta nel calendario gregoriano per trovare il giorno della pasqua, non indica l'età della luna che per approssimazione.

METRO. Base fondamentale di tutto il sistema delle misure francesi. *Vedi* Misura.

MEZIO (Adriano), valente geometra olandese, nato ad Alcmaer il 9 Dicembre 1571, si applicò di buon'ora alle matematiche, nelle quali fu suo primo maestro

suo padre, abile ingegnere militare. Studiò poscia la legge e la medicina, andò a perfezionarsi nell'astronomia sotto Ticone Brahé, e visitò la Germania, ove le sue lezioni d'astronomia gli attirarono un gran numero di allievi e incominciarono a levarlo in grido. Tornato in Olanda, ottenne nel 1598 la cattedra di matematiche nell'università di Franeker, ufficio che esercitò con onore fino alla sua morte, avvenuta il 26 Settembre 1635. Mezio ha lasciato le seguenti opere: I *Doctrinae sphaericae libri V*, Franeker, 1598, in-8, e in-12; II *Universae astronomiae institutio; accessit tractatus de novis auctoris instrumentis*, ivi, 1608, in-8; ed ivi, con aggiunte, 1630, in-4; III *Arithmeticae libri duo et geometriae libri sex practica*, ivi, 1611, in-4; IV *Praxis nova geometrica per usum circini et regulae proportionalis*, ivi, 1623, in-4, dedicata a Galileo: l'autore vi propone alcuni perfezionamenti al suo compasso di proporzione; V *De genuino usu utriusque globi tractatus*, ivi, 1611, in-4; VI *Problemata astronomica geometrice delineata*, Leida, 1625, in-4; VII *Astrolabium*, Franeker, 1626, in-8; VIII *Calendarium perpetuum articulis digitorum computandum*, Rotterdam, 1627, in-8 (in olandese); IX *Primum mobile astronomice, sciagraphice, geometrice et hydrographice nova methodo explicatum*, Amsterdam, 1631. Il noto rapporto approssimativo del diametro alla circonferenza, espresso dai numeri 113 : 355, è dovuto al padre del dotto che forma il soggetto della presente notizia biografica, il quale chiamavasi esso pure Adriano.

MEZIRIAC (Claudio Gaspare Bachet di). *Vedi* Bachet.

MEZZALUNA (*Fortif.*). Opera militare a foggia di freccia, la quale ha per linea capitale la retta condotta perpendicolarmente sulla metà della cortina. Nel suo interno si costruisce un'altra opera simile che prende il nome di *Ridotto della Mezzaluna*

Queste due opere, che si trovano separate dal recinto mediante il fosso del corpo della piazza, fanno parte delle opere *esterne* o *staccate*, le quali non hanno altro oggetto che di dare una maggior forza al sistema di fortificazione. *Vedi* Fortificazione.

MEZZO. Nome che si dà in fisica ai corpi attraverso dei quali altri corpi possono muoversi; l'aria per esempio è il *mezzo* nel quale si muovono i corpi terrestri, gli uomini e molti animali; l'acqua è il mezzo nel quale si muovono i pesci; i corpi trasparenti sono i *mezzi* attraverso dei quali si muove la luce.

MEZZO. È la metà di un tutto; così, si dice un *semi-circolo*, per la metà di un circolo, un *semi-diametro* per la metà di un diametro, ec., ec.

MEZZOGIORNO (*Astron.*). Si dà questo nome all'istante in cui il centro del sole trovasi nel meridiano. *Vedi* Equazione del Tempo.

Si dà talvolta il nome di mezzogiorno alla parte meridionale del cielo.

MICROMETRO. Con questo nome, che deriva da *μικρον piccolo* e da *μετρεω misura*, s'indica comunemente uno strumento che si pone in un telescopio nel fuoco dell'obiettivo, e che serve a misurare gli angoli piccolissimi o le piccolissime distanze, come i diametri dei pianeti. La sua descrizione si trova in tutti i trattati di astronomia.

MICROSCOPIO (*Ottica*). Questa voce, che deriva da μικρος, *piccolo* e da σκοπεω *io esamino*, serve a denotare un apparecchio di diottrica destinato a ingrandire gli oggetti. Vi sono due specie di microscopj, il semplice e il composto.

Il microscopio semplice è formato di una sola ed unica lente di una gran convessità; il microscopio composto è un tubo terminato alle sue estremità da due lenti, una delle quali, che è l'obiettivo, ha una distanza focale piccolissima, e l'altra, che è l'oculare, ha una distanza focale più lunga. È l'inverso del telescopio. Talvolta questo strumento contiene più oculari.

Il Microscopio Solare non è che un'applicazione della *lanterna magica*: è

composto di uno specchio che riceve i raggi del sole e che ha un' inclinazione tale da rifletterli parallelamente all' orizzonte sopra una gran lente: questa lente raccoglie i raggi sopra un oggetto trasparente rinchiuso in un tubo, avanti il quale si trova un microscopio semplice. I raggi, che partono dall' oggetto, divengono in seguito divergenti nell' attraversare il microscopio, e vanno a disegnare in grande sopra un muro bianco posto a qualche distanza l' immagine dell' oggetto. Questo apparecchio deve esser collocato in una camera oscura in modo che lo specchio si trovi al di fuori, e nessun raggio luminoso, meno che quelli che attraversano il microscopio, non possa penetrarvi.

Il microscopio a gas, che da qualche anno eccita la curiosità del pubblico, è semplicemente un microscopio solare illuminato dalla fiamma di una combinazione di gas in stato d' ignizione.

MINIMUM. (*Alg.*). *Vedi* MAXIMUM.

MINUTO. (*Geom.*). Ciò significa la sessantesima parte di un grado. (*Vedi* QUESTA PAROLA).

MISTILINEO. (*Geom.*). Si dà questo nome alle figure terminate in parte con linee rette e in parte con linee curve.

MISURA. Quantità presa per termine di confronto e che serve a valutare la grandezza di altre quantità della stessa natura.

Misurare vuol dire determinare il rapporto che esiste tra un oggetto di cui vuol conoscersi la grandezza e l' *unità* di confronto. Così, per esempio, avendo adottato per *unità* una lunghezza determinata, come il *metro*, si conoscerà la lunghezza di una linea qualunque quando si saprà quanti metri o parti di metro essa contiene.

L' unità di misura deve esser sempre della stessa natura degli oggetti che essa serve a misurare, vale a dire che la misura delle linee è una linea, quella delle superficie è una superficie, quella dei solidi, un solido, ec. Se in geometria si misurano gli angoli per mezzo di archi di circolo, ciò si fa perchè questi archi sono proporzionali agli angoli, e perchè in tal guisa vi ha sempre un angolo sottinteso che si prende per unità. *Vedi* ANGOLO.

Considerate sotto il rapporto degli usi civili o commerciali, le misure si dividono in misure di *lunghezza*, di *superficie*, di *capacità*, e di *peso*. Presso tutti i popoli, queste diverse misure hanno sempre avuto dei rapporti tra loro; ma il sistema il più semplice e il più elegante è il sistema primitivo delle misure egiziane, la cui invenzione viene attribuita a Mercurio, ministro del re Osiride. L' *unità lineare* era il *cubito reale*, lunghezza presa nelle dimensioni del corpo dell' uomo: il cubo del mezzo cubito dava l' unità di *volume*; questo cubo, pieno d' acqua, l' unità di *peso*; e finalmente questo peso, in argento, l' *unità monetaria*.

Per costruire il loro cubito, gli Egiziani avevano preso per punto di partenza la larghezza dei diti della mano, determinando probabilmente una larghezza media conservata poi come campione fisso. Quattro di queste larghezze medie, o quella di una mano, meno il pollice, formavano il *palmo*; tre palmi o la distanza tra l' estremità del dito minimo e quella del pollice, quando la mano è aperta tenendo le dita discoste il più che sia possibile, componevano l' *empan*; e e due empan, ossia la distanza dal gomito all' estremità del dito medio, formavano il *cubito naturale* più corto del *cubito reale* di quattro diti o di un palmo.

L' origine del cubito reale pare che fosse l' uso che necessariamente dovette farsi in principio della lunghezza del piede per misurare le dimensioni dei terreni, prima di avere delle misure artificiali. Il cubito reale infatti è il doppio del piede naturale, che è di quattordici dita dalla estremità del calcagno a quella del dito grosso. Il cubito naturale era impiegato negli usi più ordinarj; ma il cubito reale

era consacrato a tutto ciò che aveva un oggetto di utilità generale, come la misura delle strade, dei terreni, ec. Il campione ne era depositato nei templi, e affidato alla custodia dei sacerdoti.

Il sistema metrico egiziano, conservato in tutta la sua purezza dagli Ebrei dopo la loro partenza dall' Egitto, subì poscia gradi cangiamenti presso i Greci, i Romani, gli Arabi, e i Persiani. Ma è facile lo scorgere come esso è la sorgente comune dei sistemi di misure di questi popoli, e che in tal guisa modificato si è propagato nelle diverse contrade dell' Europa, ove anche oggigiorno si riconoscono le sue tracce.

Le ricerche più esatte intraprese ai nostri giorni per trovare il rapporto di queste misure primitive colle nostre misure usuali hanno dato i seguenti risultati:

		millimetri
Il *Dito* (*theb*)		18,75
Il *Palmo* (*choryos*) di quattro diti		75
L' *Empan* (*terto*) di 12 diti		225
Il *Cubito* (*derah*)	*naturale* o di 24 diti	450
	reale o di 28 diti	525

I Greci presero per unità lineare i due terzi del cubito naturale o 16 diti, e le diedero il nome di *piede* (ποῦς). Sopra tale unità Fidone d' Argo, secondo Plinio, o Palamede secondo Aulo Gellio, formò la serie seguente di misura:

	metri
Il *Dito* (δάκτυλος)	0,01875
Il *Palmo* (δῶρον o παλαιστή)	0,075
Il PIEDE (ποῦς)	0,3
Il *Cubito* (πῆχυς) d' un piede e mezzo	0,45
Il *Passo* (βῆμα ἁπλοῦν) di due piedi e mezzo	0,75
Il *Passo doppio*, o di 5 piedi (βῆμα διπλοῦν)	1,5
Il *Broccio* (οργυιά) di 6 piedi	1,8
La *Pertica* (ἄκαινα) di dieci piedi	3
La *Catena piccola* (ἅμμα) di 60 piedi	18
La *Catena grande* (πλέθρον) di 100 piedi	30
Lo *Stadio* (στάδιον) di 600 piedi	180

Un quadrato di 100 piedi di lato formava presso i Greci l' unità principale delle misure agrarie o di superficie. Gli si dava il nome di *Plettro*, πλέθρον. Il piede cubo servì pure di punto di partenza per le misure di capacità sotto il nome di *metreto*, μετρητής; la centesima parte di questo piede cubo fu chiamata *cotilo*, κοτύλη, e 72 cotili formarono l'*anforo*, ἀμφορεύς, la cui grandezza è

di 19 litri e $\frac{44}{100}$.

Il peso dell' acqua contenuta in un' anfora divenne l' unità delle misure di peso, e formò il *talento*, τάλαντον; finalmente questo stesso peso in oro, in argento o in rame, colle sue suddivisioni, serviva a comporre il sistema monetario.

Solone riformò in seguito i pesi e le misure facendo uso dell' intero piede cubo di acqua per rappresentare il peso di un nuovo *talento*, che fu poi distinto col nome di *gran talento attico*. In seguito si stabilirono delle differenze

nelle misure delle diverse provincie greche: ma la loro origine comune fu sempre il piede di 16 diti egiziani.

I Romani trovarono in Italia le misure dei Greci dappertutto in uso, ed essi le conservarono, almeno in quanto alla sostanza; poichè adottarono una classificazione più metodica, dividendo ogni unità, sia lineare, sia di peso, in dodici parti suddivisibili ognuna in altre 24. Così il piede greco di 16 diti egiziani fu diviso in 12 *once*, che i moderni hanno chiamato *pollici*. Nulladimeno il piede romano era alquanto più piccolo di 16 diti egiziani, e sembra essersi conservato, senza alterazione nessuna, in tutto il tempo della repubblica, dell'impero, e nei primi secoli del feudalismo.

Il sistema metrico delle antiche nazioni dell'Asia è anch'esso il sistema egiziano leggermente modificato; ma quello degli Arabi, sebbene basato sul *cubito*, differisce nell'unità fondamentale del *dito*, la cui lunghezza non è quella del *dito* egiziano. Il dito arabo si componeva di sei grani di orzo posti per traverso l'uno accanto all'altro, e il grano d'orzo si divideva in 6 crini di cavallo; quattro diti formavano il *palmo*, 4 palmi il *piede*, e 2 piedi il *gran cubito achemico*. E di qui traggono la loro origine le misure attuali della razza maomettana.

Il sistema delle antiche misure francesi rimonta soltanto fino a Carlomagno, che lo sostituì al sistema romano in tutta l'estensione della monarchia. Il *piede* di questo principe, chiamato ancora *piede del re* (*pied-de-roi*), o *piede di Parigi*, pare che sia una copia alterata di quello degli Arabi; esso si divideva in dodici *pollici*, e il pollice in dodici *linee*. Sei piedi formavano una *tesa* che è esattamente il *passo* degli Arabi. Quanto alle altre misure, traevano anche esse origine dalle misure arabe.

Queste misure però subirono notabili alterazioni non molto dopo la loro istituzione: imperocchè, sotto il regno di Carlo il Calvo, già ognuno dei grandi signori feudatarj della corona aveva introdotto nei suoi stati delle modificazioni conformi ai proprj interessi. Gli uni avevano aumentato la grandezza delle misure per levare una imposizione più forte sui loro vassalli, gli altri al contrario l'avevano diminuita per attirare nei loro possessi un maggior numero di abitanti. Invano molti sovrani tentarono successivamente di rimediare a questo disordine, e di stabilire nelle provincie le misure medesime di cui si faceva uso a Parigi: eravi d'uopo del braccio di ferro del governo repubblicano per operare l'urgente riforma sì lungo tempo e sì imperiosamente richiesta. Oggi il complesso delle misure francesi forma il sistema il più completo, il meglio collegato e nel tempo stesso il più semplice che sia stato inventato, e la sua superiorità su quelli di tutte le altre nazioni non può esser posta in dubbio un momento, quantunque sventuratamente sia ormai certo che la sua base è inesatta.

Nell'8 Maggio 1790, l'Assemblea costituente emanò un decreto in forza del quale il re di Francia doveva concertarsi col re d'Inghilterra, acciocchè questi associasse ai dotti francesi scelti dall'Accademia delle Scienze di Parigi un numero eguale di membri della Società Reale di Londra, per determinare in comune la lunghezza del pendolo semplice che batte i secondi alla latidudine media di 45° e al livello del mare. Questa lunghezza doveva esser presa per l'unità delle misure che queste due nazioni dovevano poi propagare in tutti i paesi civilizzati. Gli avvenimenti politici non permisero che questa riunione si effettuasse, e la commissione degli accademici francesi, temendo che la scelta del pendolo ai 45° non venisse rigettata dai popoli che non hanno questa latitudine, volle scegliere piuttosto una base più larga e veramente universale, prendendo per unità la diecimillionesima parte della distanza tra l'equatore e il polo, ossia del quarto del meridiano terrestre. Questa scelta presentava di più un vantaggio particolare, ed era il rapporto semplice e naturale che si stabiliva tra le misure geodetiche

e gli archi celesti, e che doveva facilitare la pratica del pilotaggio fondata interamente su questo rapporto. Ma, per ottenere la lunghezza dell'unità di misura, bisognava determinare la figura della terra più esattamente di ciò che fino allora si era fatto, e misurare i gradi del meridiano con una precisione superiore a quella delle misure che fino allora erano state eseguite. Questo lavoro giganteseo non spaventò i nostri dotti. Delambre e Méchain furono incaricati di misurare la meridiana di Parigi, da Dunkerque fino a Barcellona, operazione che con maravigliosa attività condussero a termine, in mezzo alle sanguinose scene del nostro più terribile periodo politico, mentre Brisson, Borda, Lagrange, Laplace, Prony e Berthollet innalzavano l'edifizio del nuovo sistema creando una unità provvisoria basata sulle misure di La Caille. Questa unità, sotto il nome di *metro*, fu fissata in 443 linee e $\frac{44}{100}$ della tesa di Parigi.

Calmatesi le procelle rivoluzionarie, la Francia fece nel 1799 un nuovo appello alle nazioni sue alleate, ed una numerosa commissione fu creata per realizzare definitivamente tutte le parti del sistema metrico, subordinandole ad un preteso valore definitivo del *metro*, stabilito in linee 443,295936. Questa commissione fu composta di Borda, Brisson, Coulomb, Darcet, Delambre, Haüy, Lagrange, Laplace, Lefèvre-Gineau, Méchain e Prony per la Francia; Reneœ e Van Swinden per l'Olanda; Balbo e quindi Vassalli-Eandi per la Savoia; Bugge per la Danimarca; Ciscar e Pedrayès per la Spagna; Fabbroni per la Toscana; Franchini per la Repubblica Romana; Multedo per la Repubblica Ligure; e finalmente Trallès per la Repubblica Elvetica.

Il 22 Giugno 1799 il rapporto dei lavori di questa commissione fu presentato da Trallès al corpo legislativo unitamente ai tipi modelli; ma il sistema metrico definitivo non divenne legale ed esclusivo che a datare dal 2 Novembre 1801.

Recentemente sono stati notati alcuni errori incorsi nelle misure di Delambre e di Méchain, e quest'ultimo prima della sua morte aveva scoperto una inesattezza che non credè di dover rilevare, temendo probabilmente di compromettere, ed ormai troppo tardi, tutto il lavoro della meridiana. Da altre misure eseguite in seguito in diversi luoghi, sembra resultare che la lunghezza del metro detto *definitivo* è un poco troppo piccola, e che determinandola in linee 443,39 si otterrebbe un'approssimazione assai più grande alla verità. Nulladimeno siamo persuasi che l'idea di prendere per unità una parte del meridiano è più brillante che ragionevole; imperocchè per rendere questa misura universale bisognerebbe che tutti i meridiani fossero rigorosamente eguali, il che fino ad ora è ben lungi dall'esser dimostrato. La figura della terra non sembra regolare, e tutti i tentativi fatti per coordinare i valori conosciuti degli archi di diversi meridiani non hanno ancora prodotto resultato alcuno veramente soddisfacente.

Nulladimeno, considerando il *metro*, non come una parte aliquota rigorosa della distanza *invariabile* tra l'equatore e il polo, ma soltanto come una parte aliquota della distanza *media* di questo equatore, qualunque siano le ineguaglianze del globo terrestre e la varietà delle distanze che possono produrre, non si può considerare come impossibile che un giorno si giunga ad ottenere questa *unità media* ad un alto grado di precisione, e che così si possa realizzare la grande e bella idea di un sistema di misure basato sulle dimensioni del globo, che sono esse pure mediante le osservazioni astronomiche collegate con tutti gli assi delle orbite planetarie, e colle dimensioni dell'universo. Del resto, il valore del metro attuale si trova stabilito in un modo invariabile per mezzo del suo confronto con quello del pendolo a secondi, e siccome la scelta di un'unità di misura è affatto arbitraria, e d'altronde basta che si possa sempre ritrovare la gran-

dezza esatta di questa unità, tutte le inesattezze che abbiamo notato non viziano in nulla il nostro ammirabile sistema metrico, il cui primo vantaggio riposa evidentemente sul legame e sui rapporti semplici di tutte le sue parti.

Il *metro* è dunque l'unità fondamentale: come abbiamo già detto, è la diecimillionesima parte del quarto del meridiano terrestre, o, più rigorosamente, è una lunghezza il cui rapporto con quella del pendolo che batte i secondi sotto il 45° grado di latitudine è 0,993977, vale a dire che prendendo il metro per unità, la lunghezza del pendolo è eguale a $0^{m},993977$; il che dà un mezzo facile per ritrovare questo metro in ogni tempo.

Un quadrato il cui lato è di dieci metri, e che contiene per conseguenza una superficie di cento metri quadrati è l'unità delle misure *agrarie*. A questa unità si dà il nome di *aro*.

Un cubo il cui lato è la decima parte del metro è, sotto il nome di *litro*, l'unità delle misure di *capacità*, ed è la millesima parte del metro cubo.

Il metro cubo applicato alla misurazione del legname da ardere prende il nome di *stero*.

Il peso di un volume di acqua pura, al *maximum* di densità, contenuto in un cubo il cui lato ha per lunghezza la centesima parte del metro, è l'unità delle misure di *peso*, e si chiama *grammo*.

Finalmente, per le monete, l'unità è il *franco*, moneta composta di nove parti d'argento e di una di rame, e il cui peso è di cinque *grammi*.

Prendendo i nomi di queste unità come radici e facendoli precedere dalle parole: *miria* (diecimila), *chilo* o *kilo* (mille), *etto* (cento), *deca* (dieci), *deci* (decimo), *centi* (centesimo), *milli* (millesimo), si formano successivamente tutte le altre misure usuali che sono multipli e summultipli decimali delle unità primitive: ecco il prospetto di queste misure.

NOMI SISTEMATICI.	RAPPORTI COL METRO.
Misure itinerarie e di lunghezza.	
Miriametro.	10000 metri.
Chilometro.	1000
Ettometro	100
Decametro	10
Metro	1
Decimetro.	0,1
Centimetro.	0,01
Millimetro.	0,001
Misure agrarie.	
Ettaro	10000 metri quadrati.
Aro	100
Centiaro	1
Misure di capacità pei liquidi.	
Decalitro	10 decimetri cubi.
Litro	1
Decilitro	0,1

Misure di capacità per le materie aride.

Chilolitro	1000 decimetri cubi.
Ettolitro	100
Decalitro	10
Litro	1

Misure di solidità.

Stero	1 metro cubo.
Decistero	0,1

Pesi.

Migliajo	1000 chilogrammi o tonnellata.
Quintale	100
Kilogrammo	Peso di un decimetro cubo di acqua pura alla temperatura di 4° al di sopra del ghiaccio che si fonde.
Ettogrammo	100 grammi.
Decagrammo	10
Grammo	1
Decigrammo	0,1

Dopo il 1812 è stato permesso l' uso di certe denominazioni antiche troppo popolari per sperare di vederle abbandonate sollecitamente, così:

2 metri fanno una *tesa*, il cui sesto è il *piede* nuovo.
6 decimetri formano un' *auna*.
L' ottavo dell' ettolitro è uno *stajo*.
Un mezzo chilogrammo, ossiano 500 grammi, fanno una *libbra*, che si suddivide in *once*, *grossi*, ec.

Ma non bisogna confondere queste misure usate in tutte le contrattazioni commerciali colle antiche misure portanti gli stessi nomi ed espressamente proibite. I rapporti di queste antiche misure colle misure metriche sono i seguenti.

	metri
1 tesa di Parigi	1,94904
1 piede, o sesta parte della tesa	0,32484
1 pollice, o dodicesima parte del piede	0,02707
1 linea, o dodicesima parte del pollice	0,00256
	grammi
1 libbra, peso di marco	489,505847
1 oncia, o sedicesima parte della libbra	30,59
1 grosso, o ottava parte dell' oncia	3,82
1 grano, o 1/72 del grosso	0,53

Nell'*Annuario* dell'Ufizio delle longitudini si trovano delle tavole per ridurre tutte le misure antiche nelle nuove, e reciprocamente. Noi ci contenteremo di far qui conoscere i rapporti del *metro* colle misore lineari dei popoli antichi e moderni.

MISURE ANTICHE.

		metri
Persia	*Parasanga* di 10000 cubiti reali	5250
	Schena di 20000 id.	10500
	Statmo di 40000 id.	21000
Egitto	*Cotena gronde* o *Plettro* di 100 piedi	36
	Stadio di 600 piedi	216
Roma	*Miglio*	1472,3
China	*Tchang* o pertica	3,2
	Li di 180 pertiche	576
	Pou di 10 *Li*	5760
	Thson di 8 *Pou*	46080

MISURE MODERNE.

		metri
Amsterdam	*Auno*	0,6903
Berlino	*Auna antica*	0,6677
	Auna nuovo	0,6669
Colonia	*Auna*	0,5752
Costaotinopoli	*Misuro gronde*	0,6691
	Misura piccolo	0,6479
Copeoaghen	*Auna*	0,6277
Dresda	*Auno*	0,5665
Ferrara	*Broccio* per la seta	0,6344
	Broccio pel cotone e pel filo	0,6736
Firenze	*Broccio*	0,5942
Francfort	*Auna*	0,5473
Genova	*Polmo*	0,2483
Ginevra	*Auno*	1,1437
Amburgo	*Auno* d' Amburgo	0,5730
	Auno del Brabante	0,6914
Annover	*Auno*	0,5840
Lipsia	*Auno*	0,5653
Lisbona	*Varo*	1,0929
Londra	*Yard* imperiale	0,9144
	Perch o *pertica* (5,5 *yard*)	5,0291
	Miglio (1760 *yord*)	1609,3149
	Il *Piede* inglese, diviso in 12 pollici, è il terzo dell' *yard* e vale.	0,3048
Lucca	*Braccio*	0,5951
Madrid	*Vara*, *Auno* di Castiglia	0,8480

Milano	*Braccio*	o, 5949
Monaco	*Auna*	o, 8330
Napoli	*Canna*	2, 0961
Palermo	*Canna*	1, 9423
Pietroburgo	*Archina*	o, 7115
Riga	*Auna*	o, 5482
Roma	*Canna*	1, 9920
	Braccio	o, 8482
Stockholm	*Auna*	o, 5937
Stuttgard	*Auna*	o, 6143
Torino	*Raso*	o, 5994
Varsavia	*Auna*	o, 5846
Weimar	*Auna*	o, 5640
Venezia	*Braccio* per la lana.	o, 6834
	Braccio per la seta	o, 6387
Vienna	*Auna* di Vienna	o, 7792
	Auna dell'Alta Austria	o, 7997
Zurigo	*Auna*	o, 6001

MOBILE. (*Mec.*). Un *mobile* è tutto ciò che può mettersi in moto. Questo è il termine generale del quale ci serviamo nella meccanica per indicare i corpi che si concepiscono sottoposti all'azione delle forze motrici.

MODULO (*Alg.*). Per modulo s'intende il rapporto costante che passa tra il logaritmo di un numero preso in un sistema qualunque, e il logaritmo naturale di questo medesimo numero. *Vedi* Logaritmo.

MOESTLIN (Michele), celebre matematico, morì nel 1650 a Eidelberga, dopo avervi insegnate per lungo tempo le matematiche. Fu il primo che scoprì la ragione della *luce cenerina* della luna, che è quel debole lume che si vede nella parte della luna non illuminata dal sole, e che è l'effetto della luce solare reflessa su quel satellite dalla terra.

MOIVRE (Abramo), geometra distinto, nato nel 1667 a Vitrì in Sciampagna, fu inviato da suo padre all'accademia di Sedan per farvi i suoi studj. L'amore delle matematiche si sviluppò in lui di buon'ora; ma non potè in principio coltivarle che in segreto per riguardo del suo precettore che considerava come male impiegato tutto il tempo che sottraeva alla lingua greca. Passato poi a Saumur e quindi a Parigi a farvi il corso di filosofia, Moivre aveva di continuo in mano le opere dei migliori matematici, delle quali la penetrazione sua naturale superare gli faceva una gran parte delle difficoltà: finalmente suo padre cedendo alle sue istanze gli diede Ozanam per maestro della scienza verso la quale con tanta passione sentivasi trasportato. La revoca dell'editto di Nantes costrinse Moivre ad espatriare: egli passò in Inghilterra, ove visse col prodotto delle lezioni di matematiche che prese a darvi. La lettura del celebre libro dei *Principj* di Newton gli fece vedere sotto un aspetto affatto nuovo la scienza di cui credeva di essere giunto all'apice. Questo libro divenne per lui l'oggetto di nuovi e profondi studj: non cessava di meditarlo, e ne portava sempre in dosso alcuni fogli, che rileggeva ne' suoi momenti di ozio. Cominciò allora a farsi conoscere con varie memorie su diverse parti delle matematiche, che Halley comunicava alla Società Reale di Londra nella quale fu ammesso nel 1697. Il gran Newton, di cui si onorava di esser discepolo, voleva che lo tenesse in conto d'amico; ed

una discussione non poco viva che ebbe con Cheyne terminò di estendere la sua reputazione.

Leibnitz, che aveva avuto occasione di vedere Moivre in Inghilterra, fece inutili pratiche per ottenergli una cattedra di matematiche in qualche università della Germania; nè meglio riuscirono le premure de' suoi amici per procurargliene una nell' accademia di Cambridge. Moivre fu uno dei commissarj scelti per pronunziare sulla disputa insorta tra Leibnitz e Newton in proposito della scoperta del calcolo differenziale. Verso quel tempo comunicò alla Società Reale un trattatello: *De mensura sortis*, che accrebbe l' opinione che avevasi del suo talento. Montmort aveva prima di lui scritto sul calcolo dei giuochi d' azzardo, ma aveva preso una strada così diversa che non poteva accusarsi Moivre di plagio. Questi perfezionò in seguito il suo lavoro, e ne fece ingegnose applicazioni agli usi della vita. Questo dotto giunse ad un' estrema vecchiezza, e morì a Londra il 27 Novembre 1754 in età di 87 anni. Pochi mesi avanti che morisse era stato ricevuto membro dell' Accademia delle Scienze di Parigi, e da lungo tempo faceva parte di quella di Berlino. Oltre numerose memorie nella *Transazioni filosofiche*: ha scritto: I *The doctrine of chances* (La dottrina degli azzardi), Londra, 1716; ivi, 1738; ivi, 1756, in-4. È la traduzione inglese del suo trattato *De mensura sortis*: l' ediz. del 1756 è più compiuta delle precedenti. Lagrange divisava di tradurla in francese; tanto basta per dire quanto sia di rilievo; II *Miscellanea analytica de seriebus et quadraturis*, Londra, 1730, in-4. Tale eccellente opera, divisa in otto libri, contiene le più dotte ricerche di analisi: è la raccolta delle scoperte di Moivre e dei metodi che aveva adoperati onde riuscirvi; III *Annuities on lives* (Dei vitalizj), ivi, 1724, 1742, 1750, in-8. È stata tradotta in italiano dal p. Fontana (*Vedi* Gregorio Fontana). Su questo matematico si consulti per maggiori notizie la *Biografia universale*.

MOLIERES (Giuseppe Privat de), fisico e matematico, nato a Tarascona nel 1677, e morto a Parigi nel 1742, ha pubblicato parecchie memorie nella Raccolta dell' Accademia delle Scienze di Parigi, di cui era membro, e nel Giornale di Trévoux. È altresì autore delle opere seguenti: I *Leçons de mathématiques*, 1726, in-12; tradotte furono in inglese da Huselden; II *Leçons de physique*, Parigi, 1733-39, 4 vol. in-12; tradotte in italiano, Venezia, 1743, 3 vol. in-8; III *Élémens de géométrie*, Parigi, 1741, in-12.

MOLTIPLICANDO. Nome che si dà in aritmetica a uno dei due fattori che entrano in un prodotto, questo è quello che vien considerato come dovendo esser moltiplicato per un altro fattore.

MOLTIPLICATORE. Numero pel quale si moltiplica un altro numero, che riceve il nome di *moltiplicando*. (*Vedi* Moltiplicazione).

MOLTIPLICAZIONE. (*Alg.*) Una delle sei operazioni elementari fondamentali della scienza dei numeri. Essa ha per oggetto di trovare il *prodotto di due fattori* (*Vedi* Nozioni preliminari n.° 3).

1. Considerata nella sua origine e in un modo puramente aritmetico, la moltiplicazione è un processo di calcolo, con l' aiuto del quale si ottiene la *somma* di più numeri uguali in un modo più pronto che mediante l'*addizione* di questi numeri. Esaminando una tale addizione, per esempio:

$$8+8+8+8+8=40,$$

si veda che la *somma* 40 è formata di 5 volte il numero 8, vale a dire che essa è interamente determinata dai due numeri 5 e 8. Ugualmente, l' addizione successiva di 634, *nove* volte con se stesso dando 5706, è evidente che quest' ultimo numero è ancora interamente determinato dai due numeri 634 e 9. Ora, trovare

in un modo diretto il numero che si trova così determinato dal concorso di due altri numeri, senza passare per un' addizione successiva, è propriamente lo scopo della *moltiplicazione*. Allora, non si dice più che 8 aggiunto *cinque* volte a se stesso dà 40 per *somma*, ovvero che 634 aggiunto *nove* volte a se stesso dà 5706 per *somma*, ma che 8 *moltiplicato per* 5 dà 40 per *prodotto*, e che 634 *moltiplicato per* 9 dà 5706 per *prodotto*. Esaminiamo dunque come il processo seguito nell' *addizione* potrà condurci al processo che bisogna seguire nella *moltiplicazione*, quest' ultimo non potendo essere che una generalizzazione del primo.

A quest' effetto, avendo scritto, come segue, *nove* volte 634

634
634
634
634
634
634
634
634
634

Somma = 5706

e procedendo all' *addizione*, osserveremo che, la colonna delle unità non essendo composta che di una stessa cifra 4, invece di dire 4 e 4 fa 8, 8 e 4 fanno 12, 12 e 4 fanno 16, ec. Si potrebbe dire tutto ad un tratto *nove* volte 4 fa 36, e allora scrivere 6 sotto la colonna dell' *unità* e ritener 3 per aggiungerlo alla somma della colonna delle *diecine*. Per la medesima ragione, invece di effettuare successivamente l' addizione delle cifre della colonna delle diecine, possiamo dire tutto ad un tratto *nove* volte 3 fa 27, il che, col 3 ritenuto, fa 30; così ponendo *zero* sotto la colonna delle diecine, si riterrà di nuovo 3 per aggiungerlo con le centinaia, la cui somma può ugualmente ottenersi immediatamente dicendo *nove* volte 6 fa 54 e 3 di ritenuta, 57, che si scrive per terminare l' operazione. Si poteva dunque dispensarsi di scrivere *nove* volte il numero 634; bastava scriverlo una sola volta, ponendo 9 al di sotto per indicare la natura del processo che abbiamo seguito; in questo modo, si sarebbe avuto semplicemente,

634
9

Prodotto = 5706

2. Questo processo che inseguito estenderemo a qualunque numero, suppone che si conosca immediatamente *nove* volte 4, *nove* volte 3 e *nove* volte 6, ovvero, generalmente, i *prodotti* dei numeri semplici tra loro, vale a dire i prodotti dei numeri 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Così bisogna cominciare da costruire questi prodotti semplici, poichè sopra questa sola costruzione riposa la possibilità del processo abbreviato d' *addizione* che costituisce la *moltiplicazione*.

Il primo mezzo che si presenta allo spirito per costruire il prodotto di due numeri semplici come 5 e 4, è di aggiungere 5 *quattro* volte a se stesso; la somma 20 di quest' addizione

$$5+5+5+5=20,$$

essendo una volta fissata nella memoria non avremo più bisogno di ricominciare quest' operazione. Laonde non si tratterebbe dunque che di costruire, una volta

per tutte, tutti i prodotti *due a due* delle cifre semplici del nostro sistema di numerazione, o di qualunque altro sistema del quale si volesse servirsi. Ma esiste un mezzo più semplice di formare questi prodotti gli uni per mezzo degli altri, procedendo come segue:

Avendo scritto le nove cifre semplici del nostro sistema di numerazione sopra una medesima colonna orizzontale, si aggiungerà successivamente ciascuna di queste cifre a se stessa e si scriveranno i resultamenti al di sotto, sopra una seconda colonna, il che darà

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.
2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18.

Ciascun numero di questa seconda colonna sarà i *prodotto* della cifra corrispondente nella prima per 2.

Aggiungendo successivamente ciascuna cifra della prima colonna col numero che gli corrisponde nella seconda, si formerà una *terza* colonna che conterrà evidentemente i prodotti delle cifre della prima per 3

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.
2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18.
3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27.

Aggiungendo successivamente di nuovo ciascuna delle cifre della prima colonna col numero che gli corrisponde nella terza, si formerà una *quarta* colonna che conterrà i prodotti per 4 di queste cifre semplici. Continuando sempre nella stessa maniera, si costruirà definitivamente la seguente tavola, nella quale tutti i prodotti due a due delle cifre semplici si trovano riuniti.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Resulta evidentemente dalla costruzione di questa tavola, attribuita a Pitagora, che per trovare il prodotto di due cifre semplici 7 e 8 per esempio, bisogna cominciare da cercare 7 nella prima colonna orizzontale e scendere verticalmente fino all' *ottava* colonna orizzontale; il numero 56 che si trova al di sotto di 7 in quest' ottava colonna è il prodotto di 7 per 8. Si sarebbe ottenuto lo stesso resultamento cominciando dal prendere 8 nella prima colonna e scendendo alla settima, perchè 8 moltiplicato per 7, o 7 moltiplicato per 8 sono una stessa cosa. (*Vedi* Algebra n.° 7).

3. I prodotti dei numeri semplici essendo così conosciuti, non vi è cosa più

facile che quella di fare una moltiplicazione. Si abbia per esempio da moltiplicare 48654 per 5, avremo, servendoci delle indicazioni stabilite,

48654 . . . . *moltiplicando*
5 . . . . *moltiplicatore*

243270 . . . . *prodotto.*

Vale a dire, che dopo avere scritto 5 sotto 48654, si dice: 5 volte 4 fanno 20, si pone 0 e si ritiene 2; 5 volte 5 fanno 25 e 2 di ritenuta fanno 27, si pone 7 e si ritiene 2; 5 volte 6 fanno 30 e 2 di ritenuta fanno 32, si pone 2 e si ritiene 3; 5 volte 8 fanno 40 e 3 di ritenuta fanno 43, si pone 3 e si ritiene 4; finalmente, 5 volte 4 fanno 20 e 4 di ritenuta fanno 24, si pone 24. Donde resulta che 5 volte 48654 è eguale a 243270.

4. Per moltiplicare un numero qualunque per 10, basta scrivere uno *zero* alla sua destra, ed è così che 48×10 diventa 480. La ragione di questa regola è evidente, poichè ciascuna delle cifre che compongono il numero proposto essendo tratta indietro di un posto verso la sinistra, acquista un valore relativo dieci volte maggiore di quello che essa aveva, e per conseguenza il numero esso stesso diventa dieci volte più grande ovvero si trova moltiplicato per 10. Per la medesima ragione, per moltiplicare per 100, o per 1000, o per 10000, ec., si scrive alla destra del moltiplicando, *due*, o *tre*, o *quattro*, o ec., zeri. Dunque

$$48 \times 100 = 4800; \quad 48 \times 1000 = 48000, \text{ ec.}$$

5. Se si avesse da moltiplicare 54 per 30, si moltiplicherebbe semplicemente 54 per 3 e si metterebbe uno zero davanti il prodotto 162, che diventerebbe così 1620, poichè è evidente che operando in questo modo, il numero 54 si trova moltiplicato per 30, poichè 1620 è 10 volte 162, che è tre volte 54, ovvero 10 volte 3 volte 54, vale a dire 30 volte 54.

Si avrebbe ugualmente

$$54 \times 300 = 16200, \quad 54 \times 3000 = 162000, \text{ ec.},$$

e così di seguito. In generale, *per moltiplicare per una cifra semplice preceduta da un numero qualunque di zeri, si comincia da fare l'operazione come se la cifra non esprimesse che unità; e quindi si scrivono alla destra del prodotto tanti zeri quanti ve ne sono avanti questa cifra.*

6. Quando il moltiplicatore contiene più cifre significative, l'operazione è più complicata, ma il processo si deduce ancora facilmente da quello dell'addizione.

Per moltiplicare, per esempio, 5634 per 425, bisogna osservare che quest'operazione equivale ad aggiungere 5634, volte 425 a se stesso; ora, prendere 425 volte 5634, è la stessa cosa come: se si prendesse separatamente 400 volte, 20 volte e 5 volte, e che quindi si aggiungesse le tre somme parziali per ottenere la somma totale ovvero 425 volte 5634. Moltiplicare per 425 equivale dunque a moltiplicare successivamente per 5, per 20 e per 400, e si opererà perciò nella seguente maniera:

```
    5634
     425
 -------
   28170
  112680
 2253600
 -------
 2394450.
```

Dopo avere scritto 425 sotto 5634, si comincerà da moltiplicare per 5 e si scriverà il prodotto formandolo come sopra (n.° 3). Si moltiplicherà quindi per la cifra 2 delle diecine, ma siccome, da quello che precede, bisogna scrivere zero avanti questo prodotto, si comincerà da scrivere *zero* alla colonna dell'unità, e alla sinistra di questo zero si metterà il prodotto di 5634 per 2, il che renderà questo prodotto non quello di 2, ma bensì quello di 20. Finalmente, si moltiplicherà 5634 per la cifra 4 delle centinaia, scrivendo precedentemente due zeri alla destra. Si avrà dunque

$$5634 \times 5 = 28170$$
$$5634 \times 20 = 112680$$
$$5634 \times 400 = 2253600$$

e la somma di questi tre prodotti darà

$$5634 \times 425 = 2394450.$$

7. Senza arrestarci di più sopra esempii particolari, possiamo concludere che la *regola generale* della moltiplicazione è:

1.° *Scrivere il moltiplicatore sotto il moltiplicando.*

2.° *Moltiplicare successivamente tutte le cifre del moltiplicando per ciascuna cifra del moltiplicatore, il che dà tanti prodotti parziali quante cifre ha il moltiplicatore.*

3.° *Far precedere da uno zero il prodotto parziale della cifra delle diecine del moltiplicatore, da due zeri il prodotto parziale della cifra delle centinaia; da tre zeri, quello della cifra delle migliaia* ec., ec.

4.° *Scrivere tutti questi prodotti parziali gli uni al di sotto degli altri, in modo che le cifre della medesima specie si corrispondono, vale a dire, che le unità siano sotto le unità, le diecine sotto le diecine*, ec.

5.° *Addizionare tutti i prodotti parziali.* La somma sarà il prodotto domandato.

8. Possiamo indifferentemente prendere per moltiplicando uno qualunque dei due numeri proposti poichè in generale

$$A \times B = B \times A;$$

il che somministra un mezzo di verificare i calcoli o di fare la *prova* della moltiplicazione. Basta infatti, per questa prova, di ricominciare l'operazione prendendo per nuovo moltiplicatore il numero che in principio si era preso per moltiplicando; siamo assicurati dell'esattezza dei calcoli se i resultamenti sono identici. Abbiamo dato alla parola *Aritmetica*, un'altra prova ricavata dalle proprietà del numero 9, della quale troveremo la deduzione alla parola Nove.

9. Fintanto che il moltiplicando e il moltiplicatore sono numeri astratti, il prodotto è esso stesso un numero astratto, ed è perfettamente indifferente il considerarlo come il resultamento della moltiplicazione del moltiplicando pel moltiplicatore, o come quello della moltiplicazione del moltiplicatore pel moltiplicando, invertendo l'ordine di questi fattori: ma non segue lo stesso quando il moltiplicando è un numero concreto, ovvero che esso indica una specie di oggetti determinati, poichè in questo caso il prodotto dev'esser sempre di questa medesima specie; per esempio, 3 *metri* moltiplicati per 4, o 4 volte 3 metri fanno 12 *metri*; 8 *chilogrammi* moltiplicati per 5, fanno 40 *chilogrammi*, ec., ec. Possiamo bensì sempre dire indifferentemente 3 volte 4, o 4 volte 3; 8 volte 5, o 5 volte 8; i prodotti sono sempre i medesimi; ma, siccome questi prodotti debbono essere della stessa natura che i moltiplicandi, diviene necessario

di non perdere di vista quali sono i veri moltiplicandi, e il miglior mezzo è quello di non invertire l'ordine dei fattori.

10. Se i fattori sono tutti due numeri concreti, la natura sola della questione può far conoscere di quale specie dev' essere il prodotto. Sia, per esempio, proposto di moltiplicare 3 metri per 4 franchi. Questo problema enunciato in questo modo non presenta alcun senso, poichè non c' indica per nulla a quale specie di unità deve riferirsi il prodotto 12, di 3 per 4. Ma se si domanda quanto costeranno 3 metri a ragione di 4 *franchi* il metro, si vede che il prodotto domandato dev' essere un numero di franchi, ovvero che 4 franchi è il moltiplicando, vale a dire il numero che dev' esser preso 3 volte; poichè 3 metri non fanno in questo caso che indicarci il moltiplicatore astratto 3. In questo caso, il prodotto 12 esprime 12 franchi.

Al contrario, se si domandasse quanti metri si debbono avere per 4 franchi, 3 metri costando 1 franco, il senso della questione esige che il moltiplicando 3 metri sia preso tante volte quante unità vi sono in 4 franchi, vale a dire 4 volte; 4 franchi non fanno dunque in questo caso che indicarci il moltiplicatore astratto 4, e in questo caso il prodotto 12 esprime metri.

Si vede quanto è importante non confondere nell' applicazioni il moltiplicando col moltiplicatore.

11. Moltiplicaziona della frazioni. Per moltiplicare una frazione per un'altra, bisogna formare separatamente il prodotto dei numeratori di queste due frazioni e il prodotto dei loro denominatori; il primo prodotto sarà il numeratore della frazione del resultamento, e il secondo il suo denominatore.

Per esempio:

$$\frac{3}{4} \times \frac{5}{6} = \frac{3 \times 5}{4 \times 6} = \frac{15}{24}.$$

Le ragioni di questa regola sono esposte all'articolo Algebra n.° 17.

12. Quando si tratta di frazioni decimali, l'operazione si rende più semplice perchè i denominatori sono sottintesi, poichè in luogo di scrivere

$$\frac{3}{10} \times \frac{4}{100} = \frac{3 \times 4}{10 \times 100} = \frac{12}{1000},$$

si ha semplicemente

$$0,3 \times 0,04 = 0,012;$$

il che equivale a moltiplicare i numeri decimali 3 e 4 come se essi fossero numeri interi, e quindi dare al prodotto il posto che esso deve avere; in questo caso il prodotto deve esprimere dei *millesimi*.

La regola generale per moltiplicare due nomeri qualunque composti d' interi e di decimali o solamente di decimali, consiste nell'eseguire la moltiplicazione come se si dovesse fare con numeri interi, senza fare alcuna attenzione alla virgola che regola il posto delle cifre decimali. Quando la moltiplicazione è compita si separano dal prodotto, sulla destra, tanti decimali quanti ve ne sono nei due fattori presi insieme. Se si ha, per esempio, 56,34 da moltiplicare per 0,425, si sopprimono le virgole e si moltiplica 5634 per 425, come al numero 6, il che dà per prodotto 2394450. Ma sopprimendo la virgola nei due fattori si è reso il primo *cento* volte più grande, e il secondo *mille* volte più grande; per ridurre dunque, al suo giusto valore, il prodotto che ne resulta e che si trova necessariamente *centomila* volte troppo grande, bisogna renderlo cento mila volte più piccolo, il che si eseguisce ponendo una virgola in modo che essa

separi *cinque* cifre decimali: cioè quante ve ne erano nei due fattori riuniti. Il vero prodotto è dunque 23,94450.

Seguendo questa regola, succederà spesso che il prodotto avrà meno cifre significative, del numero dei decimali che si avranno da separare. In questo caso, ci suppliremo scrivendo alla sinistra del prodotto, abbastanza zeri perchè dopo aver sottratto il numero dei decimali prescritto dalla regola, rimanga ancora uno zero per indicare il posto dell' unità. Così, nel caso in cui i numeri proposti fossero 0,5634 e 0,0425, dopo avere ottenuto il prodotto 2394450, considerandoli come numeri interi, bisogna separare otto decimali conformemente alla regola. Siccome non ci sono che sette cifre, si aggiongeranno due zeri alla sinistra del prodotto e si otterrà, 0,02394450 pel vero prodotto delle due frazioni proposte.

13. Moltiplicazione complessa. Si dà questo nome alla moltiplicazione che si tratta di effettuare sopra numeri composti d' interi e di frazioni ordinarie. Si presentano due casi: 1° uno solo dei fattori è complesso; 2° i due fattori sono complessi. Esaminiamoli successivamente.

1°. Si abbia da moltiplicare $22^{or}\ 32'\ 42''$, per 36. 32 *minuti* e 42 *secondi* sono frazioni dell' unità che in questo caso è l' *ora*.

Possiamo moltiplicare separatamente 22,32 e 42 per 36, il che darà tre prodotti parziali, di cui il primo esprimerà *ore*, il secondo *minuti* e il terzo *secondi*. Avremo in questo modo

$$22^{or} \times 36 = 792^{or},$$
$$32' \times 36 = 1152'$$
$$42'' \times 36 = 1620'',$$

ma siccome l' *unità* alla quale si riporta il prodotto è l' *ora*, bisogna ridurre in ore i 1152 *minuti* e 1620 *secondi*. Cominciando dal ridurre $1620''$ in minuti, il che si eseguisce dividendo per 60, abbiamo $1620'' = 27'$, così il numero dei minuti diventa $1152' + 27' = 1179'$. Riducendo, ora, $1179'$ in ore, il che si fa ancora dividendo per 60, si trova $1179' = 19^{or}\ 39'$. Così aggiungendo 19^{or} a 792^{or}, abbiamo definitivamente $811^{or}\ 39'$ pel prodotto di $22^{or}\ 32'\ 45''$, per 36.

Si eseguisce ancora la medesima operazione prendendo ciò che si chiama le *parti aliquote* del prodotto dell' unità; il che in certi casi, è molto più speditivo del formare i diversi prodotti parziali e quindi ridurli. Non possiamo indicare questo processo che con un solo esempio. Proponiamoci di moltiplicare 14 libbre (francesi) 15 once 5 grossi, per 26.

	lib.	onc.	gros.
	14	15	5
	26		
	84		
	28		
Per 8 *once*	13		
Id 4	6	8	—
Id 2	3	4	—
Id 1	1	10	—
Per 4 *grossi*	—	13	—
Id. 1	—	3	2
Prodotto Libbre	389	6	2

Dopo aver disposta l'operazione come precede, si comincerà dal formare il prodotto di 14 per 26; poi per moltiplicare per 15 once si osserverà che 15 once sono $\frac{15}{16}$ di una libbra, vale a dire che bisogna moltiplicare 26 per $\frac{15}{16}$. Ma 15 si decompone in $8+4+2+1$; così invece di moltiplicare per $\frac{15}{16}$, possiamo cominciare dal moltiplicare per $\frac{8}{16}$, quindi per $\frac{4}{16}$, $\frac{2}{16}$ e $\frac{1}{16}$; ora $\frac{8}{16}$ sono la *metà* di una libbra, così il prodotto di $\frac{8}{16}$ dev' essere la *metà* di quello di *una* libbra quest' ultimo essendo semplicemente 26 se ne prenderà la metà che è 13, e si scriverà 13, facendolo corrispondere con le cifre della medesima specie del prodotto di 26 per 14.

Per moltiplicare ora per $\frac{4}{16}$, poichè $\frac{4}{16}$ è la metà di $\frac{8}{16}$, si prenderà la *metà* dell' ultimo prodotto 13, il che darà 6 libbre 8 once, che si scriverà come si è fatto. $\frac{2}{16}$, essendo ancora la metà di $\frac{4}{16}$, si prenderà di nuovo la metà dell'ultimo prodotto, 6 libbre e 8 once, il che darà 3 lib. e 4 once. Finalmente per moltiplicare per l' ultima frazione della libbra $\frac{1}{16}$, si prenderà ancora la metà del prodotto di $\frac{2}{16}$, ovvero, la metà di 3 libbre e 4 once, che è 1 libbra e 10 once. Si avranno in questo modo quattro prodotti parziali la cui somma formerà il prodotto di $\frac{15}{16}$, ovvero di 15 once. Passando alla frazione 5 grossi, si osserverà che 5 grossi sono $\frac{5}{8}$ di un' oncia, il che può decomporsi in $\frac{4}{8}+\frac{1}{8}$; ma il prodotto di 26 per $\frac{4}{8}$ di un' oncia dev' essere la *metà* di quello di 26 per *un'* oncia, che abbiamo trovato essere 1 libbra e 10 once, si prenderà dunque la metà di 1 libbra e 10 once, e si scriverà, *per 4 grossi* . . . . . o libbre 13 once. Per terminare l' operazione bisogna ancora moltiplicare per $\frac{1}{8}$ d' oncia; ma $\frac{1}{8}$ è il quarto di $\frac{4}{8}$ il cui prodotto è di o libbre e 13 once, si prenderà dunque il *quarto* di quest' ultimo prodotto che è 3 once e 2 grossi, quindi addizionando tutti i prodotti parziali si troverà 389 libbre 6 once e 2 grossi, che è il prodotto domandato.

2.° Se il moltiplicando e il moltiplicatore sono tutti due complessi, possiamo ancora eseguire la moltiplicazione col metodo delle *parti aliquote*; ma è generalmente più semplice ridurre questi due fattori in due numeri frazionari semplici. Sia per esempio $3+\frac{2}{3}+\frac{5}{6}$ da moltiplicare per $4+\frac{1}{2}+\frac{3}{4}$. Ridu-

cendo queste due quantità ciascuna in una sola frazione, si troverà (*Vedi* Addizione);

$$3+\frac{2}{3}+\frac{5}{6}=\frac{54}{18}+\frac{12}{18}+\frac{15}{18}=\frac{81}{18},$$

$$4+\frac{1}{2}+\frac{3}{4}=\frac{32}{8}+\frac{4}{8}+\frac{6}{8}=\frac{42}{8};$$

e l'operazione sarà riportata a moltiplicare $\frac{81}{18}$ per $\frac{42}{8}$, il che pel n.° 11 dà

$$\frac{81}{18}\times\frac{42}{8}=\frac{3402}{144}=23+\frac{90}{144}=23+\frac{5}{8}.$$

Per abbreviare i calcoli bisogna sempre, nelle riduzioni, ottenere il più piccolo comun denominatore.

Proponiamoci ancora di moltiplicare 2 giorni 18^{or} 15′ 22″ per 3° 15′ 16″. Si ridurrà il moltiplicando in *secondi* di tempo, e il moltiplicatore in *secondi* di grado, e siccome, da una parte, un giorno vale 86400″; un'ora 3600″; e un minuto, 60″, si troverà

$$\begin{array}{rcl} 2\times86400'' & = & 172800'' \\ 18\times3600'' & = & 64800 \\ 15\times60'' & = & 900 \\ & & 22 \\ \hline \text{gior. } 2\ 18^{or}\ 15'\ 23'' & = & 238522'' \end{array}$$

da un'altra parte; siccome un grado vale 3600″ e un minuto 60″, si avià

$$\begin{array}{rcl} 3\times3600'' & = & 10800'' \\ 15\times60'' & = & 900 \\ & & 16 \\ \hline 3^{o}.\ 15''.\ 16'' & = & 11716'' \end{array}$$

così l'operazione sarà riportata a moltiplicare 238522″ per 11716″. Una volta trovato il prodotto, questo prodotto dovendo essere di *secondi* di tempo, si ridurrà in *minuti*, *ore e giorni*, dividendolo successivamente per 60.

14. Moltiplicazione Algebrica. Il prodotto di a per b si esprime, come l'abbiamo di già detto per

$a\times b$, ovvero per $a\,.\,b$, o finalmente per ab.

Quello di a per $b+c$, si esprime con $ab+ac$, poichè a dovendo essere aggiunto $b+c$ volte a se stesso, cominciando dal prenderlo b volte e quindi c volte, si hanno due prodotti parziali ab, ac la cui somma $ab+oc$ è a presa $b+c$ volte. Così

$$a\times(b+c)=ab+bc.$$

Il prodotto di due binomi $a+b$, $c+d$ è $ac+ad+bc+bd$, vale a dire, la somma dei prodotti due a due, dei termini che gli compongono.

Infatti; facendo $a+b=m$, si ha

$$m(c+d)=mc+md$$

e, rimettendo $a+b$ in luogo di m,

$$(a+b)\times(c+d)=(a+b)c+(a+b)d$$
$$=ac+bc+ad+bd.$$

Il prodotto di due trinomi $a+b+c$, $d+e+f$ sarà similmente uguale a

$$ad+ae+af+bd+be+bf+cd+ce+cf,$$

vale a dire, alla somma dei prodotti di due a due dei termini che compongono questi trinomi. Si dimostrerebbe come sopra.

In generale il prodotto di due polinomi qualunqne è nguale alla somma dei prodotti di due a due di tutti i termini che gli compongono.

15. Per moltiplicare due qnantità algebriche l' nna per l' altra si dispougono in modo che i loro termini siano il più possibile nell' ordine alfabetico, e che essi sieno ordinati per potenze decrescenti (da sinistra a destra) di una stessa lettera, quando una stessa lettera si trova in più termini elevata a potenze differenti. Si moltiplica inseguito tutti i termini del moltiplicando per ciascun termine del moltiplicatore, seguendo per i *segni* dei prodotti parziali le regole date. (*Vedi* Algebra n.° 9). L' addizione di tutti qnesti prodotti dà il prodotto generale domandato.

Esempio 1.° Si domanda il prodotto di $a+b$ per $a-b$, vale a dire, il prodotto della *somma* di due quantità qualunque per la loro differenza. Si avrà

$$\begin{array}{l} a+b \\ a-b \\ \hline a^2+ab \\ \quad -ab-b^2 \\ \hline \end{array}$$

$$\text{Prodotto} \ldots \; a^2-b^2$$

I due prodotti parziali $+ab$, $-ab$ distruggendosi, il resultamento a^2-b^2 c' insegna che *la somma di due numeri moltiplicata per la loro differenza dà la differenza dei quadrati di questi numeri*, il che è una proprietà generale ovvero nna *legge* dei numeri.

Esempio 2.° Moltiplicare $a^3b-2a^2b^2+3b^3$ per $a^2-3ab+b^2$. Mediante la regola stabilita bisogna formare i prodotti parziali,

$$\begin{array}{lll} a^3b\times a^2, & -2a^2b^2\times a^2, & 3b^3\times a^2 \\ a^3b\times -3ab, & -2a^2b^2\times -3ab, & 3b^3\times -3ab \\ a^3b\times b^2, & -2a^2b^2\times b^2, & 3b^3\times b^2. \end{array}$$

Ora, riducendo tutti questi monomi alla loro più semplice espressione, si ha

$$\begin{array}{lll} a^3b\times a^2 \quad =a^5b, & -2a^2b^2\times a^2 \quad =-2a^4b^2, & 3b^3\times a^2 \quad =3a^2b^5 \\ a^3b\times -3ab=-3a^4b^2, & -2a^2b^2\times -3ab=+Ga^3b^3, & 3b^3\times -3ab=-9ab^4 \\ a^3b\times b^2 \quad =a^3b^3, & -2a^2b^2\times b^2 \quad =-2a^2b^4, & 3b^3\times b^2 \quad =3b^5 \end{array}$$

e, siccome possiamo eseguire immediatamente queste riduzioni, l' operazione si scrive

$$
\begin{array}{l}
a^3b-2a^2b^2+3b^3 \\
a^2-3ab+b^2 \\
\hline
a^5b-2a^4b^2+3a^2b^3 \\
\quad -3a^4b^2+6a^3b^3-9ab^4 \\
\qquad + a^3b^3-2a^2b^4+3b^5 \\
\hline
\end{array}
$$

Prodotto $a^5b-5a^4b^2+7a^3b^3+3a^2b^3-2a^2b^4-9ab^4+3b^5$.

Per ordinare questo prodotto secondo le potenze di a, gli si dà la forma

$$a^5b-5a^4b^2+7a^3b^3+(3b^3-2b^4)a^2-9ab^4+3b^5.$$

16. Termineremo quest' articolo esaminando la composizione del prodotto di più binomi i cui primi termini sono gli stessi, come $x+a$, $x+b$, $x+c$, ec.; composizione della quale abbiamo fatto uso altrove. (*Vedi* Equazione e Fattoriella.)

Se indichiamo con A la somma dei secondi termini a, b, c, d, ec., che supponiamo nel numero di m; con B, la somma dei prodotti di *due a due* di questi secondi termini; con C, la somma dei loro prodotti di *tre a tre*, ec. . . . . E, finalmente, con M, il prodotto di tutti questi secondi termini, avremo

$$(x+a)(x+b)(x+c)\ .\ .\ .\ .\ .\ (x+m)=$$
$$x^m+Ax^{m-1}+Bx^{m-2}+Cx^{m-3}+\text{ ec. . . . }+M\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (1).$$

A questa forma generale ci siamo condotti, per analogia, formando i prodotti successivi:

$$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab,$$
$$(x+a)(x+b)(x+c)=x^3+(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)x+abc,$$
$$\text{ec.}=\text{ec.}$$

Così si tratta di dimostrare che questa composizione ha generalmente luogo. A quest' effetto, ammettiamo che l' eguaglianza (1) sia rigorosamente verificata nel caso di m fattori, e moltiplichiamo i suoi due membri per un nuovo binomio $x+n$, otterremo

$$(x+a)(x+b)(x+c)\ .\ .\ .\ .\ .\ (x+m)(x+n)=$$
$$x^{m+1}+Ax^m+Bx^{m-1}+Cx^{m-2}+\text{ ec. . . . . . }+Mx$$
$$+nx^m+nAx^{m-1}+nBx^{m-2}+\text{ ec. . . . . . }+nM=$$
$$x^{m+1}+(A+n)x^m+(B+nA)x^{m-1}+(C+nB)x^{m-2}+\text{ ec. . . . . . }+nM$$

Ora, esaminando quest' ultimo prodotto, si riconosce facilmente che $A+n$ è la somma di $m+1$ secondi termini dei binomi; che $B+nA$ è la somma dei prodotti di due a due di questi $m+1$ secondi termini; che $C+nB$ è la somma dei loro prodotti di tre a tre e così di seguito; e che finalmente nM è il prodotto di tutti questi secondi termini. Così il prodotto di $m+1$ binomi segue la stessa legge di quella di m binomi, e basta che questa legge sia vera per due binomi perchè essa lo sia generalmente, dunque, ec.

Moltiplicazione per Logaritmi. (*Vedi* Logaritmo.)

MOMENTO. (*Mec.*) Nella statica, si chiama generalmente, *momento di una forza* il prodotto di questa forza per una retta.

Vi sono differenti specie di *momenti*, secondo la natura della retta che serve di fattore. Così, quando il momento di una forza è riferito ad un piano o ad una retta, questo fattore è la perpendicolare, abbassata dal punto d'applicazione della forza, sul piano o sulla retta; quando il *momento* è riferito ad un punto, e allora si chiama *centro dei momenti*, questo fattore è la perpendicolare abbassata dal centro dei momenti sopra la direzione della forza.

§ I. *Dei momenti rapporto ad un punto.* Come abbiamo detto sopra, il momento di una forza rapporto ad un punto è il prodotto di questa forza per la perpendicolare abbassata da questo punto sopra la sua direzione. Sia, per esempio, una forza P rappresentata dalla parte AP della sua direzione (*Tav.* CXCVIII, *fig.* 1). Se da un punto qualunque O si abbassa sopra AP o sul suo prolungamento una perpendicolare $OB=p$, il prodotto $P \times OB$ ovvero Pp sarà il *momento* della forza P rapporto al punto O. Il punto donde si abbassa la perpendicolare si chiama *centro dei momenti.*

1. Questi momenti godono di una proprietà degna di osservazione che fa l'oggetto della seguente proposizione.

Il momento della resultante di due forze, dirette in un medesimo piano, preso rapporto ad un punto qualunque del loro piano, è uguale alla somma ovvero alla differenza dei momenti delle componenti, preso rapporto al medesimo punto: alla somma, quando il centro dei momenti è al di fuori dell' angolo delle componenti e del suo opposto al vertice; alla differenza, quando questo punto è compreso nell' angolo delle componenti, o nel suo opposto al vertice.

Siano dunque P e P' due forze, AP ed AP' (*Tav.* CXCVIII, *fig.* 2), le loro direzioni; R la loro resultante, AR la sua direzione. Cominciamo dal prendere il centro dei momenti in O fuori dall' angolo PAP', e abbassiamo le perpendicolari $Op=p$, $Or=r$, $Op'=p'$, avremo

$$Rr=Pp+P'p'.$$

Infatti, conduciamo una retta OA che unisca il centro dei momenti e il punto d' applicaziona delle forze, e si chiami

a, la retta OA,
α, l' angolo RAO,
α', l' angolo PAO,
α'', l' angolo P'AO;

i triangoli rettangoli ApO, ArO, $Ap'O$ ci daranno

$$p=a\cos\alpha',\quad r=a\cos\alpha,\quad p'=a\cos\alpha'' \;\ldots\ldots\; (a).$$

Premesso ciò, decomponiamo le tre forze P, P', R, seguendo due assi rettangolari AX, AY, facendo, per maggior semplicità, coincidere l' asse AX con la retta OA; le componenti che seguono l' asse AX ci daranno l' equazione (*Vedi* RESULTANTE).

$$R\cos\alpha=P\cos\alpha'+P'\cos\alpha''.$$

Moltiplicando tutti i termini per a, e sostituendo in luogo di $a\cos\alpha$, $a\cos\alpha'$, $a\cos\alpha''$, i loro valori r, p, p', verrà

$$Rr=Pp+P'p',$$

il che dimostra la prima parte della proposizione.

2. Prendiamo ora il centro dei momenti nell' interno dell' angolo PAP' delle forze P e P' (*Tav.* CXCVIII, *fig.* 3) ovvero nell'angolo dei loro prolungamenti $p'Ap$ (*Tav.* CXCVIII, *fig.* 4), e conserviamo le precedenti denominazioni, avremo sempre le relazioni (a); ma le componenti rettangolari delle tre forze P, P', R che seguono l'asse AX ei daranno

$$R\cos z = P\cos z' - P'\cos z'',$$

e per conseguenza

$$Rr = Pp - P'p';$$

il che dimostra la seconda parte della proposizione.

In quest'ultimo caso, le perpendicolari abbassate dal centro dei momenti non sono tutte situate dalla stessa parte della retta OA, che unisce il centro dei momenti al punto di applicazione delle forze, dimodochè possiamo abbracciare le due parti della proposizione in una sola, dando dei segni differenti alle perpendicolari, secondo che esse sono alla destra o alla sinistra dalla retta OA. Mediante questa convenzione, la perpendicolare $Op' = p'$ che è *positiva*, per esempio, nella (*Tav.* CXCVIII, *fig.* 2), sarà *negativa* nella (*Tav.* CXCVIII, *fig* 3 e 4) o *viceversa*. L'enunciato del teorema diventa allora semplicemente:

Il momento della resultante di due forze, rapporto ad un punto qualunque preso nel loro piano, è uguale alla somma dei momenti di queste due forze.

3. Bisognerà, nelle diverse applicazioni di questo teorema, dare il segno + o il segno —, a piacere, alle perpendicolari situate da una medesima parte della retta che unisce il centro dei momenti col punto d'applicazione della forze, e dare un segno contrario a quelle che sono situate dall'altra parte.

4. Si dà ordinariamente al teorema in questione un altro enunciato il quale dispensa dal considerare i *segni* delle perpendicolari. Ecco il fatto: se si suppone che il punto O sia fisso e che le perpendicolari Op, Or, Op' siano rette inflessibili, possiamo immaginare che le forza P, R, P' agiscano all'estremità di queste rette, e siccome allora esse non possono produrre che un moto di rotazione intorno del punto O, si veda che, quando il punto O è nell'interno dell'angolo PAP' o del suo opposto al vertice (*Tav.* CXCVIII, *fig.* 3 e 4), la forza P e la resultante R tendono a far girare i loro punti d'applicazione p ed r in un senso, e l'altra forza P' tende a far girare il suo p', in un senso opposto; nel mentre che quando il punto O è fuori di questi angoli (*Tav.* CXCVIII, *fig.* 2), le tre forze P, P', R' tendono a far girare i loro punti d'applicazione nel medesimo senso. Osservando che, nel primo caso, la resultante R agisce nel medesimo senso della potenza il cui momento è il più grande, si ha il seguente enunciato generale:

Il momento della resultante di due forze è uguale alla sommo o alla differenza dei momenti di queste forze, secondo che esse tendono a far girare i loro punti d'applicazione (supposti ai piedi delle perpendicolari) nello stesso senso o in sensi differenti.

Si deve osservare che il moto di rotazione introdotto in questo principio non è che un mezzo indiretto per determinare i segni dei momenti.

5. Ciò che abbiamo detto per la resultante di due forze si estende facilmente alla resultante di un numero qualunque di forze che agiscono nel medesimo piano. Siano P, P', P'', P''', ec., delle forze dirette in uno stesso piano e applicate a differenti punti situati sopra questo piano, indichiamo con

R_1 la resultante delle due forze P e P',
R_2 la resultante delle due forze R_1 e P'',
R_3 la resultante delle due forze R_2 e P''',
ec. . . . . ec.

e rappresentiamo inoltre con p, p', p'', p''', ec., r_1, r_2, r_3, ec., le perpendicolari abbassate respettivamente dal centro dei momenti sopra le direzioni di queste forze. Avremo, in virtù del principio dimostrato, le equazioni

$$R_1 r_1 = Pp + P'p' ,$$
$$R_2 r_2 = R_1 r_1 + P'' p'' ,$$
$$R_3 r_3 = R_2 r_2 + P''' p''' ,$$
$$\text{ec.} = \text{ec.};$$

quindi sostituendo ciascun valore in quello che lo segue,

$$R_2 r_2 = Pp + P'p' + P''p'' ,$$
$$R_3 r_3 = Pp + P'p' + P''p'' + P'''p''' ,$$
$$\text{ec.} = \text{ec.},$$

e in generale

$$Rr = Pp + P'p' + P''p'' + \text{ec.} \quad \ldots\ldots \quad (b),$$

R essendo la resultante di tutte le forze P, P', P'', ec., e r la perpendicolare abbassata dal centro dei momenti sulla sua direzione. S' intende bene che nell' equazione (b) bisogna dare il segno + ai momenti delle forze che tendono a far girare il sistema nel medesimo senso della resultante R, e il segno — ai momenti di quelle che tendono a farlo girare nel senso opposto.

6. L' equazione (b) diventa

$$Pp + P'p' + P''p'' + \text{ec.} = 0 \quad \ldots\ldots \quad (c),$$

nel caso di $Rr = 0$. Ora, questo caso può avere luogo in due circostanze differentissime, cioè: quando $R = 0$, vale a dire quando le forze P, P', P'', ec., non hanno veruna resultante o sono in equilibrio, e quando $r = 0$, il che ha luogo quando si prende il centro dei momenti sulla direzione della resultante. Così, quest' equazione (c) non è generalmente sufficiente per determinare le condizioni d' equilibrio di un sistema di forze concorrenti, ed è necessario aggiungerle le due equazioni

$$P\cos\alpha + P'\cos\alpha' + P''\cos\alpha'' + \text{ec.} = 0,$$
$$P\,\text{sen}\,\alpha + P'\,\text{sen}\,\alpha' + P''\,\text{sen}\,\alpha'' + \text{ec.} = 0,$$

(*Vedi* Resultante), nelle quali gli angoli α, α', α'', ec., sono quelli che formano respettivamente le forze P, P', P'', ec., con uno degli assi rettangolari ai quali si riportano le direzioni di queste forze.

Si osserverà ancora, per tutto quello che riguarda l' equazione (b), che se si avesse qualche forza la cui direzione passasse pel centro dei momenti, il suo momento sarebbe nullo.

7. Il teorema generale, di cui l' equazione (b) non è che l' espressione algebrica, avendo luogo per delle forze le quali fanno tra loro degli angoli qualunque, deve necessariamente sussistere quando tutte queste forze sono paralelle, poichè delle rette paralelle possono sempre essere considerate come concorrenti all' infinito. Non ci arresteremo dunque alle dimostrazioni particolari che si possono dare di questo caso.

8. Le proprietà dei momenti, rapporto ad un punto, danno il mezzo più sem-

plice per determinare le condizioni dell'equilibrio della *leva*, macchina tanto più importante in quanto che possiamo riportare ad essa quasi tutte le altre.

Sia BAC (*Tav.* CXCVIII, *fig.* 5) una leva curva alle estremità B e C della quale sono applicate delle forze P e Q, è evidente che l'equilibrio non può aver luogo tra queste forze che quando esse agiscono nello stesso piano, e che la loro resultante, passando sul punto d'appoggio A, si trova distrutta dalla resistenza di questo punto. Ora prendendo il punto d'appoggio per centro dei momenti e conducendo le perpendicolari Ap e Aq sopra le direzioni delle forze P e Q, il momento della resultante è nullo, e si ha, in virtù del precedente teorema,

$$o = Pp + Qq,$$

o piuttosto

$$o = Pp - Qq,$$

poichè le forze P e Q tendono a far girare la leva intorno al punto A in sensi opposti. Quest'eguaglianza dà la proporzione

$$P : Q :: q : p,$$

vale a dire che, nel caso dell'equilibrio, *la potenza e la resistenza stanno in ragione inversa delle perpendicolari abbassate dal punto d'appoggio sopra le loro direzioni.*

9. Se la leva è retta (*Tav.* CXCVIII, *fig.* 6) e le forze P e Q paralelle, le perpendicolori Ap ed Aq sono tra loro come le lunghezze AB ed AC dei bracci della leva, e si ha

$$P : Q = AB : AC;$$

donde si conclude che *il rapporto delle forze è l'inverso di quello dei bracci alle quali esse sono respettivamente applicate.*

10. Queste condizioni dell'equilibrio non hanno luogo che supponendo la leva una linea inflessibile senza gravità. Se vogliamo avere quelle che convengono ad una leva fisica, bisogna considerare il suo peso come una terza forze che agisce al suo centro di gravità. In generale, qualunque sia il numero delle forze P, P', P'', ec., Q, Q', Q'', ec., applicate ad una leva, e che agiscono nel suo piano, bisognerà, per l'equilibrio, che queste forze abbiano una resistenza unica che venga a passare pel punto d'appoggio; dimodochè prendendo sempre questo punto per centro dei momenti, si avrà l'equazione d'equilibrio

$$o = Pp + P'p' + P''p'' + \text{ec.} . - Qq - Q'q' - Q''q'' - \text{ec.}$$

P, P', P'', ec., indicando le forze che tendono a far girare la leva in un dato senso, Q, Q', Q'', ec., quelle che tendono a farla girare nel senso opposto, e p, p', p'', ec., q, q', q'', ec., le perpendicolari respettive abbassate dal punto d'appoggio sopra le direzioni delle forze.

§. II. *Dei momenti rapporto ad un piano.* Il momento di una forza rapporto ad un piano differisce essenzialmente dal suo momento rapporto ad un punto; quest'ultimo dipende, come l'abbiamo veduto, dalla direzione della forza, e si trove indipendentemente del suo punto d'applicazione, nel mentre che il primo è indipendente dalla direzione e dipende dal punto d'applicazione: *ed è il prodotto della forza per la perpendicolare abbassata dal suo punto d'applicazione sopra un piano qualunque.*

11. Sia AP (*Tav.* CXCVIII, *fig.* 7), la direzione di una forza applicata ad un punto A, MN un piano diretto in un modo qualunque nello spazio; se si abbassa dal punto A sul piano MN la perpendicolare $AB = p$, e che si rappresenti la grandezza della forza per P, il prodotto Pp sarà il momento della forza P rapporto al piano MN.

La proprietà principale di questa specie di momenti è enunciata in questo teorema:

Il momento della resultante di un numero qualunque di forze parallele, rapporto ad un piano scelto arbitrariamente, è eguale alla somma dei momenti di queste forze rapporto allo stesso piano.

Cominciamo dal considerare due forze (*Tav.* CXCVIII, *fig.* 8) $P = AP$, $P' = BP'$ applicate ai punti A e B; la loro resultante $R = CR$ sarà eguale alla loro somma $P + P'$, e si determinerà il suo punto d'applicazione C (*Vedi* RESULTANTE) mediante la proporzione

$$R : P' = AB : AC \ldots\ldots (d).$$

Dai tre punti d'applicazione A, B, C, abbassiamo sopra un piano qualunque YOX le perpendicolari $Aa = z$, $Bb = z'$, $Cc = z_1$, e conduciamo la retta Am parallela ad ab, avremo, mediante le proprietà delle parallele

$$AB : AC = Bm : Cn \ldots\ldots (e),$$

e potremo concludere dalle due proporzioni (d) ed (e)

$$R \times Cn = P' \times Bm \ldots\ldots (f);$$

ma $Aa = nc = mb$, così il prodotto $R \times nc$ ovvero $(P + P')nc$ è la stessa cosa di

$$R \times nc = P \times Aa + P' \times mb \ldots\ldots (g).$$

Aggiungendo le due uguaglianze (f) e (g), verrà

$$R \times (Cn + nc) = P \times Aa + P' \times (Bm + mb),$$

ovvero

$$Rz_1 = Pz + P'z' \ldots\ldots (h).$$

Ora, i prodotti Rz_1, Pz, $P'z'$, sono i momenti respettivi delle forze R, P, P' rapporto al piano YOX, dunque, ec.

12. Se le forze P e P' non fossero dirette nel medesimo senso, ovvero se i punti d'applicazione A, B, C non fossero situati tutti tre da una stessa parte dal piano YOX, l'equazione (h) avrebbe sempre luogo; bisognerebbe solamente distinguere con segni opposti quelle delle quantità P, P', R, z_1, z, z', le cui direzioni si trovassero opposte. Così, i momenti che consideriamo possono essere positivi o negativi; positivi quando la forza e la perpendicolare sono dello stesso segno; negativi quando essi sono di segni differenti.

13. Procedendo come l'abbiamo fatto sopra (n.° 5), è facile vedere che possiamo estendere l'equazione (h) ad un numero qualunque di forze parallele P, P', P'', ec., e che indicando sempre con R la resultante generale, e con z_1 la perpendicolare abbassata dal suo punto d'applicazione, si ha

$$Rz_1 = Pz + P'z' + P''z'' + P'''z''' + \text{ec} \ldots\ldots\ldots (i).$$

Se si prendessero nella stessa maniera i momenti delle forze P, P', P''. ec.,

rapporto ai piani ZOX, ZOY coordinati rettangolarmente col primo piano YOX, è evidente che si avrà ancora

$$\left.\begin{aligned} Ry_1 &= Py+P'y'+P''y''+\text{ec.} \ldots\ldots \\ Rx_1 &= Px+P'x'+P''x''+\text{ec.} \ldots\ldots \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (i).$$

Le tre equazioni (i) determinano il punto d'applicazione della resultante, ovvero, ciò che è la stessa cosa, il *centro delle forze paralelle*, in un modo semplicissimo; poichè, osservando che

$$R=P+P'+P''+\text{ec.},$$

si ottiene, per i valori delle tre coordinate z_1, y_1, x_1, di questo centro, le espressioni

$$z_1=\frac{Pz+P'z'+P''z''+\text{ec.}}{P+P'+P''+\text{ec.}},$$

$$y_1=\frac{Py+P'y'+P''y''+\text{ec.}}{P+P'+P''+\text{ec.}},$$

$$x_1=\frac{Px+P'x'+P''x''+\text{ec.}}{P+P'+P''+\text{ec.}}.$$

14. Se uno dei piani coordinati, quello delle yx, per esempio, passasse pel centro delle forze paralelle, il momento della resultante Rz_1 diventerebbe nullo, a motivo di $z_1=o$, e si avrebbe per la somma dei momenti, rapporto a questo piano, l'equazione

$$Pz+P'z'+P''z''+\text{ec.}=o \ \ldots\ldots (k).$$

15. Ciò che precede basta per trovare le condizioni generali dell'equilibrio di un sistema di forze paralelle P, P′, P″, ec., applicate a punti situati in un modo qualunque nello spazio, e legati tra loro in un modo inseparabile. Infatti, perchè un tal sistema stia in equilibrio, bisogna che una qualunque delle forze sia uguale e direttamente opposta alla resultante di tutte le altre; così facendo

$$R'=P'+P''+P''+\text{ec.},$$

si ha per prima condizione

$$P+R'=o,$$

ovvero

$$P+P'+P''+\text{ec.}=o \ \ldots\ldots (1);$$

e si tratta di esprimere che le due forze P ed R′ sono direttamente opposte. Ora, indicando con α, β, γ le coordinate del punto d'applicazione della forza R′, ovvero del centro delle forze paralelle P′, P″, P‴, ec., si deve avere, in virtù dell'equazioni (i)

$$\left.\begin{aligned} R'\alpha &= P'x'+P''x''+\text{ec.} \\ R'\beta &= P'y'+P''y''+\text{ec.} \\ R'\gamma &= P'z'+P''z''+\text{ec.} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (l);$$

ma il punto d' applicazione della forza R' deve trovarsi sulla direzione della forza P; poichè in caso diverso queste due forze non potrebbero essere direttamente opposte; dimodochè se si prende, per render la cosa più semplice, il piano delle xy perpendicolare a questa direzione, le coordinate α e γ saranno sopra una stessa retta perpendicolare al piano xy, e si avrà di più

$$\alpha = x, \quad \beta = y.$$

Sostituendo perciò x per α, y per β e $-$P per R' nelle due prime equazioni (l), si otterrà

$$\left.\begin{aligned} Px + P'x' + P''x'' + \text{ec.} &= o \\ Py + P'y' + P''y'' + \text{ec.} &= o \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (2),$$

equazioni le quali, insieme con l' equazioni (1), racchiudono tutte le condizioni dell' equilibrio di un sistema di forze paralelle. Queste due ultime indicano che *la somma dei momenti delle forze* P, P', P'', ec., *è nulla rapporto ai piani delle* xz *e delle* yz, *i quali sono paralelli alla loro direzione.*

Così, perchè un sistema di forze paralelle sia in equilibrio, è necessario e basta:

1.° *Che la somma di queste forze sia uguale a zero;*

2.° *Che la somma dei loro momenti sia nulla, rapporto ai due piani paralelli alla loro direzione.*

16. Un sistema di forze dirette in un modo qualunque nello spazio potendo sempre decomporsi in due sistemi, di cui l' uno non contiene che forze paralelle, e l' altro forze dirette in uno stesso piano, le sue condizioni d' equilibrio dipendono dalle due specie di momenti delle quali abbiamo esposti i principii fondamentali. *Vedi* RESULTANTE per tutto ciò che ha relazione alla composizione e alla decomposizione delle forze.

MOMENTO DI ATTIVITÀ, *Vedi* QUANTITÀ DI AZIONE.

MOMENTO D' INERZIA. (*Dinamica*). Si dà questo nome alla somma dei prodotti di tutti gli elementi materiali di un corpo, per i quadrati delle loro distanze respettive all' asse di rotazione di questo corpo; ed essa è l' integrale dell' espressione

$$\int r^2 dm,$$

nella quale dm indica l' elemento della massa del corpo, ed r la sua distanza all' asse fisso di rotazione.

In questo punto ci limiteremo ad indicare i mezzi di ottenere i valori numerici di questi momenti, che dobbiamo considerare nelle questioni relativa al moto di un corpo solido intorno di un asse fisso (*Vedi* MOTO), e i quali hanno importanti applicazioni nella teoria delle macchine.

1. Il caso più semplice è quello di un solido omogeneo di rivoluzione; il momento d' inerzia essendo preso rapporto all' asse medesimo della figura generatrice. Sia perciò (*Tav.* CXCIX, *fig.* 1) ACB una curva qualunque la cui rivoluzione intorno della retta AB genera il solido, del quale si vuole determinare il momento d' inerzia relativo a questa retta. Immaginiamo questo solido diviso in in un' infinità di strati, di una grossezza infinitamente piccola, per mezzo di piani perpendicolari all' asse AB, e ciascuno di questi strati diviso in un' infinità di anelli circolari concentrici di una larghezza infinitamente piccola; sia abm' la sezione di uno di questi anelli, o il suo centro, om il suo raggio interno, e om' il suo raggio esterno. Si chiami r il raggio om, dr la larghezza

mm' dell' anello, e prendendo A per origine dell' ascisse contate sull' asse AB, facciamo $Ao = x$; dx sarà la grossezza dell' anello.

È evidente che l' anello in questione è la differenza di due cilindri che hanno per altezza comune dx, per raggi respettivi r e $r+dr$, e i volumi dei quali sono conseguentemente πr^2dx, $\pi(r+dr)^2dx$; il volume dell' anello sarà perciò rappresentato da

$$\pi(r+dr)^2dx - \pi r^2dx,$$

il qual volume, sviluppando il quadrato e trascurando il termine πdr^2dx infinitamente piccolo del terz' ordine, si riduce a

$$2\pi\, rdrdx.$$

Se ora indichiamo la densità del corpo con ρ, la massa dell' anello sarà

$$2\pi\rho\, rdrdx,$$

e siccome tutti i suoi punti sono a tali distanze dall' asse AB che possiamo considerare come uguali ad r, poichè la distanza delle più lontane non differisce da r che della quantità infinitamente piccola dr, il prodotto

$$2\pi\rho rdrdx \times r^2 \quad \text{ovvero} \quad 2\pi\rho r^3drdx$$

sarà il *momento d' inerzia* dell' anello.

L' integrale di questa quantità preso, rapporto ad r, tra i limiti $r=0$ e $r=$ oC, darà il *momento d' inerzia* di uno strato elementare del solido, ovvero la somma dei momenti d' inerzia di tutti gli anelli dei quali questo strato è composto.

Indichiamo oC con y, quest' integrale è

$$\int_0^y 2\pi\rho r^3drdx = \frac{1}{2}\pi\rho y^4dx.$$

Ma il momento d' inerzia del solido è eguale alla somma dei momenti d' inerzia di tutti i suoi strati elementari, dunque integrando quest' ultima quantità rapporto ad x, e tra i limiti $x=0$, $x=$ AB, si otterrà definitivamente l' espressione di questo momento.

La questione si riduce perciò a dedurre il valore di y in funzione di x dall' equazione della curva generatrice, e dopo, averlo sostituito nella formula

$$\frac{1}{2}\pi\rho y^4dx \; . \; . \; . \; . \; . \; (1),$$

a integrare questa formula da $x=0$ fino ad $x=$ AB.

2. Sia, per primo esempio, la generatrice una semplice retta CD (*Tav.* CXCIX, *fig.* 2) che giri intorno dell' asse MN condotto nel suo piano, la sua equazione sarà della forma

$$y = ax + b.$$

Prendiamo il punto A per origine, e AB per asse delle ascisse, avremo

$$b = \text{AC}, \quad a = \text{tang BSD};$$

e sostituendo il valore di y nell' equazione (1), il momento d' inerzia domandato sarà

$$\frac{1}{2}\pi\rho \cdot \int\left(ax+b\right)^4dx;$$

indicando AB con h, e integrando tra i limiti $x=o$, $x=h$, otterremo, per il momento d'inerzia del cono troncato CBD, generato dalla rivoluzione del trapezio ABDC intorno della retta AB

$$\frac{1}{10}\cdot\frac{\pi\rho}{a}\left\{\left(ah+b\right)^5-b^5\right\}\ \ldots\ldots\ (a).$$

3. Quando la retta CD è paralella all'asse, si ha $a=o$ e il cono diventa un cilindro. Il momento d'inerzia di un cilindro rapporto al suo asse è dunque

$$\frac{1}{2}\pi\rho\,.\,hb^4\ \ldots\ldots\ (b);$$

h essendo l'altezza del cilindro, e b il raggio della sua base; se si decompone questa quantità in tre fattori $\frac{1}{2}b^2$, ρ e πhb^2, e che si osservi che $\rho\times\pi hb^2$ è il prodotto della densità ρ pel volume πhb^2, ne potremo concludere che, *il momento d'inerzia di un cilindro che gira intorno del suo proprio asse, è uguale alla metà del prodotto della sua massa pel quadrato del suo raggio.*

4. Possiamo dedurre dall'espressione (b) il valore del momento d'inerzia di un anello cilindrico, rapporto al suo asse, osservando che questo momento dev'essere la differenza di due cilindri, che avessero respettivamente per raggi il più grande e il più piccolo raggio dell'anello. Se (*Tav.* CXCIX, *fig.* 3) $Am=r$ e il raggio più grande, e $Am'=r'$ il più piccolo, il momento d'inerzia dell'anello cilindrico mps sarà dunque

$$\frac{1}{2}\pi\rho hr^4-\frac{1}{2}\pi\rho hr'^4=\frac{1}{2}\pi\rho h\left(r^4-r'^4\right);$$

h esprimendo l'altezza mp.

Indichiamo con R il raggio medio $\frac{r+r'}{2}$, e con e la grossezza $mm'=r-r'$ dell'anello, quest'espressione diventerà

$$\pi\rho h\left(r^2-r'^2\right)\times\left(R^2+\frac{e^2}{4}\right),$$

il che significa che *il momento d'inerzia di un anello cilindrico che giri intorno del suo proprio asse, è uguale al prodotto della sua massa per la somma del quadrato del raggio medio e del quadrato della metà della grossezza dell'anello.*

Supponiamo, per una seconda applicazione, che la curva generatrice ACB (*Tav.* CXCIX, *fig.* 1) sia una semicirconferenza di circolo, la sua equazione riferita agli assi Ax, Ay sarà (*Vedi* Applicazione dell'Algebra alla Geometria),

$$y^2=2ax-x^2$$

$2a$ indicando il diametro AB. Quest'equazione dà

$$y^4=4a^2x^2-4ax^3+x^4;$$

e, sostituendo nell'espressione (1), la formula da integrare diventa

$$\frac{1}{2}\pi\rho\left(4a^2x^2-4ax^3+x^4\right)dx,$$

il cui integrale è

$$\frac{1}{2}\pi\rho\left(\frac{4a^2x^5}{3}-ax^4+\frac{x^6}{5}\right).$$

Tale è il momento d'inerzia della porzione di sfera generata dal settore A o C; per aver quello della sfera intera, bisogna prendere $x=2a$, e si ottiene

$$\frac{8}{15}\pi\rho a^5,$$

osservando che $\frac{4}{3}\pi\rho a^3$ esprime la massa della sfera, si conclude che *il momento d'inerzia della sfera rapporto ad un asse che passa pel suo centro, è eguale al prodotto della sua massa per i due quinti del quadrato del suo raggio.*

5. Allorquando il solido del quale si cerca il momento d'inerzia non è un solido di rivoluzione, il valore di questo momento non può determinarsi che mediante un'integrazione tripla. Questo è ciò che il seguente esempio renderà più chiaro.

Sia BE (*Tav.* CXCIX, *fig.* 4) un paralellepipedo rettangolo e composto di una materia omogenea, il solido di cui si tratta di determinare il momento d'inerzia rapporto ad una delle sue costole AB, per esempio, presa per asse. Si chiamino a, b, c le tre costole AC, AD, AB di questo solido, e supponiamolo diviso in un'infinità di parti elementari da piani perpendicolari a ciascuna delle costole; prendiamo AB per asse delle z, AD per asse delle y, ed AC per asse delle x. Ciascuna parte elementare m, corrispondente alle coordinate x, y, z, sarà un piccolo paralellepipedo rettangolo avente per costole dx, dy, dz; il suo volume sarà espresso con $dxdydz$, e la sua massa con

$$\rho\, dxdydz;$$

ρ indicando la densità.

La distanza Ap di quest'elemento all'asse delle z è uguale a

$$\sqrt{\left[\overline{Aq}^2+\overline{pq}^2\right]},$$

ovvero a

$$\sqrt{x^2+y^2};$$

così, il suo momento d'inerzia ha per espressione

$$\rho(x^2+y^2)dxdydz,$$

e l'espressione del momento d'inerzia del solido è

$$\int\int\int\rho\left(x^2+y^2\right)dxdydz \;.\;.\;.\;.\;.\; (2);$$

il triplo segno $\int$ indicando che bisogna integrare successivamente rapporto a ciascuna delle variabili, considerando in ciascuna operazione le due altre come costanti.

Perchè l'integrale comprenda tutti gli elementi del paralellepipedo BE, bisogna cominciare da integrare rapporto a z, tra i limiti $z=0$, $z=AB=c$; poi,

rapporto ad y tra i limiti $y=o$, $y=AD=b$, e finalmente rapporto ad x, tra i limiti $x=o$, $x=AC=a$.

La prima integrazione dà

$$\rho c\int\int\left(x^2+y^2\right)dxdy,$$

la seconda

$$\rho c\int\left(x^2b+\frac{b^3}{3}\right)dx,$$

e la terza

$$\rho c\left(\frac{a^3b}{3}+\frac{ab^3}{3}\right),$$

espressione che possiamo mettere sotto la forma

$$\frac{\rho abc}{3}\left(a^2+b^2\right);$$

ma abc è il volume del paralellepipedo, e ρabc la sua massa; dunque, *il momento d' inerzia di un paralellepipedo rettangolo rapporto ad una delle sue costole, è eguale al terzo del prodotto della sua massa per la somma dei quadrati delle due altre costole.*

6. Cerchiamo ancora il momento d' inerzia dello stesso paralellepipedo rapporto ad un asse OZ che passi pel centro delle due facce opposte BE, DC (*Tav.* CXCIX, *fig.* 5). Si scelga quest' asse, che è uguale e paralello alla costola AB, per asse delle z, prenderemo gli assi delle y e delle x respettivamente paralelli alle costole AD ed AC, e mediante gli stessi ragionamenti fatti sopra, troveremo per l' espressione del momento d' inerzia,

$$\int\int\int\rho\left(x^2+y^2\right)dxdydz;$$

ma, in questo caso, è evidente, che la prima integrazione, rapporto a z, deve effettuarsi tra i limiti $z=o$, $z=c$; la seconda, rapporto ad y, tra i limiti $y=On'=\frac{1}{2}b$, $y=-On'=-\frac{1}{2}b$; e la terza, rapporto ad x, tra i limiti $x=Om'=\frac{1}{2}a$, $x=-Om'=-\frac{1}{2}a$. Effettuando le operazioni, la prima integrazione dà

$$\rho c\int\int\left(x^2+y^2\right)dxdy,$$

si ottiene per la seconda

$$\rho cb\int\left(x^2+\frac{1}{12}b^2\right)dx,$$

e per la terza,

$$\frac{1}{12}\rho abc\left(a^2+b^2\right).$$

Laonde, *il momento d' inerzia di un paralellepipedo rettangolo, che giri intorno di un asse che passi per i centri di due facce opposte e che è, per*

conseguenza, parallelo ad uno delle sue dimensioni, è uguale al dodicesimo del prodotto della sua massa per la somma dei quadrati delle due altre dimensioni.

7. I momenti d'inerzia di tutti i solidi rapporto ad assi qualunque sono espressi per mezzo dell'integrale triplo (2); poichè possiamo concepire un solido, qualunque sia la sua forma, come composto di un numero infinito di parallelepipedi rettangoli infinitamente piccoli; la sola difficoltà, consiste dunque nel determinare i limiti tra i quali debbono effettuarsi l'integrazioni, perchè l'ultima comprenda tutti i punti del solido, il che generalmente non è possibile che quando la superficie del solido è capace di essere rappresentata mediante un'equazione. Ecco il metodo che in questo caso dobbiamo seguire.

Consideriamo un solido AOCB (*Tav.* CXCIX, *fig.* 6) compreso fra tre piani coordinati rettangolari e una superficie curva data dall'equazione

$$F(x, y, z) = o \; . \; . \; . \; . \; . \; (c).$$

Il momento d'inerzia di un elemento m di questo solido rapporto all'asse OZ sarà, per quello che precede

$$\rho(x^2+y^2)dxdydz \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (d);$$

e integrando quest'espressione, rapporto a z, da $z=o$ fin al valore di z dato dall'equazione (c), si avrà il momento d'inerzia di un parallelepipedo elementare pq il quale comincia al piano xy, e va a terminare alla superficie curva. Se indichiamo con $f(x, y)$ il valore di z ricavato dall'equazione (c), il resultamento della prima integrazione sarà della forma

$$\rho(x^2+y^2)f(x, y)dxdy.$$

Considerando x e dx come costanti, è evidente che l'integrale di quest'espressione, rapporto ad y, sarà il momento di uno strato elementare rst parallelo al piano zy; ma affinchè questo strato vada a terminare alla superficie curva, bisogna prendere l'integrale tra i limiti $y=o$ e $y=Ov$; questo valore Ov non è che l'ordinata y del punto t, di cui l'ascissa è x, e che appartiene alla sezione CtB della superficie curva, col piano xy; si otterrà dunque Ov facendo $z=o$ nell'equazione (c), e risolvendola rapporto ad y. Il momento d'inerzia dello strato elementare rst diventerà definitivamente

$$\varphi x \, . \, dx;$$

φx indicando una funzione della sola variabile x. L'integrale di quest'ultima quantità, preso tra i limiti $x=o$ e $x=$OB, sarà la somma dei momenti d'inerzia di tutti gli strati elementari che compongono il solido, e per conseguenza il momento d'inerzia del solido. Il limite OB è il valore dato dall'equazione (c), dopo averci fatto $y=o$, $z=o$.

8. L'ordine dell'integrazioni è del tutto arbitrario; ma l'integrale, rapporto a z, essendo sempre il più semplice a determinarsi, sarà bene cominciare da questo, poi integrare rapporto ad x o ad y, secondo la maggiore o minore facilità che potrà resultarne per i calcoli. Se si prende il secondo integrale rapporto ad x, i limiti saranno $x=o$ e $x=$al valore che si deduce dall'equazione (c), dopo averci fatto $z=o$; i limiti del terzo integrale saranno allora $y=o$ e $y=$al valore dato dall'equazione (c) dopo aver fatto $z=o$, $x=o$. Il seguente esempio sarà adattato a render più chiaro questo processo.

Sia il solido AOCB un quarto di ellissoide a tre assi riferito ai suoi semidia-

metri principali $OB = a$, $OC = b$, $OA = c$, avremo, per l'equazione della superficie curva (*Vedi* Applicazione dell' Algebra alla Geometria)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \ldots\ldots (e),$$

prendendo per limite superiore dell' integrale, rapporto a z, dell' espressione

$$\int\int\int \rho\left(x^2+y^2\right)dx\,dy\,dz,$$

il valore di z ricavato dall' equazione (e), cioè:

$$z = c\sqrt{\left[1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right]},$$

troveremo, per quest' integrale,

$$\int\int \rho c\left(x^2+y^2\right)\sqrt{\left[1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right]}dx\,dy.$$

il quale può mettersi sotto la forma

$$\rho c\int\int x^2\sqrt{\left[1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right]}dx\,dy + \rho c\int\int y^2\sqrt{\left[1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right]}dx\,dy \ldots (f).$$

Cominciamo ad occuparci del primo termine di quest' ultima espressione. L' integrazione rapporto ad y dovendo effettuarsi come se x e dx fossero quantità costanti, poniamo, per abbreviare,

$$b^2 - \frac{b^2x^2}{a^2} = r^2,$$

e il primo termine dell' equazione (f) diventerà, astrazione fatta dai segni d' integrazione

$$\frac{\rho\, c x^2 dx}{b}\cdot\sqrt{r^2-y^2}\,.\,dy \ldots\ldots (g).$$

Facendo, nell' equazione della superficie, $z = 0$, e ricavando il valore di y^2 verrà

$$y^2 = b^2 - \frac{b^2x^2}{a^2} = r^2.$$

Così, i limiti dell' integrale rapporto ad y sono $y = 0$, $y = r$; ora, l' integrale di $dy\sqrt{r^2-y^2}$, preso tra questi limiti, è eguale al quarto dell' area del circolo il cui raggio è r (*Vedi* Quadratura), dunque

$$\frac{\rho\, c x^2 dx}{b}\int dy\sqrt{r^2-y^2} = \frac{\rho\, c x^2 dx}{b}\cdot\frac{1}{4}\pi r^2,$$

π indicando il rapporto della circonferenza al diametro. Rimettendo per r^2 il suo valore, quest' integrale diventa

$$\frac{\rho\, bc\,\pi}{4a^2}\left(a^2x^2 - x^4\right)dx;$$

quantità che essendo, integrata rapporto ad x tra i limiti $x=o$, $x=a$, dà

$$\frac{1}{15}\rho\, bca^3\pi \; . \; . \; . \; . \; . \; (h);$$

tale è, conseguentemente, il valore del primo membro dell'espressione (c), ed abbiamo

$$\rho c\int\int x^2\sqrt{\left[1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right]}dxdy=\frac{1}{15}\rho\, bca^3\pi.$$

Osserviamo ora che il secondo membro dell'eqoazione (f) sarebbe identico col primo se si cangiasse y in x e b in a, e per conseguenza basta operare questo cangiamento nel valore del primo membro, per ottenere immediatamente quello del secoodo, laonde esso è:

$$\rho c\int\int y^2\sqrt{\left[1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right]}dxdy=\frac{1}{15}\rho\, acb^3\pi.$$

Aggiungendo questi due valori, otterremo pel momento d'inerzia del quarto di ellissoide a tre assi, che girano intorno del suo semi-diametro c ovvero dell'asse delle z, l'esprassione

$$\frac{1}{15}abc\rho\pi\left(a^2+b^2\right).$$

Possiamo concluderne che il momento d'inerzia dell'ellissoide intera rapporto all'asse delle z, è

$$\frac{4}{15}abc\rho\pi\left(a^2+b^2\right);$$

poichè le relazioni di distanza delle molecole elementari con l'asse delle z sono le medesime in ciascun quarto di qnesto solido.

Un semplice cambiamento di lettere fa conoscere i momenti d'inerzia dell'ellissoide rapporto agli assi delle y e delle x; il primo è:

$$\frac{4}{15}abc\rho\pi\left(c^2+a^2\right),$$

e l'nltimo

$$\frac{4}{15}abc\rho\pi\left(c^2+b^2\right).$$

Osservando che il volume di questo solido è nguale $\frac{4\pi}{3}abc$, e che perciò la quantità $\frac{4\pi}{3}abc\rho$ rappresenta la sua massa, i valori dei tre momenti d'inerzia diventeranno, indicando la massa con M

Rapporto all'asse delle x . . . . . $\frac{M}{5}\left(c^2+b^2\right)$,

Rapporto all'asse delle y . . . . . $\frac{M}{5}\left(a^2+c^2\right)$,

Rapporto all'asse delle z . . . . . $\frac{M}{5}\left(a^2+b^2\right)$;

donde si vede che il più gran momento corrisponde al più piccolo diametro principale e reciprocamente.

9. Se si fa $a=b=c$, l'ellissoide diventa una sfera, e i tre momenti d'inerzia si riducono alla stessa quantità

$$\frac{8}{15}\rho\pi a^5;$$

che è il valore che abbiamo trovato di sopra n.° 4.

10. Tutte le precedenti determinazioni dei momenti d'inerzia suppongono che i solidi siano omogenei, vale a dire che tutte le loro parti abbiano una stessa densità; se questa circostanza non avesse luogo, bisognerebbe cercare separatamente il momento d'inerzia di ciascuna parte omogenea, e la somma di tutti i momenti parziali darebbe il momento d'inerzia totale. Nel caso in cui la densità variasse da un elemento all'altro, si avrebbe una quarta integrazione da effettuare, per la quale diventerebbe essenziale di conoscere la legge che segue la densità negli strati successivi del solido. Consideriamo, per esempio, un cilindro di un'altezza h che giri intorno del suo proprio asse; il suo momento d'inerzia è, come l'abbiamo trovato di sopra (n.° 3), nel caso di una densità costante ρ,

$$\frac{1}{2}\pi\rho hb^4.$$

Se l'altezza h aumenta di una quantità infinitamente piccola e diventa $h+dh$, l'accrescimento corrispondente $\frac{1}{2}\pi\rho b^4 dh$ del momento d'inerzia, esprimerà il momento d'inerzia di uno strato cilindrico perpendicolare all'asse. Ora, se il cilindro non è omogeneo, ma composto di un'infinità di strati omogenei, la densità ρ sarà funzione dell'altezza h, e bisognerà, per ottenere il momento d'inerzia del cilindro, integrare la formula

$$\frac{1}{2}\pi\rho b^4 dh,$$

la quale esprime il momento d'inerzia di uno strato qualunque. Donde si vede che il momento d'inerzia di un cilindro composto di strati circolari omogenei è uguale a

$$\frac{1}{2}\pi b^4\int\rho dh,$$

espressione nella quale ρ è una funzione di h. Nel caso in cui la densità diminuisse come l'altezza aumenta, si avrebbe, indicando con ρ la densità del primo strato,

$$\rho=\frac{\delta}{h},$$

e, per conseguenza,

$$\frac{1}{2}\pi b^4\int\rho\, dh=\frac{1}{2}\pi b^4\delta\,\mathrm{Log}\,h,$$

a motivo di

$$\int\frac{dh}{h}=\mathrm{Log}\,h;$$

l'integrale dovendo prendersi da $h=0$ fino ad $h=h$.

11. Se il cilindro, invece di avere una densità variabile nel senso della sua al-

tezza h, fosse composto di strati cilindrici omogenei, la variazione si effettuerebbe nel senso del suo raggio b, e per conseguenza il momento d' inerzia di uno qualunque di questi strati sarebbe la differenziale del momento d' inerzia

$$\frac{1}{2}\pi\rho hb^4,$$

presa rapporto a b, vale a dire

$$\frac{1}{8}\pi\rho hb^3db;$$

dimodochè il momento d' inerzia del cilindro a densità variabile diventerebbe

$$\frac{1}{8}\pi h\int\rho b^3db.$$

Nell' ipotesi di una densità, variando dall' asse alla superficie convessa, in rapporto inverso del raggio dello strato cilindrico, si porrebbe

$$\rho=\frac{\delta}{b},$$

ρ indicando la densità dell' asse, e si avrebbe, pel momento d' inerzia,

$$\frac{1}{8}\pi h\delta\int b^2db=\frac{3}{8}\pi\delta b^3;$$

l' integrale essendo preso tra i limiti $b=o$, $b=b$.

12. Si abbia ancora una sfera composto di strati omogenei concentrici. Si troverà, mediante considerazioni simili alle precedenti, che il momento d' inerzia di uno strato elementare è uguale alla differenziale di quello della sfera omogenea presa rapporto al raggio, vale a dire a

$$\frac{8}{3}\pi\rho a^4da,$$

dimodochè ρ essendo una funzione di a, il momento d' inerzia di questa sfera a densità variabile è

$$\frac{8}{3}\pi\int\rho a^4da.$$

Ammettiamo che la densità diminuisca, dal centro alla superficie, proporzionalmente ai quadrati dei raggi degli strati concentrici, e indichiamo con δ la densità al centro, avremo, per la densità di uno strato qualunque,

$$\rho=\frac{\delta}{a^2},$$

e per conseguenza, pel momento d' inerzia della sfera,

$$\frac{8}{3}\pi\delta\int a^2da=\frac{8}{9}\pi\delta a^3.$$

Questi esempii sembrano sufficienti a indicare il metodo che bisognerebbe seguire per qualunque altro solido e per qualunque altra legge delle densità.

13. Quando il momento d' inerzia di un corpo, rapporto ad un asse che passa pel suo centro di gravità, è conosciuto, è facile dedurne il suo momento d'inerzia rapporto a qualunque altro asse paralello al primo.

Infatti, prendiamo il primo asse per asse delle z, il centro di gravità per origine, e facciamo $x=\alpha$, $y=\beta$, le coordinate del punto ove il nuovo asse di rotazione taglia il piano delle xy al quale esso è ancora perpendicolare. Indichiamo di più con a la distanza dei due assi, con r la distanza di una molecola

elementare al primo di questi assi, e con r' la distanza della stessa molecola al secondo. Il momento d'inerzia che si riferisce al primo asse, e che è supposto conosciuto, sarà $\int r^2 dm$, e $\int r'^2 dm$ sarà quello che si rapporta al secondo asse. Ora, abbiamo

$$r'^2 = (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2$$
$$= x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \alpha^2 + \beta^2,$$

e, di più,

$$r^2 = x^2 + y^2; \quad a^2 = \alpha^2 + \beta^2;$$

dunque

$$r'^2 = r^2 + a^2 - 2\alpha x - 2\beta y.$$

Moltiplicando tutto per dm e integrando, viene

$$\int r'^2 dm = \int r^2 dm + \int a^2 dm - 2\alpha \int x dm - 2\beta \int y dm.$$

Ma l'asse di gravità essendo sull'asse delle z, ne resulta

$$\int x dm = 0, \quad \int y dm = 0;$$

poichè x ed y indicando le coordinate di un elemento dm della massa M, i momenti (*Vedi* Momento, § II) di quest'elemento, rapporto agli assi delle x e delle y, sono respettivamente xdm, ydm, e conseguentemente le coordinate x_1 e y_1, del centro di gravità di M debbono essere determinate dall'equazioni

$$Mx_1 = \int x dm, \quad My_1 = \int y dm$$

(*Vedi* Centro di gravità); ora, in questo caso, le coordinate x_1, y_1 sono nulle, poichè il centro di gravità è all'origine: dunque $\int x dm = 0$, $\int y dm = 0$.

L'integrale $\int dm$ non essendo altra cosa che la massa intera del corpo che abbiamo indicato con M, abbiamo dunque definitivamente

$$\int r'^2 dm = \int r^2 dm + a^2 M \ldots\ldots (l)$$

vale a dire che *il momento d'inerzia riferito al nuovo asse è uguale al momento d'inerzia riferito al primo, più il prodotto della massa del corpo pel quadrato della distanza del centro di gravità al nuovo asse.*

14. È stata adottata la notazione k^2 per rappresentare il rapporto del momento d'inerzia $\int r^2 dm$ alla massa M del mobile; il che dà all'espressione (l) la forma

$$\int r'^2 dm = M(k^2 + a^2).$$

Diventa così evidente 1.° che il momento d'inerzia riferito ad un asse qualunque, che passa pel centro di gravità, è sempre più piccolo di quello che si

riferisce a qualunque altro asse paralello al primo; 2.° che i momenti d'inerzia, presi rapporto a assi paralelli tra loro ed ugualmente distanti dal centro di gravità sono uguali, e 3.° finalmente che il valore di questi momenti aumenta con la distanza degli assi al centro di gravità del corpo.

Dobbiamo rimandare, per ulteriori particolarità, al *Trattato di Meccanica* del signor Poisson.

MOMENTUM. *Vedi*. Quantita' di moto.

MONGE (Gaspare), uno dei più celebri e dei più dotti geometri moderni, nacque a Beaune nel 1746. La storia della scienza poche vite rammenta contrassegnate da tanti lavori, da tanta attività, da tanti successi come quella di questo illustre professore, il cui nome si conserverà sempre popolare in Francia. Il padre di Monge, semplice mercante foraneo, ma nel tempo stesso uomo di molta intelligenza, non trascurò nulla per l'istruzione de' suoi tre figli, cui disposizioni non comuni traevano allo studio delle scienze. La superiorità che ben presto manifestò il giovine Gaspare, e la celebrità che in seguito acquistò, hanno fatto dimenticare i suoi fratelli, uno dei quali è stato esaminatore della marina, e l'altro professore d'idrografia ad Anversa. Dal collegio dell'Oratorio di Beaune, ove ricevette le prime nozioni delle matematiche, Monge fu inviato a quello di Lione diretto dai religiosi dello stesso ordine, per compiervi i suoi studj. All'età di sedici anni, prese posto accanto ai suoi stessi maestri, ed occupò una cattedra di fisica. Un ufiziale superiore del corpo del genio, avendo veduto la pianta di Beaune levata da Monge in grandi dimensioni, senza il soccorso degli strumenti più necessarj, lo raccomandò al comandante della scuola di Mézières fondata per gli ufiziali di quell'arme. Sventuratamente le istituzioni di quel tempo non permettevano a Monge d'esservi ammesso come alunno. Gli umili natali e la povertà di questo giovine, che aveva già manifestato i più grandi talenti, erano allora ostacoli invincibili. Nondimeno egli acconsentì ad entrarvi come alunno ajuto dei lavori e come disegnatore. L'ingegno di Monge si sdegnava della oscurità alla quale lo condannavano i lavori speciali ai quali era addetto. Ma anco in questa situazione non tardò a trovare un mezzo per entrare luminosamente nella carriera delle scoperte. Ai lunghi calcoli che richiedeva una operazione di diffilamento sostituì un metodo geometrico e generale, non meno sicuro, ma infinitamente più spedito, per giungere alla soluzione del problema. Non aveva allora che diciannove anni: Bossut, che professava le matematiche a Mézières, lo richiese per suo supplente, e poco dopo successe all'abate Nollet nella cattedra di fisica. Fin da tale momento il giovine Monge, sciolto ormai dalle condizioni umilianti che inceppato aveano i primi suoi passi nella carriera della scienza, libero del suo avvenire, si abbandonò a tutte le ispirazioni del suo ingegno. Tra lui e l'illustre Leibnitz havvi questo punto di conformità che ambedue sdegnando di seguire nei libri dei loro predecessori o dei loro contemporanei il cammino della scienza, si esposero a vedersi rapire o disputare l'anteriorità di non poche verità da loro scoperte. Così Monge scoprì la produzione dell'acqua per mezzo della combustione dell'aria infiammabile senza sapere di essere stato prevenuto da Cavendish in questa importante scoperta. Nel tempo stesso si occupava di curiose ricerche sui gas, sull'attrazione molecolare, sugli effetti ottici, sull'elettricità, sulla meteorologia, e gettava nelle matematiche i primi fondamenti di quella teoria nuova e feconda che ha ricevuto poi il nome di *Geometria descrittiva*, e che è uno dei principali suoi titoli all'ammirazione della posterità.

Il talento di Monge era essenzialmente sintetico, e tale è il carattere delle sue opere e delle sue scoperte. Compendiar tutto per afferrar tutto ad un sol colpo d'occhio, riepilogar tutto per tutto esprimere in una sola idea, tale è stata la formula costante che improntata vediamo in tutti i suoi lavori. Una tale disposi-

zione di spirito gli rendeva quasi nojosa l'esposizione scritta delle sue ricerche scientifiche, e fu soltanto la necessità di formarsi dei titoli agli onori accademici che lo determinò dapprima a pubblicare diverse memorie sul calcolo integrale.

Fu soltanto nel 1780 che Monge, il cui nome era divenuto già celebre, venne nominato membro dell' Accademia delle Scienze. Questo spirito ardente e fiero, che nella sua giovinezza aveva dovuto soffrire l' ingiustizia dei pregiudizj e dei vizj delle antiche istituzioni del suo paese, accolse coll' entusiasmo che gli era proprio le speranze cui ne' suoi primordj la rivoluzione francese fece nascere nelle menti meglio intenzionate. Non dobbiamo qui occuparci della carriera politica di Monge, quantunque l'uomo pubblico non abbia mai fatto dimenticare in lui il dotto profondo; basti però il dire che nelle grandi circostanze in cui trovossi la Francia quando Monge fu chiamato al potere, ei si mostrò costantemente degno della venerazione della quale, oggi che il tempo comincia a cancellare le impressioni lasciate dalle passioni politiche, viene onorata la sua memoria. Non è vero che Monge abbia cooperato col suo voto alla morte di Luigi XVI. Nominato ministro della marina nella insurrezione del 10 Agosto, egli lo era ancora all' epoca di quella deplorabile catastrofe; ma fu soltanto come membro del governo ch' ei dovette concorrere insieme co' suoi colleghi alla esecuzione della sentenza della Convenzione. Gli atti personali però di questo dotto in quell'epoca terribile distruggono interamente le ingiuste accuse che in seguito gli attirarono le sue funzioni politiche, e lo dimostrano degno sotto tutti i rapporti della riconoscenza della Francia. Alla sua attività e ai suoi talenti dovette la repubblica il ristabilimento della marina; ma d'altronde, disingannato di buon'ora delle speranze che lo avevano trascinato nel vortice della rivoluzione, diede la sua dimissione nel mese di Aprile 1793. Ei si affrettò però a rispondere all' appello che la Convenzione fece ai dotti, quando il territorio della Francia fu minacciato da un' invasione europea. Ei contribuì grandemente a quello sviluppo straordinario di forze, che farà lo stupore della posterità e che salvò allora il paese da sventure maggiori di quelle che ebbe a soffrire. Monge passava i giorni e le notti nelle officine delle armi, nelle fonderie, nelle fabbriche delle polveri, a sorvegliare i lavori, a renderne più semplice l' esecuzione. In tale periodo della sua vita, di cui è quasi incredibile l' attività, trovò il tempo di pubblicare l'*Arte di fabbricare i cannoni*, una *Istruzione sulla fabbricazione dell' acciajo*, e finalmente la sua *Geometria descrittiva*. A Monge è dovuto il ristabilimento della istruzione pubblica in Francia, e fu per la sua influenza e secondo i suoi piani che vennero successivamente fondate le scuole normale e politecnica. Alla sua esperienza negli artifizj meccanici fu dovuto il trasporto dei capo-lavori dell'Italia, che fecero per alcun tempo il principale ornamento dei Musei della Francia. Questi lavori tanto diversi, ed i cui resultati erano così facili ad apprezzarsi, fruttarono a Monge una grande influenza politica, e al suo nome una popolarità senza esempio: due volte in quell' epoca ei fu portato come candidato al Direttorio. Ma allora l' entusiasmo di Monge avea cangiato di oggetto; ei si era affezionato al giovine conquistatore dell' Italia con una sincerità che non si smentì mai. Fece parte dell' Istituto di Egitto, e dopo essersi distinto in quella memorabile spedizione pel suo zelo per la scienza, tornò a riprendere pacificamente il suo posto di professore nella scuola politecnica i cui alunni lo salutarono col titolo di padre. Fu per lui un dispiacere amarissimo l' organizzazione militare che sotto Napoleone cangiò lo spirito e lo scopo di quella gloriosa istituzione. In quella circostanza ei lottò coraggiosamente contro la volontà del suo eroe, e non potendo trionfare della sua ostinazione, rilasciò il suo appuntamento di professore agli alunni poco favoriti dalla fortuna, cui assurdi regolamenti avrebbero allontanato dalla scuola. L' ammirazione di Monge per Napoleone non fu una di quelle pa-

linodie vergognose e servili che segnano tante macchie nella storia moderna. Il suo carattere nobile e disinteressato non si smentì mai, e fu soltanto in nome della loro antica amicizia che l' imperatore giunse a trionfare della sua abnegazione e a fargli accettare gli onori dei quali lo ricolmò. Monge fu successivamente promosso alla dignità di senatore, a quella di conte di Pelusio, ricevè il cordone di grande ufficiale della Legione d' Onore e della Riunione, e fu provvisto di un ricco majorascato in Vestfalia. La caduta dell' impero, lo smembramento della scuola politecnica, il bando dato ai convenzionali, la cancellazione non meno ingiusta che arbitraria del suo nome dall' Istituto, lo colpirono nel più profondo del cuore: ei cadde in una tetra malinconia, e non fece che condurre un'esistenza penosa e languente fino al 28 Luglio 1818, giorno in cui morì portando nella tomba il dolore il più vivo dei suoi amici e la stima dei suoi nemici politici. I limiti che ci sono imposti non ci permettono di dare una maggiore estensione a questi rapidi cenni sulla vita e sulle opere di Monge; egli è fortunatamente di quel ristretto numero di uomini il cui nome basta a rammemorarne la fama, e che facendo parte della gloria di un paese non ha bisogno che di esser pronunziato per fare conoscere i suoi titoli alla celebrità. Le opere che Monge ha pubblicato separatamente sono: I *Traité élémentaire de statique*, Parigi, 1786, in-8; ivi, 1834, in-8, 7.ª ediz. II *Description de l'art de fabriquer les canons*, ivi, anno II, in-4; III *Leçons de géométrie descriptive*, ivi, anno III; ivi, 1813, in-4, 3.ª ediz.; ed ivi, 1814, 4.ª ediz., con un supplemento di Hachette, che pubblicò poi separatamente un secondo supplemento nel 1818; IV *Application de l'analyse à la géométrie des surfaces du premier et du deuxième degré*, 4.ª ediz., Parigi, 1809, in-4. Si leggono inoltre numerose ed interessanti memorie di Monge sopra diverse parti delle scienze matematiche e fisiche nella *Raccolta* dei socj stranieri, e nelle *Memorie* dell' Istituto e dell' Accademia delle Scienze. Su questo dotto può consultarsi ancora l' *Elogio* che ne ha scritto Berthollet, e l' *Essai historique sur les services et les travaux scientifiques de Monge*, del barone Dupin.

MONOCORDO (*Acust.*). Strumento composto di una sola corda sonora di cui si servivano gli antichi per determinare i rapporti numerici dei *suoni*. All' articolo Armonica abbiamo esposto questi rapporti.

MONOMIO (*Alg.*). Quantità composta di una sola parte o di un solo termine, come a^2. ax, a^2bx, ec. (*Vedi* Binomio).

MONTANARI (Geminiano), celebre astronomo italiano, nato a Modena nel 1632, professò lungo tempo e con molto grido le matematiche nelle università di Bologna e di Padova, e morì in quest' ultima città il 13 Ottobre 1687. Le opere sue principali sono: I *Discorso accademico sopra la sparizione di alcune stelle, ed altre novità scoperte nel cielo*, Bologna, 1672, in-4; II *Ephemeris Lansbergiana ad annum 1666*; *item de solis hypotesibus et refractionibus siderum*; III *Il Mare Adriatico e sue correnti esaminate, e la natura dei fiumi scoperta e con nuove forme di ripari corretta*; opera importante e reputatissima, inserita nella *Raccolta di autori che trattano del moto delle acque*, stampata a Parma, tom. I. Per altre particolarità sulla vita e sugli scritti di questo dotto deve ricorrersi alla di lui vita inserita da Fabroni nelle sue *Vitae Italorum*, ed alla *Biblioteca modenese* di Tiraboschi.

MONTMORT (Pietro Rémond di), dotto matematico, nato a Parigi nel 1678 da nobile famiglia, fu destinato dapprima alla magistratura; ma l'inclinazione sua alle scienze esatte gli fece abbandonare lo studio della legge per dedicarsi unicamente a quello delle matematiche. L'ardore suo per tali scienze, di cui apprese gli elementi da Carré e da Guisnée, gli fece fare rapidi progressi. Strinse amicizia coi dotti più illustri del suo tempo e tra gli altri col sommo Newton. Intrapreso avendo a coltivare in particolare la teoria delle probabilità, di cui fino allora nessun geometra

aveva trattato con una certa estensione, pubblicò nel 1708 il suo *Saggio sui giuochi d'azzardo*, opera che ebbe meritamente un grande incontro, non solo per la novità del soggetto, ma ancora per i bei teoremi che ivi per la prima volta si trovano esposti e dimostrati sul calcolo delle combinazioni e delle probabilità. Di tale opera Montmort pubblicò in seguito una nuova edizione col titolo di *Essay d'analyse sur les jeux de hazard*, Parigi, 1713, in-4, con grandi aggiunte. Egli è pure autore di un *trattato delle serie infinite*, che Taylor suo amico fece stampare nel 1717 nelle *Transazioni filosofiche*. Questo geometra morì a Parigi il 7 Ottobre 1719.

MONTUCLA (Giovanni Stefano). Questo dotto storico delle scienze matematiche nacque a Lione nel 1725, fece i suoi studj nel collegio dei Gesuiti di questa città, e di buon ora vi si distinse per la sua applicazione allo studio e per la rapidità dei suoi progressi. Manifestò soprattutto disposizioni particolari per la scienza della quale imprese in seguito a scriver la storia, e per le lingue straniere che con maravigliosa facilità apprendeva. Montucla, di famiglia povera, rimase orfano all'età di sedici anni, e si recò a Parigi non tanto per terminarvi la sua educazione che per procacciarsi dei mezzi di sussistenza. L'eccellente suo carattere, e l'estensione delle sue cognizioni in età così tenera, risvegliarono a suo favore l'interesse di vari dotti, tra i quali si contano d'Alembert, Cochin, Leblond, ec.: i loro consigli non meno che l'appoggio loro gli furono gli gran vantaggio. Ammesso nel numero dei collaboratori della *Gazzetta di Francia*, giornale che godeva allora di una grande celebrità letteraria, ed al coperto ormai dal bisogno, cominciò a raccogliere i materiali per la sua *Storia delle matematiche*, opera non meno vasta che importante, che l'erudizione sua e le profonde sue cognizioni delle teorie le più elevate della scienza lo rendevano atto a comporre. La prima edizione comparve nel 1758. In questo libro si ammira l'estensione delle ricerche e la chiarezza colla quale sono esposte le scoperte successive fatte nei diversi rami della scienza. Ciò non ostante il piano generale dell'opera, la migliore e la più compiuta che ancora si abbia su tale interessante argomento, non è al coperto da qualunque rimprovero. Il racconto troppo spesso si trova interrotto da lunghe dissertazioni e dalla esposizione di teorie delle quali basta che l'autore stabilisse l'origine, il cammino e i progressi. Vi si desiderano pure delle vedute generali più filosofiche ed una classificazione più cronologica e più metodica dei fatti: imperocchè è troppo interessante ed istruttivo il seguire gli sviluppi dello spirito umano nel loro complesso; e la gran lezione che deve ricavarsi da questo quadro maraviglioso riesce meno facile a cogliersi quando si deve risalire il corso dei secoli in ciascun ramo del sapere. Montucla lavorava sulla seconda edizione di quest'opera, quando dopo lunghe vicissitudini morì a Versailles il 18 Dicembre 1799. Fu Lalande che s'incaricò di terminare l'opera di Montucla, ma deve confessarsi che non è sempre stato così felice come il suo amico: gli ultimi due volumi ai quali ebbe parte sono molto inferiori ai due primi sotto tutti i rapporti. Nulladimeno la *Storia delle Matematiche* di Montucla rimarrà come un raro monumento di erudizione e di sapere, finchè questo importante soggetto non venga trattato di nuovo da qualche abile scrittore, cui non spaventino le difficoltà innumerabili di un simile lavoro. Montucla era membro dell'Accademia di Berlino e dell'Istituto fino dalla sua creazione. Oltre l'opera di cui abbiamo parlato, si ha di lui: *Histoire des recherches sur la quadrature du cercle*, Parigi, 1754, in-12; ivi, 1830, in-8; *Récréations mathématiques d'Ozanam*, nuova ediz. Parigi, 1778, 4 vol. in-8. Il titolo di quest'opera porta le lettere iniziali C. G. F. che significano *Chanla Geometra Foresiano*, dal nome di una piccola tenuta che la famiglia di Montucla aveva posseduto nel Forez. Su questo dotto si consulti il quarto volume della *Storia delle Matematiche*, che contiene un estratto del suo elogio scritto da Saviniano Leblond.

MOTO. (*Mec.*). Si chiama così, lo stato di un corpo la cui distanza rapporto ad un punto fisso cangia continuamente. (*Vedi* MECCANICA).

La materia inorganica non essendo capace di determinazioni interne, qualunque moto suppone una forza esterna che lo produca; come pure qualunque interruzione di moto suppone una forza contraria che lo distrugga; poichè la materia non può da se stessa cangiare il suo stato. Questa perseveranza dei corpi materiali nel loro stato di riposo o di moto, dipende dalla legge d'inerzia, la quale non solamente resulta dall' *indifferenza* della materia per uno stato qualunque, ma ancora dalle forze primitive che la costituiscono. (*Vedi* NATURA).

Qualunque moto può considerarsi sotto il rapporto della sua *direzione*, cioè; sotto il rapporto dello spazio descritto come tendenza verso uno stesso punto. Se il corpo in moto non obbedisce che ad una sola forza o a più similmente dirette, esso si muove con un *moto semplice*, e la sua direzione è una *linea retta*. Se il moto è prodotto dall' azione simultanea di più forze differentemente dirette, esso diventa composto, e segue una direzione media tra tutte quelle delle forze concorrenti, e questa direzione è ancora una linea retta, quando il rapporto delle forze non cangia in tutto il tempo del moto, ma se questo rapporto varia, la direzione varia ancora; il moto si effettua allora in linea curva, o secondo porzioni di linee rette, che formano insieme angoli più o meno ottusi. Per render ciò più sensibile, consideriamo un punto materiale A (*Tav.* CLXVI, *fig.* 1) sottoposto all'azione di due forze; di cui una tende a fargli prendare la direzione AM, e l'altra la direzione AN. Se rappresentiamo con AC l'intensità della prima forza o lo spazio che essa tende a far percorrare al punto A nell' unità di tempo, con AD, l' intensità della seconda forza, e che si costruisca il paralellogrammo ACBD, la direzione reale del punto A sarà la diagonale AB, la cui grandezza rappresenterà nell'istesso tempo l' intensità della forza unica che possiamo supporre sostituita alle due forze in questione. (*Vedi* FORZA). Ora, se il rapporto delle due forze primitive è invariabile, il punto A continuerà a muoversi nella direzione AP, cioè sempre in linea retta: ma se, al contrario, il rapporto delle forze varia e che al punto B, l' intensità della prima forza essendo sempre BC′ o AC, quella della seconda diventi BD′, dovremo considerare, in questo punto B, il punto materiale come sottoposto all' azione delle due forze BC′ e BD′, ovvero solamente a quella della loro resultante BB′, così la direzione del moto che aveva luogo seguendo la retta AB, si spezzerà in B per diventare BB′ e così in seguito. Diviene dunque evidente che nel caso in cui il rapporto delle due forze cangiasse ad ogni istante, la direzione varierebbe ugualmente ad ogni istante e lo spazio descritto sarebbe una linea curva; ciò che abbiamo detto per due forze si applica con facilità ad un numero qualunque di forze.

Il moto in linea curva non può dunque mai essere l' effetto di una sola forza: non basta anche che vi siano più forze che agiscano nello stesso tempo, bisogna di più che queste forze cangino di rapporto tra loro.

Premesso ciò passiamo a considerare il moto rettilineo, e quindi il curvilineo.

1. *Moto rettilineo.* Quando un mobile, che provvisoriamente considereremo come un punto materiale, si muove nello spazio, esso percorre una linea retta o curva chiamata la sua *trajettoria*. Se la trajettoria è una linea retta, il moto dicesi *rettilineo*; se essa è una linea curva, il moto dicesi *curvilineo*.

Il moto rettilineo è *uniforme* o *variato*, secondo che il mobile percorre o non percorre porzioni uguali della sua trajettoria in intervalli uguali di tempo.

2. Si chiama *velocità*, nel moto uniforme, lo spazio percorso dal mobile in un intervallo di tempo preso per unità.

3. L' unità di tempo è interamente arbitraria; ed è solamente essenziale d'impiegare sempre lo stesso tempo quando vogliamo paragonare i moti di più mo-

bili. Siecome, quasi generalmente è stato adottato il *secondo* sessagesimale per unità, quando parleremo, in quello che segue, della *velocità* di un mobile, intenderemo sempre lo spazio che esso percorre uniformemente in un *secondo di tempo*.

4. Se indichiamo con V la velocità di un mobile, vale a dire lo spazio che esso percorre nell'unità di tempo, lo spazio percorso in due unità sarà 2V; lo spazio percorso in tre unità, 3V, e così di seguito. In generale lo spazio percorso dallo stesso mobile in un tempo T sarà TV, dimodochè indicando con E quest'ultimo spazio, avremo l'equazione

$$E = TV \ldots\ldots (1),$$

la quale racchiude tutta la teoria del moto uniforme.

5. L'equazione (1) dà le due relazioni particolari.

$$V = \frac{E}{T}, \quad T = \frac{E}{V},$$

la prima delle quali significa che *la velocità è eguale allo spazio diviso per il tempo*, e la seconda che *il tempo è uguale allo spazio diviso per la velocità.*

È essenziale osservare che con queste parole *spazio*, *tempo*, *velocità*, bisogna sempre intendere i numeri astratti che indicano il rapporto di ciascuna di queste quantità con l'unità della sua specie. Per esempio, se si domandasse qual'è la velocità di un mobile che percorre uniformemente 120 metri in 30 secondi, si avrebbe

$$V = \frac{120}{30} = 4,$$

e questo resultamento 4, riferito all'*unità* di spazio che in questo caso è il *metro*, farebbe conoscere che la velocità cercata è di 4 metri per *secondo*. Ugualmente, se si trattasse di trovare il *tempo* che bisogna ad un mobile, la cui velocità è di 5 metri per secondo, per percorrere 2000 metri, si avrebbe

$$T = \frac{2000}{5} = 400,$$

e il resultamento 400, riportato all'unità di tempo, farebbe conoscere che il tempo domandato è di 400 secondi, ovvero di 6 minuti e 40 secondi.

6. L'equazione (1) dà il mezzo di risolvere facilmente tutti i problemi relativi al moto rettilineo e uniforme dei corpi. Ci contenteremo di darne un solo esempio.

Conoscendo le velocità di due mobili che partono nel medesimo tempo da due punti differenti della stessa retta che essi percorrono, trovare il tempo del loro incontro.

Siano A e B (*Tav.* CXCIX, *fig.* 7) i punti di partenza, C quello d'incontro, e V e V′ le velocità respettive. Nell'intervallo di tempo cercato T, il primo mobile avendo percorso lo spazio AC, e il secondo lo spazio BC, si ha, in virtù della legge (1),

$$AC = VT, \quad BC = V'T.$$

Esprimiamo con a la distanza AB dei due mobili all'istante donde s'incomincia a contare il tempo T, e facciamo $BC = m$, il che dà $AC = a - m$; e per conseguenza

$$a - m = VT, \quad m = V'T.$$

Si deduce da queste uguaglianze

$$a-V'T=VT;$$

e, da questa si ha

$$T=\frac{a}{V+V'},$$

vale a dire che il tempo cercato è uguale alla distanza iuiziale divisa per la somma della velocità.

Se i due mobili, invece di andare incontro l'uno all'altro, si muovessero nel medesimo senso, si avrebbe, facendo sempre la distanza iniziale $AB=a$ e lo spazio percorso dal secondo mobile $BC=m$,

$$A=a+m.$$

Il valore di T sarebbe

$$T=\frac{a}{V-V'},$$

valore che può essere positivo, infinito o negativo, secondo che $V>V'$, $V=V'$, $V<V'$. Nel primo caso, i mobili s'incontreranno in un dato punto C; nel secondo, essi non hanno potuto e non potranno mai incontrarsi, e nel terzo, il loro incontro avrà dovuto aver luogo avanti l'istante in cui la loro distanza era AB, vale a dire avanti l'istante a partire dal quale si conta il tempo T.

7. Il moto si chiama *variato* quando il mobile, dopo aver percorso un dato spazio in un tempo determinato, percorre inseguito in un intervallo di tempo uguale uno spazio più grande o più piccolo; se lo spazio è più grande, si dice che il moto è *accelerato*; nel caso contrario, si dice che esso è *ritardato*.

Le variazioni di moto possono effettuarsi in due maniere, cioè: in intervalli finiti di tempo ovvero in una maniera discontinua, e in intervalli infinitamente piccoli di tempo ovvero in una maniera continua. Nel primo caso, il moto è una riunione di moti uniformi parziali, dei quali possiamo trovare tutte le circostanze per mezzo della legge (1) del moto uniforme; nel secondo, il moto è sottoposto ad altre leggi. Ed è principalmente al moto le cui variazioni sono continue che si applica l'epiteto di *variato*.

8. Si chiama *velocità* di un moto variato ad un dato istante, la velocità che avrebbe il mobile, se, a partire da questo istante, il suo moto diventasse uniforme.

9. Quando la velocità cresce o diminuisce per gradi uguali, il moto si chiama *uniformemente variato;* esso e *uniformemente accelerato* nel primo caso, e *uniformente ritardato* nel secondo.

Indichiamo con g l'accrescimento costante della velocità che ha luogo nell'unità di tempo; in modo che se, dopo un tempo qualunque t' a partire dall'origine del moto, la velocità del mobile fosse a, essa sarebbe

$a+g$ dopo il tempo $t'+1$,

$a+2g$ . . . . $t'+2$,

$a+3g$ . . . . $t'+3$,

ec., ... ec.,

e, in generale.

$a+tg$ dopo il tempo $t'+t$.

Se con v si esprime questa velocità, avremo l'equazione fondamentale

$$v = a + tg \; \ldots\ldots (2),$$

nella quale basta dare il segno — alla quantità g, per passare da un moto uniformemente accelerato ad un moto uniformemente ritardato.

Per trovare ora la relazione che esiste tra il tempo e lo spazio nel moto uniformemente variato, si chiami e lo spazio percorso dal mobile dal principio del tempo t, fino all'istante in cui esso ha la velocità v, e osserviamo che questo spazio crescerà di una quantità infinitamente piccola de, in una durata di tempo infinitamente piccola dt, nella quale potremo considerare il moto come uniforme, e dovuto alla velocità v: ora, nel moto uniforme, lo spazio è il prodotto della velocità per il tempo; dunque

$$de = vdt.$$

Sostituendo invece di v il suo valore (2), verrà

$$de = adt + gtdt,$$

donde ne ricaveremo, integrando,

$$e = at + \frac{1}{2}gt^2 \; \ldots\ldots (3).$$

Non vi è bisogno di aggiungere costante, poichè e dev'essere nulla quando $t = 0$.

L'equazioni (1) e (2) racchiudono tutta la teoria del moto uniformemente variato; questo moto sarà accelerato o ritardato secondo che la quantità g sarà positiva o negativa; esso diventerebbe uniforme se fosse $g = 0$.

Se la velocità a del mobile, al principio del tempo t, fosse nulla, le due equazioni fondamentali (2) e (3) diventerebbero

$$v = gt, \qquad e = \frac{1}{2}gt^2.$$

In questo caso, il mobile partirebbe dal riposo, e il suo moto non sarebbe dovuto che all'azione della sola forza acceleratrice costante, della quale si rappresenta l'intensità con la velocità che essa produce nell'unità di tempo, vale a dire con g. L'espressione di questa forza acceleratrice è mediante ciò

$$g = \frac{v}{t} \; \ldots\ldots (4).$$

Non entreremo in maggiori particolarità sopra una teoria già sviluppata alle parole ACCELERATO e FORZA.

10. Quando gli accrescimenti di velocità non sono gli stessi in intervalli di tempo uguali, il moto si dice variato in un modo qualunque, e s'intende sempre per la velocità di questo moto, ad un istante determinato, quella che avrebbe luogo se, a partire da quest'istante, il moto diventasse uniforme; dimodochè è facile vedere che si ha sempre la relazione $de = vdt$ tra lo spazio, il tempo e la velocità. Ma, gli accrescimenti di velocità essendo differenti per due intervalli di tempo uguali, per quanto piccoli possano essere quest'intervalli, perciò solamente prendendo un intervallo di tempo infinitamente piccolo possiamo considerare la velocità come crescente per gradi uguali nel tempo della sua durata; così, indicando con φ l'accrescimento costante di velocità che ha luogo a cia-

scuno istante dell'intervallo dt, e che finisce per produrre un accrescimento totale dv nella durata di quest'intervallo, avremo, mediante la legge (4),

$$\varphi=\frac{dv}{dt};$$

e siccome questa velocità φ è l'effetto della forza variata e rappresenta la sua intensità (*Vedi* Forza), potremo dire che la grandezza di una forza variata in in un modo qualunque è uguale alla derivata differenziale della velocità presa rapporto al tempo.

Sostituendo, nel valore di φ, quello di v dedotto dall'equazione $de=vdt$, cioè:

$$v=\frac{de}{dt},$$

osservando che dt è una quantità costante, verrà

$$\varphi=\frac{d^2e}{dt^2} \;\ldots\ldots\; (5).$$

Questa è l'espressione generale, in funzione del tempo e dello spazio, della forza acceleratrice che produce un moto variato in un modo qualunque. Abbiamo già dedotte altre considerazioni, alla parola Accelerato, e in questo punto non le rammentiamo che pel solo motivo che ne faremo uso insegnito.

11. *Moto curvilineo*. Il moto prodotto da una sola forza o da più forze, che agiscono in una stessa direzione, essendo necessariamente rettilineo, qualunque moto che non si effettua in linea retta esige il concorso di più forze che agiscano in direzioni differenti. Esaminiamo le circostanze generali di un tal concorso.

Sia un punto mobile M (*Tav.* CXCIX, *fig.* 8), sollecitato da due forze istantanee P e Q nelle direzioni AP e BQ; prendiamo sopra queste direzioni le parti MA ed MB, tali che la prima rappresenti la velocità uniforme dovuta alla forza P, ovvero lo spazio che essa farebbe percorrere al mobile nell'unità di tempo, se essa agisse sola, e che la seconda rappresenti ugualmente la velocità dovuta alla forza Q quando agisce isolatamente. Costruiamo sopra queste due velocità il parallelogrammo MARB, la sua diagonale MR sarà la direzione della resultante delle forze P e Q, e rappresenterà la velocità con la quale il punto M si muoverà uniformente sopra questa direzione nell'unità di tempo (*Vedi* Resultante). Supponiamo ora che giunto in M′, per l'azione della resultante R delle due forze P e Q, il mobile riceva nella direzione M′S l'impressione di una nuova forza istantanea S, capace di fargli percorrere lo spazio M′B′ nell'unità di tempo; allora, invece di percorrere M′A′=MR, il mobile prenderà la direzione M′R′ della diagonale del parallelogrammo costruito sopra le velocità M′A′ e M′B′, e continuerà a muoversi uniformemente in questa direzione con la velocità M′R′. Se, giunto in M″, ove esso tende a descrivere M″A″=M′R′ nell'unità di tempo, una nuova forza istantanea viene ancora ad agire sopra di esso nella direzione M″T, e tende a fargli descrivere M″T nello stesso tempo, la sua direzione si spezzerà di nuovo, esso descriverà la diagonale M″R″ del parallelogrammo M″A″R″B″, e così di seguito; dimodochè, in virtù delle diverse impulsioni che avrà ricevuto, il mobile avrà descritto i lati MM′, M′M″, M″M‴, ec., di un poligono.

Per passare da questa specie di moto in linea spezzata ad un moto curvilineo, basta supporre che l'impulsioni successive siano date senza interruzione, come quelle che sono prodotte da una forza costante, poichè i lati del poligono diventano allora infinitamente piccoli, ed esso si cangia in linea curva.

12. Qualunque moto curvilineo esige dunque il concorso almeno di una forza acceleratrice. Il caso più semplice di questo moto è quello in cui il mobile non è sollecitato che da due forze, una istantanea e l'altra costante; per esempio, se la forza istantanea P, che tende a dare al punto M una velocità uniforme nella direzione MP, si trova combinata con una forza acceleratrice che agisca nella direzione MQ, le successive impulsioni di quest'ultima succedendosi in intervalli infinitamente piccoli di tempo, i punti M, M', M'', ec., nei quali la direzione del mobile cangia a ciascuna impulsione, si seguono immediatamente, e il mobile descrive una curva i cui lati infinitamente piccoli MM', M'M'', M''M''', ec., ne sono gli elementi.

13. Se la forza acceleratrice cessasse di agire in punto qualunque M'' della curva, è evidente che il mobile continuerebbe a muoversi con la sua ultima velocità nella direzione M''R'', prolungamento dell'ultimo elemento di curva M'M'', vale a dire che esso scapperebbe per la tangente della curva nel punto M''.

Si chiama velocità di un moto curvilineo, ad un istante determinato, la velocità effettiva che avrebbe il mobile, se, in quest'istante, il moto diventasse rettilineo ed uniforme, vale a dire se tutte le cause che fanno variare la velocità e la direzione, del mobile venissero a cessare, e che esso continuasse a muoversi uniformemente sopra la tangente della sua trajettoria, al punto ove esso si trova nell'istante che si considera.

14. Per determinare le diverse circostanze del moto di un punto materiale nello spazio, bisogna riportare la sua trajettoria a tre piani coordinati, il che permette di assegnare a ciascuno istante la posizione delle projezioni del mobile sopra i tre assi fissi. Possiamo allora considerare ciascuna projezione come un punto mobile che segue il punto materiale nel suo moto, e si trova legato con esso; dimodochè tutte le questioni relative al moto curvilineo si riducono alla ricerca delle leggi di tre moti rettilinei. Cerchiamo di rischiarare questa teoria considerando ancora la trajettoria del mobile come una linea spezzata OMM'M'', ec. (*Tav.* CC, *fig.* 1), della quale esso percorre successivamente i lati OM, MM', M'M'', ec., con velocità uniformi, per ciascun lato in particolare, ma che variano a misura che esso passa da un lato sull'altro.

Riportiamo questa linea ai tre assi rettangolari OX, OY, OZ; immaginiamo che l'origine O sia il punto di partenza del mobile, e conduciamo le rette Mm, M'm', M''m'', ec., perpendicolari all'asse OX; i punti m, m', m'', ec., saranno le projezioni dei punti M, M', M'', ec., della trajettoria sopra quest'asse; e le rette Om, mm', m'm'', ec., le projezioni dei lati OM, MM', M'M'', ec.

Premesso ciò, osserviamo che nel tempo che il punto materiale percorre i lati OM, MM', M'M'', la sua projezione percorre Om, mm', m'm'', in modo che essa è in m quando il punto è in M, in m' quando esso è in M', e così di seguito. Ora, in qualunque numero che siano le forze applicate al mobile quando esso è in O, possiamo sempre ridurle a tre dirette seguendo i tre assi OX, OY, OZ, e di cui OM è la resultante; così, rappresentando con Om, On ed Op le velocità delle componenti, OM sarà la diagonale del parallelepipedo costruito sopra queste rette, e possiamo osservare che, se la componente Om agisse sola, il mobile descriverebbe lo spazio Om che percorre la sua projezione quando esso descrive OM in conseguenza dell'azione simultanea delle tre componenti. Ciò che si dice della projezione sopra l'asse OX si applica evidentemente alle projezioni sopra i due altri assi, e possiamo stabilire, generalmente, che nel tragitto del mobile da O in M ciascuna delle sue projezioni si muove uniformemente sopra un asse respettivo, come se essa fosse sollecitata dalla componente diretta seguendo quest'asse.

Giunto al punto M, ove il mobile riceve l'azione delle nuove forze che gli fanno prendere la direzione MM', se nuovamente decomponiamo tutte le forze sollecitanti in tre forze paralelle agli assi, riconosceremo che, nel caso in cui la componente Mq paralella ad OX agisse sola, essa farebbe percorrere al mobile la retta Mq uguale alla retta mm' che percorre la projezione del mobile, quando esso descrive MM' in virtú dell'azione simultanea delle tre componenti Mq, Mr, Ms; possiamo dunque considerare il moto della projezione del mobile da m in m', come se esso fosse dovuto alla componente paralella all'asse OX. Continuando nella stessa maniera, vedremo che il moto della projezione sull'asse delle x non dipende che dalle velocità, che sarebbero prodotte dalla forze paralelle a quest'asse, e segue lo stesso per le due altre projezioni rapporto ai loro assi respettivi.

Questa proprietà avendo luogo qualunque sia la grandezza dei lati OM, MM', M'M'', ec., essa esiste ancora quando i lati sono infinitamente piccoli, ovvero quando il mobile descrive una curva mediante l'azione combinata di più forze istantanee e acceleratrici; dunque;

Se si decompongono in tre forze parolelle ai tre assi fissi le forze qualunque che producono il moto curvilineo di un punto materiale nello spazio, e se si considerano come punti mobili le projezioni del punto materiale sopra questi assi, il moto sopra ciascun asse sarà dovuto alle forze che gli sono parolelle e sarà lo stesso come se le altre forze fossero nulle.

15. Quest' importante proposizione conduce direttamente all'equazioni differenziali del moto curvilineo di un punto materiale, sottoposto all'azione di un numero qualunque di forze acceleratrici e istantanee. Queste ultime possono sempre riportarsi ad una sola forza che avrebbe impresso una velocità finita al mobile nell'origine del suo moto, e la quale, conseguentemente, non esercita alcuna influenza sopra le variazioni di velocità che esso prova nel percorrere la sua trajettoria.

Indichiamo con x, y, z le tre coordinate del mobile dopo un tempo qualunque t, e osserviamo che queste coordinate che saranno funzioni di t, sono ugualmente gli spazj descritti dalle projezioni del mobile, dall'origine, ove supponiamo che il tempo t cominci, fino all'istante in cui esso si trova sul punto della sua trajettoria al quale esse corrispondono. Decomponiamo ciascuna delle forze acceleratrici date in tre altre respettivamente paralelle ai tre assi, e indichiamo con X la somma di tutte le componenti paralelle all'asse delle x, con Y la somma delle componenti paralelle all'asse delle y, e con Z la somma delle componenti paralelle all'asse delle z. Queste tre forze X, Y, Z, delle quali avremo il valore in funzione delle coordinate x, y, z, in ciascun caso particolare, debbono essere prese con i segni + o —, secondo che esse tendono ad aumentare o a diminuire le coordinate.

Siano ora v, v', v'' le velocità respettive della projezioni sopre i tre assi, allo spirare del tempo t, velocità che rimarrebbero uniformi se le forze acceleratrici cessassero di agire a quest'istante, e che hanno per espressione (n.° 10)

$$v=\frac{dx}{dt}, \quad v'=\frac{dy}{dt}, \quad v''=\frac{dz}{dt}.$$

Le variazioni di queste velocità, dovute alle forze X, Y, Z, nell'istante infinitamente piccolo dt che segue il tempo t, saranno

$$dv=\frac{d^2x}{dt}, \quad dv'=\frac{d^2y}{dt}, \quad dv''=\frac{d^2z}{dt};$$

e siccome queste variazioni, divise pel tempo nel quale esse hanno luogo, rappresentano le forze acceleratrici che le producono (n.° 10), avremo, in virtù della teoria del moto variato,

$$X=\frac{d^2x}{dt^2},\quad Y=\frac{d^2y}{dt^2},\quad Z=\frac{d^2z}{dt^2}\ldots\ldots(6).$$

Tali sono l'equazioni generali del moto curvilineo di un punto materiale nello spazio; esse sono indipendenti dalla velocità iniziale del mobile, vale a dire da quella che è dovuta alle forze istantanee. Quest' ultima serve a determinare le costanti arbitrarie con le quali si completano gl' integrali. Quando le funzioni X, Y, Z sono date dalla natura di un problema, si hanno tre equazioni differenziali da integrare, e dopo avere ottenuto gl' integrali completi, l' eliminazione di t conduce a due equazioni le quali non contengono più altre variabili che x, y, z, e sono l' equazioni della trajettoria.

16. Le funzioni X, Y, Z, rappresentando unicamente la somma delle forze acceleratrici paralelle a ciascun asse, quando il moto della projezione sopra uno di questi assi è uniforme, la variazione della velocità è nulla per quest'asse, e bisogna uguagliare a zero l' espressione della forza acceleratrice che gli corrisponde. Inseguito ne daremo un esempio.

17. Per determinare la velocità del mobile ad un istante qualunque del suo moto, bisogna osservare che quella che ha luogo sull' elemento OM è, indicando quest'elemento per la differenziale ds della curva,

$$v=\frac{ds}{dt}.$$

Ora, moltiplicando la prima dell' equazioni (6) per $2dx$, la seconda per $2dy$, la terza per $2dz$, si ha, aggiungendo i resultamenti,

$$\frac{2dxd^2x+2dyd^2y+2dzd^2z}{dt^2}=2\Big[Xdx+Ydx+Zdz\Big].$$

Ma il primo membro di quest' uguaglianza non è che la differenziale di $dx^2+dy^2+dz^2$ divisa per dt^2; così essa equivale a

$$\frac{d[dx^2+dy^2+dz^2]}{dt^2}=2\Big[Xdx+Ydy+Zdz\Big],$$

ovvero semplicemente a

$$\frac{d(ds^2)}{dt^2}=2\Big[Xdx+Ydy+Zdz\Big],$$

a motivo di $ds^2=dx^2+dy^2+dz^2$. Integrando, considerando dt^2 come costante, viene

$$\frac{ds^2}{dt^2}=2\int\Big[Xdx+Ydy+Zdz\Big]+C,$$

ovvero, sostituendo v invece di $\frac{ds}{dt}$

$$v^2=2\int\Big[Xdx+Ydy+Zdz\Big]+C\ldots\ldots(7).$$

Quest' espressione è la legge fondamentale del moto curvilineo.

18. Si ottiene un' altra espressione della velocità sostituendo semplicemente, nell' equazione

$$v=\frac{ds}{dt},$$

l' elemento ds della curva col suo valore $\sqrt{\left[dx^2+dy^2+dz^2\right]}$; viene

$$v=\frac{1}{dt}\sqrt{\left[dx^2+dy^2+dz^2\right]},$$

o piuttosto, osservando che tutte le differenziali sono prese rapporto al tempo,

$$v=\sqrt{\left[\frac{dx^2}{dt^2}+\frac{dy^2}{dt^2}+\frac{dz^2}{dt^2}\right]} \;\ldots\ldots\; (8).$$

19. Quando tutte le forze agiscono nello stesso piano, bisogna prendere questo piano per quello delle x, y, allora la variabile z non esiste, e basta impiegare le due equazioni

$$X=\frac{d^2x}{dt^2},\quad Y=\frac{d^2y}{dt^2}.$$

In questo caso la trajettoria è una curva piana, in tutti gli altri casi, essa è una curva a doppia curvatura.

20. Per prima applicazione delle leggi precedenti, cerchiamo l'equazione della trajettoria di un punto materiale, il quale si muove nello spazio in virtù dell' unica impulsione di una forza istantanea. In questo caso, tutte le forze acceleratrici sono nulle, e si ha

$$X=0,\quad Y=0,\quad Z=0.$$

Le equazioni (6) si riducono perciò a

$$\frac{d^2x}{dt^2}=0,\quad \frac{d^2y}{dt^2}=0,\quad \frac{d^2z}{dt^2}=0.$$

Moltiplicando i due termini di ciascuna per dt, esse diventano

$$\frac{d^2x}{dt}=0,\quad \frac{d^2y}{dt}=0,\quad \frac{d^2z}{dt}=0;$$

il che dà, considerando dt come costante, e integrando

$$\frac{dx}{dt}=a,\quad \frac{dy}{dt}=b,\quad \frac{dz}{dt}=c \;\ldots\ldots\; (m);$$

a, b, c rappresentando delle costanti arbitrarie. Mettendo quest' ultime equazioni sotto la forma

$$dx=adt,\quad dy=bdt,\quad dz=cdt;$$

e integrando di nuovo, viene

$$x=at+a',\quad y=bt+b',\quad z=ct+c';$$

a', b', c', essendo delle nuove costanti arbitrarie. Eliminando t, si ottiene

$$x=\frac{a'c-ac'}{c}+\frac{a}{c}z,$$

$$y=\frac{b'c-bc'}{c}+\frac{b}{c}z,$$

equazioni che facilmente si riconosce essere quelle di una linea retta nello spazio. Tale è infatti il resultamento che si deve ottenere dalle condizioni del problema.

Se si pone l'origine delle coordinate al punto di partenza del mobile, e che il tempo t sia contato a partire da questa partenza, avremo $x=o$, $y=o$, $z=o$ quando $t=o$, e, conseguentemente, $a'=o$, $b'=o$, $c'=o$. Le equazioni precedenti si riducono allora a

$$x=\frac{a}{c}z, \quad y=\frac{b}{c}z,$$

ed è facile riconoscere che le costanti a, b, c, sono le componenti della velocità seguendo i tre assi.

Sostituiamo i valori (m) nella legge (8), otterremo

$$v=\sqrt{\left[a^2+b^2+c^2\right]}=\text{costante},$$

donde segue che il moto è uniforme. E questo è ciò che ancora dobbiamo necessariamente trovare.

21. Proponiamoci per secondo esempio di determinare la trajettoria di un punto materiale pesante, lanciato nello spazio per l'impulsione di una forza istantanea. Abbiamo in questo caso due forze da considerare, la forza impulsiva e quella della gravità.

Sia A (*Tav.* CC, *fig* 2) l'origine pel moto, AB la direzione della forza impulsiva che seguirebbe il mobile, se questa forza agisse sola sopra di esso, e AY' la verticale lungo la quale esso caderebbe in virtù della sua gravità, se la forza impulsiva non esistesse.

Siccome possiamo sempre far passare un piano per due rette che si tagliano, le due forze che consideriamo agiscono in un medesimo piano, e per conseguenza la trajettoria è una curva piana. Prendiamo dunque la verticale per asse delle y, e conduciamo per l'origine A del moto una retta orizzontale AX che sarà l'asse delle x, mediante ciò la forza acceleratrice non avrà componente paralella all'asse delle x, il che comincerà dal dare

$$X=o, \quad \text{donde} \quad \frac{d^2x}{dt^2}=o.$$

Osservando inseguito che la forza di gravità, generalmente rappresentata con g, è la sola forza acceleratrice che agisce nel senso dell'asse AY, ma che essa tende a diminuire le coordinate y della trajettoria, e che allora bisogna dare il segno — ad Y, avremo

$$\frac{d^2y}{dt^2}=-g.$$

Le due equazioni del moto sono mediante ciò:

$$\frac{d^2x}{dt^2}=o,\quad \frac{d^2y}{dt^2}=-g;$$

moltiplicandole l'una e l'altra per dt e integrando, otterremo

$$\frac{dx}{dt}=a,\quad \frac{dy}{dt}=-gt+b,$$

a e b sono costanti arbitrarie che possiamo determinare immediatamente, osservando che $\frac{dx}{dt}$ e $\frac{dy}{dt}$ esprimono le velocità orizzontale e verticale del mobile all'origine del moto, o quando $t=o$, velocità che sono le componenti della velocità iniziale dovuta alla forza impulsiva.

Moltiplicando le ultime equazioni per dt e integrando di nuovo, viene

$$x=at,\quad y=-gt^2+bt.$$

Non aggiungeremo costanti, perchè contando il tempo a partire dall'origine del moto; si deve avere $x=o$ e $y=o$ quando $t=o$.

Eliminando t, avremo definitivamente

$$y=\frac{b}{a}x-\frac{g}{a^2}x^2.$$

Questa è l'equazione della trajettoria; non è più necessario che di sostituire a e b con i loro valori perchè tutto ci sia determinato. Ora, abbiamo riconosciuto che queste quantità non sono che le componenti della velocità iniziale; così, indicando con v questa velocità, e con α l'angolo BAX che fa la sua direzione AB con l'asse delle x, abbiamo

$$a=v\cos\alpha,\quad b=v\operatorname{sen}\alpha;$$

sostituendo nell'equazione precedente, avremo

$$y=x\operatorname{tang}\alpha-g\frac{x^2}{v^2\cos^2\alpha};$$

che è l'equazione di una parabola.

Se vogliamo conoscere la velocità V in un punto qualunque della trajettoria, bisogna fare nell'espressione generale (7) $Z=o$ e $X=o$, $Y=-g$, si ha

$$V^2=\int\left[-gdy\right]=-2gy+C;$$

e siccome quest'integrale deve dare la velocità iniziale del moto in cui $y=o$, la costante C è uguale a v^2, donde

$$V=\sqrt{\left[v^2-2gy\right]}$$

La velocità del mobile diminuisce dunque a misura che l'ordinata y aumenta, essa è la più piccola quando y è l'ordinata del vertice della parabola, poi essa aumenta successivamente per ritornare uguale alla velocità iniziale v, al momento in cui il mobile incontra la linea orizzontale AX; al di sotto di questa linea, l'ordinata diventando negativa, la velocità si accresce continuamente.

Il problema che abbiamo risoluto è quello del *moto dei projettili nel vuoto*; rimandiamo, pel caso di un mezzo resistente, alla parola Balistica. La questione vi è trattata con le più grandi particolarità. *Vedi*, per le trajettorie dei corpi celesti, la parola Trajettoria.

22. *Moto di un punto materiale sopra una curva.* Il moto dei mobili soggetti a strisciare lungo una curva presenta alcune particolarità degne di osservazione che siamo in dovere d'indicare.

Consideriamo la curva come una porzione di poligono $Amm'm''$ (*Tav.* CC, *fig.* 3), e immaginiamo che il punto m, che è obbligato a percorrerla in virtù di una forza d'impulsione, sia senza gravità. Si chiami v la velocità del mobile, quando è giunto al punto m nel quale esso è forzato ad abbandonare la sua direzione Am per prendere quella del lato mm'. Rappresentiamo la velocità v con la parte mv della sua direzione, e si termini il rettangolo $mpvr$; mp ed mr saranno le componenti di v. Ora, la componente mp essendo normale al lato mm', si trova distrutta dalla resistenza di questo lato, e la componente mr ha sola il suo effetto; dunque il mobile percorrerà unicamente con questa velocità il lato mm' del poligono.

Possiamo dunque concepire la resistenza esercitata dalla curva al punto m, come una forza mp' uguale e opposta alla componente mp; poichè, astrazione fatta dalla curva, se il mobile fosse sollecitato dalle due forze mp' ed mv, esso prenderebbe la direzione mm'' con la velocità mr, il tutto come esso fa in conseguenza del concorso della resistenza della curva con la forza mv.

Si chiami ω l'angolo della velocità mv con la componente mr, avremo

$$mr = v\cos\omega, \quad mp = v\,\mathrm{sen}\,\omega.$$

$v\,\mathrm{sen}\,\omega$ rappresenta dunque l'intensità della forza che bisognerebbe applicare, in m al punto mobile, in una direzione opposta a mp, per stare invece della resistenza della curva.

Quando il mobile è giunto al punto m'', possiamo nuovamente fare astrazione dalla resistenza del lato $m'm''$, che cangia la sua direzione mm', sostituendoli una forza uguale ed opposta alla componente mp' della velocità perpendicolare ad $m'm''$, e così ugualmente per ciascun cambiamento di lato.

23. Nel caso di una curva continua, i lati Am, mm', $m'm''$ ec., sono infinitamente piccoli; e per sostituire alla resistenza della curva, la quale cambia a ciascun punto la direzione del mobile, bisogna immaginare una forza che agisca continuamente sul mobile, in una direzione normale alla sua trajettoria, donde si vede che la resistenza della curva può essere assomigliata ad una forza acceleratrice.

24. Prima di andare avanti facciamo osservare, che la velocità d'impulsione v, rimane la medesima sopra tutte le parti della curva. Infatti, v essendo la velocità sopra l'elemento Am, la velocità sull'elemento mm'' è uguale ad mr, ovvero a $v\cos\omega$, e per conseguenza

$$v - v\cos\omega = (1 - \cos\omega)v$$

rappresenta la perdita di velocità effettuata dal passaggio di un elemento sopra quello che lo segue. Ma l'angolo ω è l'angolo della curva con la sua tangente, e si sa che quest'angolo, chiamato *angolo di contingenza*, è infinitamente piccolo; così $\cos\omega = 1$, e $v - v\cos\omega = 0$. Resulta da queste considerazioni che il mobile sottoposto a percorrere una curva conserva sempre tutta la velocità che gli è stata impressa all'origine del moto; se questa velocità varia per l'effetto delle forze acceleratrici, che possono agire sul mobile, la resistenza della curva non entra per niente in quest'effetto.

25. Immaginismo ora che, oltre la forza d' impulsione, alla quale è dovuta la velocità v, il mobile sia sottoposto a più forze acceleratrici; ciascuna di queste forze potendo decomporsi in due altre, di cui l' una sia normale e l' altra tangente alla curva, è evidente che la somma di tutte le componenti normali è distrutta dalla resistenza della curva; dimodochè rappresentando con N una forza uguale ed opposta alla somma di tutte le forze distrotte da questa resistenza, possiamo, introducendo questa nuova forza nel sistema, fare astrazione dalla curva e considerare il moto del mobile come quello di un punto materiale libero.

Indichiamo dunque, come sopra, con X, Y, Z le componenti paralelle a tre assi rettangolari fissi, delle forze acceleratrici applicate al mobile e per fare entrare nel sistema la forza N uguale ed opposta alla resistenza della curva, osserviamo che chiamando α, β, γ gli angoli che questa forza acceleratrice, normale alla trajettoria, fa con i tre assi, le componenti di N, seguendo questi assi, saranno respettivamente

$$N\cos\alpha,\quad N\cos\beta,\quad N\cos\gamma.$$

In questo modo, le somme delle componenti paralelle agli assi, di tutte le forze acceleratrici del sistema, sono

$$X+N\cos\alpha,\quad Y+N\cos\beta,\quad Z+N\cos\gamma;$$

ed abbiamo, dal n.° 10, per le equazioni generali del moto

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2}&=X+N\cos\alpha\\ \frac{d^2y}{dt^2}&=Y+N\cos\beta\\ \frac{d^2z}{dt^2}&=Z+N\cos\gamma\end{aligned}\right\}\ \ldots\ldots\ldots\ (c),$$

alle quali si deve aggiungere queste due altre

$$\left.\begin{aligned}&\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1\\ &\frac{dx}{ds}\cos\alpha+\frac{dy}{ds}\cos\beta+\frac{dz}{ds}\cos\gamma=0\end{aligned}\right\}\ \ldots\ldots\ (d),$$

le quali resultano dalle relazioni necessarie che hanno tra loro gli angoli α, β, γ. Infatti, la prima è la relazione conosciuta dei tre angoli di una retta con gli assi coordinati (*Vedi* Applicazione dell' Algebra alla Geometria, n.° 121). Quanto alla seconda, eccone una deduzione semplicissima:

La direzione della forza N essendo, in ciascun punto della curva, perpendicolare alla tangente di questo punto, se indichiamo con α', β', γ' gli angoli della tangente con i tre assi, avremo (*Vedi* Applicazione dell' Algebra alla Geometria, n.° 125)

$$\cos\alpha\,.\,\cos\alpha'+\cos\beta\,.\,\cos\beta'+\cos\gamma\,.\,\cos\gamma'=0.$$

Ma gli angoli α', β', γ' sono ugualmente quelli dell'elemento ds della curva con i tre assi, poichè la tangente non è che il prolungamento dell' elemento; così

$$\cos\alpha'=\frac{dx}{ds},\quad \cos\beta'=\frac{dy}{ds},\quad \cos\gamma'=\frac{dz}{ds},$$

sostituendo questi valori nella precedente equazione, si avrà la seconda dall'equazioni (*d*).

26. Per ottenere l'espressione della velocità in un punto qualunque della curva, rammentiamoci che indicando questa velocità con v, avremo ancora in questo punto,

$$v=\frac{ds}{dt};$$

poichè, la curva non è più che una semplice trajettoria. Ora, moltiplicando la prima dell'equazioni (*c*) per $2dx$, la seconda per $2dy$, la terza per $2dz$, verrà, aggiungendole inseguito,

$$\frac{2dxd^2x+2dyd^2y+2dzd^2z}{dt^2}=2\Big[Xdx+Ydy+Zdz\Big]+$$

$$+2N\Big[dx\cos\alpha+dy\cos\beta+dz\cos\gamma\Big].$$

Il secondo termine del secondo membro essendo nullo in virtù della seconda dell'equazioni (*d*) e il primo membro riducendosi a $\frac{d(ds^2)}{dt^2}$, viene integrando,

$$\frac{ds^2}{dt^2}=2\int\Big[Xdx+Ydy+Zdz\Big]+C,$$

e, conseguentemente,

$$v^2=2\int\Big[Xdx+Ydy+Zdz\Big]+C\ \ldots\ldots\ (e).$$

27. La prima conseguenza che si deve dedurre dall'espressione (e), è, che la velocità del mobile è indipendente dalla resistenza della curva. Nel caso in cui le forze acceleratrici X, Y, Z sono nulle, si ha semplicemente

$$v^2=C,$$

vale a dire che la velocità è costante, come se il punto materiale fosse libero (n.° 20).

28. Quando la sola forza acceleratrice che agisce sul mobile è la gravità, e che si prende l'asse delle z verticale nella direzione di questa forza, si ha

$$X=0,\quad Y=0,\quad Z=g.$$

Questi valori, messi nell'equazione (e), danno

$$v^2=2\int gdz+C=2gz+C.$$

Per determinare la costante C, supponiamo che la velocità sia v' quando $z=0$, avremo

$$v'^2=C,$$

e, per conseguenza,

$$v=\sqrt{2gz+v'^2}\ \ldots\ldots\ (f),$$

quest' espressione della velocità essendo indipendente dalle differenti relazioni che esistono tra le coordinate x, y, z per ciascuna curva particolare, si vede che la forma della curva non esercita alcuna influenza sopra la velocità del mobile. Ne resulta che se più corpi pesanti partono da uno stesso punto A, in cui $z=0$ (*Tav.* CC, *fig.* 4) con una medesima velocità iniziale v', per muoversi in curve differenti AB, AB', AB'', ec., essi avranno tutti la medesima velocità quando essi raggiungeranno il piano orizzontale MN. Se la velocità iniziale v' è nulla, la velocità comune ai punti B, B', B'', ec., sarà $v=\sqrt{2gz}$, vale a dire la medesima che se tutti i mobili fossero caduti liberamente dall' altezza $z=Az$.

29. Quanto alla durata del moto; essa è legata alla natura della curva, e benchè tutti i mobili raggiungano il piano orizzontale MN con la medesima velocità, essi non lo raggiungono tutti nel medesimo istante. Per ottenere le relazioni che esistono tra il tempo e lo spazio percorso, si chiami s l' arco OA (*Tav.* CC, *fig.* 5) compreso tra il punto di partenza O del mobile e un punto qualunque A della curva, t il tempo impiegato a descrivere quest' arco, e poniamo l' origine delle coordinate al punto O contando le coordinate verticali z nel senso dell' azione della gravità. Sappiamo che $v=\frac{ds}{dt}$; così, l' equazione (f) ci dà

$$\frac{ds}{dt}=\sqrt{2gz+v'^2},$$

donde dedurremo

$$dt=\frac{ds}{\sqrt{2gz+v'^2}} \;\ldots\ldots\; (g).$$

Bisognerà, in ciascun caso particolare, ricavare dall' equazione della curva il valore di z in funzione di s, o *viceversa*, e sostituirlo in (g), quindi, integrando quest'equazione, si avrà il valore di t corrispondente ad un valore qualunque di s o di z.

30. Prendiamo per esempio d' applicazione il moto di un punto materiale pesante sopra una cicloide: Sia ADB (*Tav.* CC, *fig.* 6) una cicloide situata in un piano verticale e di cui il grand' asse AB è orizzontale; CD essendo il diametro del circolo generatore, D è il punto più basso della curva, e questo punto è il solo ove un mobile pesante potrebbe restare in equilibrio; poichè ponendolo, senza impulsione iniziale, in qualunque altro punto M, la gravità lo farebbe strisciare lungo l' arco MD, ed esso giungerebbe in D con una velocità dovuta all'altezza verticale pD della caduta, velocità in virtù della quale esso risalirebbe sull' altro ramo DB fino ad un punto M' situato alla medesima altezza verticale del punto M. Si sa che la lunghezza della cicloide intera ADB è uguale a quattro volte quella del diametro CD del circolo generatore, e che un arco qualunque MD è uguale al doppio della radice quadrata del prodotto del diametro CD per l' ascissa corrispondente pD. Così, indicando MD con s, CD con a e pD con u, abbiamo

$$s=2\sqrt{au}, \quad \text{ovvero} \quad s^2=4au.$$

Se il punto O è il punto di partenza del mobile, la variabile z dell'equazio-

ne (g) sarà contata a partire da questo punto, vale a dire che in M, per esempio, la coordinata z del mobile avrà per valore,

$$Mz = PD - pD,$$

dimodochè indicando con h la distanza verticale dall' origine O al punto D, avremo generalmente

$$z = h - u.$$

Premesso ciò e facendo nulla, per maggior semplicità, la velocità iniziale v' del mobile al punto O, osserviamo che l' arco s contato dal punto D diminuisce quando t aumenta, donde resulta che bisogna dare all' equazione (g) la forma

$$dt = -\frac{ds}{\sqrt{2gz}}.$$

Sostituendo in quest' ultima il valore di z e quello di ds ricavato dall' equazione $s^2 = 4au$, cioè:

$$ds = \frac{2adu}{s} = \frac{2adu}{2\sqrt{au}} = \frac{\sqrt{a}\,.\,du}{\sqrt{u}},$$

verrà

$$dt = -\sqrt{\frac{a}{2g}}\,.\,\frac{du}{\sqrt{hu - u^2}}.$$

Si ottiene, integrando,

$$t = \sqrt{\frac{a}{2g}}\,.\,\mathrm{arc}\left(\cos = \frac{2u - h}{h}\right),$$

espressione alla quale non vi è bisogno di aggiungere costante, perchè il tempo t essendo contato a cominciare dal punto di partenza O, si deve avere nel medesimo tempo $u = h$, $t = 0$.

Se si fa $u = 0$, avremo il tempo impiegato dal mobile per giungere al punto D; questo tempo è dunque

$$t = \sqrt{\frac{a}{2g}}\,.\,\mathrm{arc}\left(\cos = -1\right);$$

ma l' arco di cui il coseno $= -1$ è uguale alla metà della circonferenza (*Vedi* Seno). Così, indicando con π la semicirconferenza, abbiamo

$$t = \pi\sqrt{\frac{a}{2g}};$$

donde si vede che il tempo del moto è indipendente dall' altezza verticale h del punto di partenza, e conseguentemente, che il mobile impiegherà sempre il medesimo tempo per giungere al punto il più basso D della cicloide, qualunque sia questo punto di partenza. Questa proprietà ha fatto dare alla cicloide il nome di *curva tautocrona*. (*Vedi* Tautocrona.)

31. Ci rimane da indicare i mezzi di ottenere l' espressione della forza normale N, che entra nell' equazioni (c) e che è equivalente alla resistenza della curva, o più esattamente alla pressione che esercita il punto materiale sopra

ciascun punto della curva in conseguenza dell' azione delle forze sollecitanti. Mediante ciò che abbiamo veduto precedentemente (ni. 24 e 25), la pressione totale in un punto qualunque comprende non solamente la somma di tutte le componenti normali a questo punto delle forze acceleratrici, ma ancora la componente normale della velocità; se il mobile fosse in riposo, questa seconda parte della pressione non esisterebbe, poichè è unicamente lo stato del moto che sviluppa questa forza, dovuta alla tendenza continua che ha il mobile a scappare seguendo la tangente della sua trajettoria in virtù della sua inerzia. Nella ricerca della pressione totale esercitata contro una curva da un corpo in moto, è dunque necessario di valutare separatamente la pressione dovuta alla velocità, e che si chiama la *forza centrifuga* del mobile, e la pressione dovuta alle forze acceleratrici alle quali il corpo è sottoposto. Per cominciare da valutare la forza centrifuga, siano mm' e $m'm''$ (*Tav.* CC, *fig.* 7) due rette infinitamente piccole che facciano tra loro un angolo infinitamente piccolo $nm'm''=\omega$, queste rette saranno due elementi successivi di una curva qualunque, ed avremo per l' espressione della componente normale all' elemento $m'm''$ della velocità v che ha luogo sul primo elemento mm',

$$v \operatorname{sen} \omega,$$

questo è quello che abbiamo trovato sopra nº 22. Per i mezzi a e b delle rette mm', $m'm''$, conduciamo le perpendicolari aO e bO, e per il punto di concorso O di queste perpendicolari conduciamo Om', gli angoli in a e in b del quadrilatero $aObm'$ essendo retti, abbiamo

$$\text{angolo } aOb + \text{angolo } am'b = 2 \text{ retti};$$

donde si ricava

$$\text{angolo } aOb = \text{angolo } nm'm'' = \omega.$$

Ma possiamo considerare gli elementi mm', $m'm''$ come uguali; così $aO=bO$, e l' angolo aOm' è la metà dell' angolo ω. Ora, il triangolo aOm' dà

$$\operatorname{sen} \frac{1}{2}\omega = \frac{am'}{Om'},$$

ovvero semplicemente

$$\frac{1}{2}\omega = \frac{am'}{Om'},$$

poichè l' angolo $\frac{1}{2}\omega$ si confonde col suo seno; così, indicando con ds l' elemento $mm'=2am'$ e osservando che Om' è il raggio di curvatura della trajettoria al punto m', avremo, indicando con γ questo raggio di curvatura,

$$\omega = \frac{ds}{\gamma}.$$

Si chiami φ la forza acceleratrice che deriva dalla componente normale della velocità, e rammentiamoci che qualunque forza acceleratrice è rappresentata dall' elemento della velocità divisa per l' elemento del tempo. In questo caso, l'elemento della velocità essendo $v \operatorname{sen} \omega$, avremo

$$\varphi = \frac{v \operatorname{sen} \omega}{dt} = \frac{v\omega}{dt};$$

sostituendo invece di ω il suo valore, verrà

$$\varphi = \frac{v\,ds}{\gamma\,dt},$$

ovvero

$$\varphi = \frac{v^2}{\gamma}.$$

L'intensità della pressione dovuta alla velocità è dunque in ragione diretta del quadrato della velocità, e in ragione inversa del raggio di curvatura della trajettoria.

Quanto alla parte della pressione totale che resulta dalle forze acceleratrici applicate al mobile, si determinerà riducendo tutte queste forze in una sola, che si decomporrà quindi in due altre; una diretta seguendo la tangente, l'altra perpendicolare a questa linea; quest' ultima componente sarà la pressione dovuta alla forze acceleratrici. Non rimarrà che da cercare la resultante delle due parti della pressione, e si otterrà la pressione totale, la quale è uguale e contraria alla forza N. Possiamo ancora dedurre direttamente l'espressione della forza N dall'equazioni fondamentali (d), ma non possiamo arrestarci a queste particolarità.

32. Se la trajettoria è una curva piana e che tutte le forze applicate al mobile agiscano nel suo piano, le due parti della pressione saranno dirette seguendo una stessa retta, dimodochè la pressione totale sarà uguale alla loro somma o alla loro differenza. Sia R la resultante delle forze acceleratrici, θ l'angolo che fa la sua direzione con la normale; $R\cos\theta$ sarà la componente normale, e si avrà per la pressione totale

$$\frac{v^2}{\gamma} \pm R\cos\theta,$$

secondo che le due parti della pressione agiscono nel medesimo senso o in un senso opposto.

33. *Moto di un punto materiale sopra una superficie.* Possiamo ancora, in specie di moto, considerare il mobile come libero e fare astrazione dalla superficie, sopra la quale esso è soggetto a muoversi, sostituendo alla resistenza di questa superficie una forza uguale e opposta alla pressione che esercita il mobile, in virtù della sua velocità e delle forze acceleratrici che gli sono applicate. Indichiamo con N la forza uguale e contraria alla pressione che la superficie prova, con α, β, γ gli angoli che fa con gli assi coordinati la direzione di questa forza, avremo per le componenti di N paralelle agli assi $N\cos\alpha$, $N\cos\beta$, $N\cos\gamma$; e indicando sempre con X, Y, Z le componenti, rapporto agli assi, di tutte le forze acceleratrici, l'equazioni del moto saranno

$$\frac{d^2x}{dt^2} = X + N\cos\alpha,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = Y + N\cos\beta,$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = Z + N\cos\gamma.$$

Gli angoli α, β, γ saranno conosciuti quando l'equazione della superficie sarà data. Infatti, sia $L=0$ quest' equazione, si avrà (*Vedi* Piano Tangente)

$$\cos\alpha = V\frac{dL}{dx},$$

$$\cos\beta = V\frac{dL}{dy},$$

$$\cos\gamma = V\frac{dL}{dz},$$

ponendo, per abbreviare

$$V=\frac{1}{\sqrt{\left[\left(\frac{dL}{dx}\right)^2+\left(\frac{dL}{dy}\right)^2+\left(\frac{dL}{dz}\right)^2\right]}}.$$

Il radicale volendo il doppio segno $\pm$, V è positivo o negativo, secondo che gli angoli α, β, γ si riferiscono alla parte della normale che cade nella concavità della superficie, ovvero nel suo prolungamento.

Sostituendo questi valori dei coseni nell' equazioni precedenti, esse diventano

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= X + NV\frac{dL}{dx} \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= Y + NV\frac{dL}{dy} \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= Z + NV\frac{dL}{dz} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (h).$$

L'eliminazione di N tra queste equazioni farà sparire V nello stesso tempo, e si otterranno due equazioni differenziali le quali, unite a quelle della superficie $L=0$, serviranno in ciascun caso particolare per determinare le coordinate del mobile in funzione del tempo. Renderemo più chiara questa teoria mediante un esempio.

34. Consideriamo un punto materiale pesante soggetto a muoversi sopra una sfera, non sottoposto ad altra forza acceleratrice che la gravità. Questo caso è quello del pendolo semplice, quando l' impulsione iniziale non è diretta secondo il piano verticale che passa pel centro di sospensione. Situiamo l' origine delle coordinate al centro della sfera e prendiamo l' asse delle z verticale e diretto nel senso della gravità; cominceremo da avere

$$X=0,\ Y=0,\ Z=g.$$

Premesso ciò, a indicando il raggio della sfera, l' equazione delle sua superficie è

$$x^2+y^2+z^2-a^2=0,$$

(*Vedi* Applicazione dell' Algebra alla Geometria) e abbiamo, ponendo

$$L=x^2+y^2+z^2-a^2$$

per le tre derivate differenziali di L,

$$\frac{dL}{dx}=x,\quad \frac{dL}{dy}=y,\quad \frac{dL}{dz}=z;$$

di più

$$V=\pm\frac{1}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}}=\pm\frac{1}{a}.$$

Questi valori riducono l'equazioni generali (h) a

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2}&=\pm N\frac{x}{a}\\ \frac{d^2y}{dt^2}&=\pm N\frac{y}{a}\\ \frac{d^2z}{dt^2}&=g\pm N\frac{z}{a}\end{aligned}\right\}\ldots\ldots (i).$$

Per eliminare $\pm N$ tra queste equazioni, moltiplichiamo ciascuna di esse per la differenziale della variabile che essa contiene e prendiamo la loro somma, verrà

$$\frac{dxd^2x+dyd^2y+dzd^2z}{dt^2}=gdz\pm\frac{N}{a}\Big(xdx+ydy+zdz\Big)\ldots\ldots (k),$$

osservando che l'equazione differenziata della sfera dà

$$xdx+ydy+zdz=0\ldots\ldots (l),$$

vedremo che l'equazione (k) è la stessa cosa che

$$\frac{d(dx^2+dy^2+dz^2)}{dt^2}=2gdz,$$

donde si deduce, integrando i due membri,

$$\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dt^2}=2gz+c'\ldots\ldots (m),$$

c' essendo una costante arbitraria.

Otterremo una seconda equazione liberata da $\pm N$, eliminando questa quantità tra le due prime dell'equazioni (i). Per eseguir ciò, basta moltiplicare la prima per y, la seconda per x, e di prendere la loro differenza, che si trova essere

$$\frac{yd^2x}{dt^2}-\frac{xd^2y}{dt^2}=0,$$

ovvero, sopprimendo uno dei fattori di dt^2, e osservando che

$$yd^2x-xd^2y=d(ydx-xdy),$$

$$\frac{d(ydx-xdy)}{dt}=0;$$

integrando e indicando con c una costante arbitraria, la seconda equazione cercata sarà

$$ydx-xdy=cdt\ldots\ldots (n).$$

Le tre equazioni (l), (m), (n) contengono la determinazione del moto di un punto materiale pesante sopra la superficie di una sfera. Eliminando tra queste equazioni due delle variabili x, y, z, si otterrà la terza in funzione del tempo t, il che farà conoscere tutte le circostanze del moto indipendentemente dalla forza normale N, la quale è scomparsa da quest'equazioni. Per giungere a un'equazione finale in z, mettiamo l'equazione (l) sotto la forma

$$xdx+ydy=-zdz;$$

elaviamo al quadrato questa e l'equazione (n), il che ci darà

$$x^2dx^2+2xydxdy+y^2dy^2=z^2dz^2,$$
$$y^2dx^2-2xydxdy+x^2dy^2=c^2dt^2;$$

aggiungendo queste due ultime, verrà

$$\left(x^2+y^2\right)dx^2+\left(x^2+y^2\right)dy^2=c^2dt^2+z^2dz^2;$$

sostituendo in questa il valore di x^2+y^2 dedotto dall'equazione della sfera, cioè:

$$x^2+y^2=a^2-z^2;$$

e il valore di dx^2+dy^2 ricavato dall'equazione (m), cioè:

$$dx^2+dy^2=2gzdt^2+c'dt^2-dz^2,$$

avremo definitivamente

$$dt=\frac{adz}{\sqrt{[(a^2-z^2)(2gz+c')-c^2]}},$$

l'integrale di quest'espressione, che non possiamo ottenere sotto una forma finita, ma dalla quale si ottengono i valori approssimati mediante lo sviluppo in serie, farà conoscere z in funzione di t o reciprocamente.

Bisogna osservare che l'ordinata z fa solamente conoscere il piano orizzontale nel quale si trova a ciascun istante il mobile, il che non basta per determinare completamente la sua situazione; ma, siccome cercando le espressioni delle due altre coordinate x ed y, si cade sopra equazioni nelle quali queste variabili non sono separate dal tempo t, è più semplice di fissare la posizione del mobile facendo concorrere il suo raggio vettore con la sua coordinata z; ora la posizione del raggio vettore è conosciuta, quando si conosce l'angolo che fa la sua projezione orizzontale con l'asse delle x o quello delle y: così si tratta di ottenere l'espressione generale di quest'angolo, che indicheremo con θ.

Osserviamo che la projezione orizzontale del raggio vettore è il lato di un triangolo rettangolo, che ha questo raggio esso stesso per ipotenusa e l'ordinata z per terzo lato: il suo valore è perciò

$$\sqrt{a^2-z^2},$$

e si ha, conseguentemente

$$\left.\begin{aligned}x&=\cos\theta\,.\sqrt{a^2-z^2}\\ y&=\operatorname{sen}\theta\,.\sqrt{a^2-z^2}\end{aligned}\right\}\;\ldots\ldots\;(o);$$

differenziando quest' equazioni, si ottiene

$$dx = -\operatorname{sen}\theta \,.\, d\theta\sqrt{a^2-z^2} - \frac{zdz}{\sqrt{a^2-z^2}}\cos\theta,$$

$$dy = \cos\theta \,.\, d\theta\sqrt{a^2-z^2} - \frac{zdz}{\sqrt{a^2-z^2}}\operatorname{sen}\theta,$$

moltiplicando l' ultima di quest' equazioni per la prima dell' equazioni (o) e la prima per la seconda di queste medesime equazioni (o), quindi sottraendo il primo prodotto dal secondo e osservando che $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$, verrà

$$ydx - xdy = -(a^2-z^2)d\theta = (z^2-a^2)d\theta$$

Paragonando quest' ultima con l' equazione (n), avremo

$$d\theta = \frac{cdt}{z^2-a^2}.$$

Quest' ultima equazione integrata per approssimazione, dopo avervi sostituito per dt il suo valore precedente, farà conoscere il valore di θ in funzione di z, e si avrà così per un istante qualunque la posizione del mobile sopra la sfera, poichè z si considera come conosciuto in funzione di t.

35. L' espressione della velocità in un punto qualunque della superficie sferica è data immediatamente dall' equazione (m), poichè indicando con ds l'elemento dalla trajettoria e rammentandosi che

$$\frac{ds^2}{dt^2} = v^2,$$

quest' equazione è la stessa cosa che

$$v^2 = 2gz + c',$$

donde si deduce

$$v = \sqrt{2gz + c'},$$

la costante c' è la velocità iniziale ovvero la velocità che ha luogo quando $z = 0$.

36. Se si domanda il valore della forza N uguale e opposta alla pressione che esercita il mobile contro la superficie della sfera, bisogna moltiplicare respettivamente ciascuna dell' equazioni (i) per la variabile che essa contiene e prendere la somma dei prodotti il che dà

$$\frac{xd^2x + yd^2y + zd^2z}{dt^2} = gz \pm \frac{\mathrm{N}}{a}\left(x^2+y^2+z^2\right) = gz \pm \mathrm{N}a \;.\;.\;.\;.\;.\; (p),$$

a motivo di $x^2+y^2+z^2 = a^2$.

Ma, differenziando l' equazione (l), si trova

$$xd^2x + dx \,.\, dx + yd^2y + dy \,.\, dy + zd^2z + dz \,.\, dz = 0,$$

donde, dividendo per dt^2,

$$\frac{xd^2x + yd^2y + zd^2z}{dt^2} = -\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dt^2} = -v^2.$$

Sostituendo nell' equazione (p), si ottiene

$$\pm \mathrm{N} = -\frac{v^2+gz}{a}.$$

Si sceglierà sempre quello dei due segni di N che rende il suo valore positivo, perchè questa quantità, la quale rappresenta l'intensità di una forza concorrente con altre forze in uno stesso punto, non potrebbe avere un valore negativo. (*Vedi* RESULTANTE.) In tutti i casi, astrazione fatta dal segno, la quantità

$$\frac{v^2+gz}{a}$$

è uguale alla pressione esercitata dal mobile contro la superficie della sfera.

37. *Moto di un corpo intorno di un asse fisso.* Quando un corpo solido, che possiamo sempre considerare come una riunione di punti materiali legati tra loro in un modo invariabile, è soggetto a girare uniformemente intorno di un asse fisso AB (*Tav.* CC, *fig.* 5), se s'immagina un'infinità di piani perpendicolari a quest'asse, potremo considerare che ciascun punto materiale descriva, in una rivoluzione intera, una circonferenza di circolo sopra uno dei piani. Le molecole o masse elementari m, m', m'', ec. percorrono così nello stesso tempo degli archi di uno stesso numero di gradi, e le loro velocità respettive saranno tanto più grandi quanto gli archi percorsi apparterranno a circonferenze più grandi. Gli archi di uno stesso numero di gradi essendo proporzionali ai loro raggi, seguirà il medesimo delle velocità, dimodochè prendendo per unità la distanza di una molecola all'asse e indicando con ω la sua velocità, che sarà la velocità angolare del sistema, le velocità dalle molecole m, m', m'', ec. situate alle distanze $am=r$, $a'm'=r'$, $a''m''=r''$, ec., saranno respettivamente rappresentate da

$$r\omega,\quad r'\omega,\quad r''\omega,\quad r'''\omega,\quad \text{ec.}$$

Le quantità di moto affettive che animeranno le masse elementari m, m', m'', ec., avranno dunque per espressioni

$$mr\omega,\quad m'r'\omega,\quad m''r''\omega,\quad m'''r'''\omega,\quad \text{ec.}$$

Supponiamo che delle forze date in grandezza e in direzione agiscano simultaneamente sopra tutte queste molecole, e imprimano loro delle velocità che sarebbero v, v', v'', ec., se le molecole fossero interamente libere; le quantità di moto ricevute saranno conseguentemente

$$mv,\quad m'v',\quad m''v'',\quad m'''v''',\quad \text{ec.}$$

e bisognerà, mediante il principio del d'Alembert, che vi sia equilibrio tra le quantità di moto impresse e le quantità di moto effettive, ciascuna di quest'ultime essendo presa in senso contrario della sua direzione.

Per ottenere l'equazione dell'equilibrio, consideriamo in particolare la massa elementare m, e rappresentiamo la forza mv che agisce sopra di essa con la parte mn della sua direzione; abbassiamo dal punto n la perpendicolare np sul piano del circolo descritto da questa massa; si chiami θ l'angolo nmp fra la forza e il piano, e decomponiamo mn ovvero mv in due forze, l'una $np=mv\operatorname{sen}\theta$ paralella all'asse fisso AB, e l'altra $pm=mv\cos\theta$, situata nel piano mpa. La prima sarà distrutta dalla resistenza dell'asse, e la seconda avrà il suo effetto. Ugualmente indicando con θ', θ'', θ''', ec. gli angoli che le forze $m'v$, $m''v''$, ec. fanno, con i piani di rotazione delle molecole m', m'', m''', ec., le quantità di moto impresse ai diversi punti del sistema saranno

$$mv\cos\theta,\quad m'v'\cos\theta',\quad m''v''\cos\theta'',\quad \text{ec.},$$

ed esse si troveranno situate negli stessi piani delle quantità di moto effettive $mr\omega$, $m'r'\omega$, $m''r''\omega$, ec.

Ora, poichè tutte queste quantità di moto agiscono in piani perpendicolari all' asse di rotazione, il loro effetto dev' essere lo stesso come se tutti questi piani non ne formassero che un solo; così, projettando sopra un piano perpendicolare all asse, le direzioni di tutte le forze applicate, e prendendo queste projezioni per le direzioni esse stesse (*Tav.* CC, *fig.* 9), bisognerà, perchè l' equilibrio possa sussistere, che la somma dei momenti presa rapporto al punto fisso a sia nulla, ovvero che la somma dei momenti che tendono a far girare il sistema in un senso intorno del punto a, sia uguale alla somma dei momenti che tenduno a farlo girare nel senso opposto. (*Vedi* Momento.) Ma le direzioni delle forze $mr\omega$, $m'r'\omega$, ec., nel piano di projezione, sono tangenti alle circonferenze descritte dalle masse m, m', m'', ec. intorno del punto fisso a, con i raggi r, r', r'', ec.

Così i momenti di queste forze rapporto al centro a saranno

$$mr^2\omega,\quad m'r'^2\omega,\quad m''r''^2\omega,\ \text{ec.};$$

e siccome esse tendono tutte a far girare il sistema nello stesso senso, bisogna prendere la somma di tutti questi momenti, la quale sarà

$$\omega\left[mr^2+m'r'^2+m''r''^2+\text{ec.}\ .\ .\ .\ .\ .\ \right],$$

Rappresentando con la caratteristica Σ la somma di tutte le quantità simili mr^2, $m'r'^2$, ec., $\omega\Sigma\, mr^2$ indicherà la somma dei momenti delle forze effettive, ed è questa quantità che deve fare equilibrio alla somma dei momenti delle forze $mv\cos\theta$, $m'v'\cos\theta'$, $m''v''\cos\theta''$, ec. Per ottenere quest' ultima, osserviamo che più forze possono tendere a far girare il sistema in un senso e le altre in un senso opposto: la somma dei momenti sarà dunque in generale la differenza di due somme di cui la più grande si comporrà di tutti i momenti delle forze, le quali tendono a far girare il sistema nel senso del suo moto effettivo: se L indica questa differenza, l' equazione dell' equilibrio cercata diventerà

$$L=\omega\Sigma\, mr^2,$$

e si potrà, col suo mezzo, determinare la velocità angolare ω. Astrazione fatta dai segni dei momenti, se indichiamo con p, p', p'', ec. le perpendicolari abbassate dal centro a sopra le direzioni delle forze $mv\cos\theta$, $m'v'\cos\theta'$, ec. avremo

$$L=mvp\cos\theta+m'v'p'\cos\theta'+m''v''p''\cos\theta''+\text{ec.}$$

ovvero, impiegando ancora la caratteristica Σ per indicare la somma delle quantità simili di cui si compone il secondo membro di quest' uguaglianza,

$$L=\Sigma\, mvp\cos\theta\,;$$

l' equazione dell' equilibrio diventa mediante ciò,

$$\Sigma\, mvp\cos\theta=\omega\,\Sigma\, mr^2,$$

donde si deduce, per l' espressione della velocità angolare,

$$\omega=\frac{\Sigma\, mvp\cos\theta}{\Sigma\, mr^2}\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (q).$$

38. Quando le velocità v, v', v'', ec. sono tutte uguali, paralelle fra loro, e che esse agiscono nei piani di rotazione delle molecole, gli angoli θ, θ', θ'', ec. sono nulli, e si ha allora

$$\cos\theta=1,\quad \cos\theta'=1,\quad \cos\theta''=1,\quad \cos\theta'''=1,\ \text{ec.}$$

In questo caso, la somma dei momenti delle velocità diventando

$$mvp+m'vp'+m''vp''+\text{ec.}=v\left[mp+m'p'+m''p''+\text{ec.}\right],$$

possiamo darle la forma $v\Sigma mp$, conservando alla caratteristica Σ la sua significazione generale di aggregato di termini simili, e l'equazione (q) diventa

$$\omega=\frac{v\Sigma mp}{\Sigma mr^2}\ \ldots\ldots\ (r).$$

Concepiamo ora un piano paralello alla velocità v e che passi per l'asse fisso, le perpendicolari abbassate dai punti m, m', m'', ec., sopra questo piano saranno uguali alle perpendicolari p, p', p'', ec., dei centri di rotazione sopra le direzioni delle velocità uguali e paralelle v, v', v'', ec., e se si chiamano q, q', q'', ec. le nuove perpendicolari, che s'indichi in particolare con Q quella che sarebbe abbassata dal centro di gravità del sistema, e che finalmente si esprima con M la massa totale o la somma di tutte le molecole elementari, si avrà, mediante la proprietà conosciuta del centro di gravità

$$MQ=mq+m'q'+m''q''+\text{ec.},$$

ovvero, a motivo di $q=p$, $q'=p'$, $q''=p''$, ec.,

$$MQ=\Sigma mp.$$

Osservando inoltre che le masse elementari m, m', m'', ec. sono tutte uguali, e che possiamo ad esse sostituire l'elemento dM della massa totale, si vede che la somma Σmr^2 non è che l'integrale di $r^2.dM$, dimodochè l'equazione (r) diventa definitivamente

$$\omega=\frac{vMQ}{\int r^2dM}\ \ldots\ldots\ (s).$$

La quantità Σmr^2 ovvero $\int r^2dM$ si chiama il *momento d'inerzia* del mobile; in altra parte abbiamo esposto i mezzi per ottenere il suo valore numerico. (*Vedi* MOMENTO D' INERZIA.)

39. Se succedesse che alcune solamente delle molecole m, m', m'', ec. avessero ricevuto la velocità v, si avrebbe quest' altra espressione

$$\omega=\frac{vM'Q'}{\int r^2dM},$$

nella quale M' indica la somma delle masse elementari che hanno ricevuto la velocità v, e Q' la perpendicolare abbassata dal centro di gravità di questa somma sul piano condotto per l'asse paralellamente alla velocità.

40. Esaminiamo il caso in cui diverse forze acceleratrici agendo sopra i punti del sistema lo farebbero girare intorno dell'asse fisso con un moto variato.

Sia OZ (*Tav.* CCI, *fig.* 1) l'asse di rotazione, *mrs* il circolo descritto intorno di quest' asse da una delle molecole m, φ la forza acceleratrice applicata al punto m nella direzione Pm, e δ l'angolo PmT che fa la direzione della forza φ con la tangente Tm del circolo *mrs*.

Decomponiamo la forza φ in tre altre: la prima paralella all'asse OZ, la seconda diretta seguendo il raggio Am, e la terza diretta seguendo la tangente Tm; le due prime saranno distrutte dalla resistenza dell'asse, l'ultima sola, la cui

espressione sarà $\varphi \cos \delta$, tenderà a far muovere il punto m. Si chiami r il raggio Am, e rappresentando con dm l'elemento della massa, esprimiamo con ω la velocità angolare del sistema dopo il tempo t; la velocità dell'elemento dm sarà nel medesimo istante $r\omega$ e nella durata infinitamente piccola dt, questa velocità crescerà di quella che sarà dovuta all'azione della forza acceleratrice.

Premesso ciò, osserviamo che se il mobile fosse libero, la forza $\varphi \cos \delta$ gl'imprimerebbe nell'istante dt una velocità

$$\varphi \cos \delta \,.\, dt,$$

dimodochè dopo il tempo $t+dt$ la velocità sarebbe

$$r\omega + \varphi \cos \delta \,.\, dt.$$

Ma, siccome l'elemento materiale dm è legato al sistema, la sua velocità effettiva dopo il tempo $t+dt$ è

$$r\omega + rd\omega,$$

e la sua quantità di moto effettiva

$$\left(r\omega + rd\omega\right)dm,$$

nel mentre che la quantità di moto impressa è

$$\left(r\omega + \varphi \cos \delta \,.\, dt\right)dm.$$

Queste considerazioni applicandosi indifferentemente a tutte le molecole del sistema, avremo, in generale, per la somma delle quantità di moto impresse, l'espressione

$$\Sigma\left(r\omega + \varphi \cos \delta \,.\, dt\right)dm$$

e, per la somma delle quantità di moto effettive,

$$\Sigma\left(r\omega + rd\omega\right)dm.$$

Quest'ultime quantità di moto, prese cangiando le loro direzioni, dovendo fare equilibrio alle prime, mediante il principio del D'Alembert, bisogna che i loro momenti, rapporto all'asse fisso, siano uguali ai momenti di queste prime rapporto allo stesso asse, e siccome le forze agiscono seguendo le tangenti delle circonferenze descritte dai punti materiali alle quali esse sono applicate, basta moltiplicare ciascuna quantità di moto per il raggio del circolo che gli corrisponde per avere il suo momento. L'equazione dei momenti è perciò

$$\Sigma\left(r^2\omega + r\varphi \cos \delta \,.\, dt\right)dm = \Sigma\left(r^2\omega + r^2 d\omega\right)dm,$$

la quale si ridurrà

$$\Sigma\, r\varphi \cos \delta \,.\, dtdm = \Sigma\, r^2 d\omega\, dm \;\ldots\ldots\; (t).$$

Mettendo fuori del segno Σ le quantità dt e $d\omega$, le quali sono le stesse in tutti i termini, e osservando che la *somma* di un seguito indefinito di quantità infinitamente piccole è un'integrazione, si potrà dare all'equazione (t) la forma

$$dt\int r\varphi \cos \delta \,.\, dm = d\omega \int r^2 dm,$$

donde si ricava

$$\frac{d\omega}{dt}=\frac{\int r\varphi\cos\delta \,.\, dm}{\int r^2 dm} \; . \; . \; . \; . \; (u)$$

Quest' espressione darà la velocità angolare del sistema, per ciascun istante del moto, dopo che avremo effettuato le integrazioni, per le quali bisogna conoscere l' intensità e la direzione della forza acceleratrice φ, che agisce sopra ciascun elemento del corpo, come pure la posizione di questi elementi. Se ne troverà un esempio di applicazione alla parola PENDOLO.

41. *Moto di un corpo libero nello spazio*. Le leggi del moto di un punto materiale, libero nello spazio, si applicano immediatamente a qualunque corpo, o sistema di punti materiali, dei quali tutti i punti si muovono con la medesima velocità e descrivono delle trajettorie paralelle. Quando non succede così, dobbiamo rappresentarci il moto del sistema come composto di due moti differenti, l' uno di trasposizione nello spazio, comune a tutte le molecole, l' altro di rotazione intorno di un punto solido, e particolare a ciascuna molecola. Supponiamo, per esempio, che nell' intervallo di tempo che la molecola m del corpo A (*Tav.* CCI, *fig.* 2) ha impiegato per trasportarsi da m in m', le altre molecole abbiano cangiato di posizione, in modo che la molecola n che si trovava alla destra della linea mm' si trovi alla sinistra; siccome questa molecola è legata invariabilmente al punto m, essa non ha potuto prendere questa nuova posizione senza girare intorno del punto m, ed ugualmente per tutte le altre molecole. Così, osservando che se il moto di rotazione non avesse avuto luogo, tutti i punti del sistema si sarebbero mossi paralellamente alla direzione impressa al punto m, nel mentre che al contrario, se il moto di trasposizione, non fosse esistito, il sistema avrebbe girato intorno ad un centro fisso m, si vede che possiamo decomporre il moto effettivo in due altri moti e considerare la velocità di ciascuna molecola ed un istante dato come la resultante di due velocità, l' una uguale e paralella a quella del centro di rotazione, l' altra differente per ciascuna molecola e dipendente dalla distanza della molecola al centro di rotazione come la velocità angolare del sistema. La questione consiste perciò nella determinazione in queste due specie di moto.

Ammettiamo generalmente, per maggior semplicità, che il punto intorno del quale gira il sistema sia il suo centro di gravità, e decomponiamo tutte le forze acceleratrici che agiscono sopra un elemento in tre forze X, Y, Z respettivamente paralelle a tre assi rettangolari coordinati. Dopo un tempo t, le velocità dell' elemento dm seguendo questi tre assi sarranno

$$\frac{dx}{dt},\quad \frac{dy}{dt},\quad \frac{dz}{dt},$$

dopo un tempo $t+dt$, esse diventeranno

$$\frac{dx}{dt}+d\frac{dx}{dt},\quad \frac{dy}{dt}+d\frac{dy}{dt},\quad \frac{dz}{dt}+d\frac{dz}{dt}.$$

Queste velocità sono le velocità effettive; ma se alla fine del tempo t il punto materiale avesse cessato di far parte del sistema e che esso avesse ceduto liberamente all' azione delle forze acceleratrici che agiscono sopra esso, le sue velocità seguendo gli assi si sarebbero aumentate nell' istante dt delle quantità

$$Xdt,\quad Ydt,\quad Zdt,$$

e sarebbero per conseguenza divenute

$$\frac{dx}{dt}+\mathrm{X}dt,$$

$$\frac{dy}{dt}+\mathrm{Y}dt,$$

$$\frac{dz}{dt}+\mathrm{Z}dt.$$

Sottraendo da queste velocità impresse all' elemento materiale dm, le velocità effettive precedenti, avremo per le velocità perdute o guadagnate da quest'elemento nel senso dei tre assi l' espressioni

$$\mathrm{X}dt-d\frac{dx}{dt},$$

$$\mathrm{Y}dt-d\frac{dy}{dt},$$

$$\mathrm{Z}dt-d\frac{dz}{dt}.$$

Così, mediante il principio del d' Alembert, il corpo resterebbe in equilibrio se si applicassero all' elemento dm le quantità di moto

$$\left(\mathrm{X}dt-d\frac{dx}{dt}\right)dm,$$

$$\left(\mathrm{Y}dt-d\frac{dy}{dt}\right)dm,$$

$$\left(\mathrm{Z}dt-d\frac{dz}{dt}\right)dm,$$

corrispondenti a queste velocità perdute o guadagnate. Ciò applicandosi a tutte le molecole del sistema, e l' equilibrio del corpo supposto libero esigendo che le somme di tutte le forze parallele a ciascun asse sieno separatamente nulle, avremo le tre equazioni

$$\int\left(\mathrm{X}dt-d\frac{dx}{dt}\right)dm=0,$$

$$\int\left(\mathrm{Y}dt-d\frac{dy}{dt}\right)dm=0,$$

$$\int\left(\mathrm{Z}dt-d\frac{dz}{dt}\right)dm=0,$$

donde si deduce

$$\left.\begin{aligned}\int\frac{d^2x}{dt^2}dm&=\int\mathrm{X}dm\\ \int\frac{d^2y}{dt^2}dm&=\int\mathrm{Y}dm\\ \int\frac{d^2z}{dt^2}dm&=\int\mathrm{Z}dm\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots\ (z),$$

l'integrazioni debbono prendersi in tutta l'estensione della massa del corpo.

Siano, ora, x_1, y_1, z_1 le coordinate del centro di gravità ed M la massa del mobile, abbiamo, dalle proprietà conosciute di questo centro

$$Mx_1 = \int xdm, \quad My_1 = \int ydm, \quad Mz_1 = \int zdm.$$

Differenziamo due volte di seguito quest'equazioni, considerando M e dm come costanti e x_1, y_1, z_1, x, y, z come funzioni del tempo t, otterremo

$$M\frac{d^2x_1}{dt^2} = \int\frac{d^2x}{dt^2}dm,$$

$$M\frac{d^2y_1}{dt^2} = \int\frac{d^2y}{dt^2}dm,$$

$$M\frac{d^2z_1}{dt^2} = \int\frac{d^2z}{dt^2}dm.$$

Sostituendo invece dei secondi membri i loro valori (z), troveremo per l'equazioni del moto del centro di gravità

$$\left.\begin{aligned} M\frac{d^2x_1}{dt^2} &= \int Xdm \\ M\frac{d^2y_1}{dt^2} &= \int Ydm \\ M\frac{d^2z_1}{dt^2} &= \int Zdm \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (z).$$

42. Quest' ultima equazioni ci fanno conoscere una proprietà assai degna di osservazione del centro di gravità: ed è che *questo centro si muove come se tutte le forze del sistema gli fossero immediatamente applicate*. Infatti, le quantità

$\int Xdm$, $\int Ydm$, $\int Zdm$, sono le somme delle componenti di tutte le forze seguendo i tre assi, dimodochè se indichiamo con X_1, Y_1, Z_1 le componenti della resultante del sistema delle forze, si ha

$$MX_1 = \int Xdm, \quad MY_1 = \int Ydm, \quad MZ_1 = \int Zdm.$$

Paragonando queste con l'equazioni (z), se ne deduce

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = X_1, \quad \frac{d^2y_1}{dt^2} = Y_1, \quad \frac{d^2z_1}{dt^2} = Z_1,$$

vale a dire, le medesime equazioni che si troverebbero considerando il centro di gravità come un punto isolato, al quale fossero applicate tutte le forze del sistema, parallelamente alle loro direzioni.

43. L'equazione del moto di rotazione non la determineremo che pel caso in cui il corpo sia mosso da una forza acceleratrice, la cui direzione non passa pel centro di gravità: essendo questo il caso più frequente del problema. Sia PQ (*Tav.* CCI, *fig.* 3) la direzione della forza acceleratrice, abbassiamo sopra questa retta, dal centro di gravità G, una perpendicolare Gm, la forza PQ tendente a far girare Gm intorno del punto G farà descrivere al punto m un circolo di cui Gm sarà il raggio, dimodochè il punto m, trasportando tutti gli altri punti

del sistema, imprimerà al corpo un moto di rotazione intorno di un asse perpendicolare al piano del circolo Gm e il quale passa pel punto G. Così, indicando con v la velocità impressa dalla forza acceleratrice al centro di gravità, con M la massa del solido, e facendo $Gm=Q$, avremo (n.° 38), per la velocità angolare ω,

$$\omega=\frac{vMQ}{\int r^2dm}.$$

Il momento d'inerzia $\int r^2dm$ essendo preso rapporto ad un asse che passa pel centro di gravità, si riduce a Mk^2 (*Vedi* Momento d'Inerzia). Così l'equazione precedente diviene

$$\omega=\frac{vQ}{k^2}.$$

Si otterrà con questa formula la velocità angolare per mezzo della velocità del centro di gravità, quando avremo determinato quest'ultima con l'aiuto dell'equazione (α). I limiti di questo dizionario impediscono di entrare in maggiori particolarità.

Moto circolare. (*Vedi* Centrale.)

Moto Assoluto e Relativo. (*Vedi* Meccanica).

In *Astronomia*, il moto riceve diverse qualificazioni come *diurno*, *annuale*, *orario*, *siderale*, ec. (*Vedi* questa parola).

Vedi, per quello che concerne il moto dei fluidi, le parole Idrodinamica, Sgorgo, Pneumatica e Vapore.

MOTORE. (*Mec.*) Questo nome vien dato a qualunque agente capace d'imprimere moto ad un corpo inerte ovvero ad una macchina. In un orologio da tasca, per esempio, la molla è il *motore*, in un orologio grande, il peso; in un mulino, l'acqua o il vento, ec.

Abbiamo già stabilito (*Vedi* Cavallo), che chiamando P lo sforzo esercitato da un motore al suo punto d'applicazione, e V lo spazio che questo punto percorre nel senso dello sforzo e nell'unità di tempo, il prodotto PV rappresenta la quantità d'azione somministrata dal motore, qualunque sia d'altra parte la sua natura. Ora, il lavoro effettuato da una macchina essendo sempre relativo alla quantità d'azione somministrata dal motore e aumentando con essa, il problema il più interessante che si presenta, quando un motore è dato, è quello di ottenerne la maggior quantità d'azione possibile; ma siccome non possiamo mai aumentare uno dei fattori del prodotto PV senza diminuire l'altro, si tratta di determinare i valori respettivi di P e di V in modo da rendere PV un maximum. Ecco le considerazioni teoriche sopra le quali si fonda questa determinazione.

Quando la velocità è nulla, vale a dire quando lo sforzo P si esercita sopra un ostacolo invincibile, la sua pressione evidentemente è la maggior possibile, ma non vi è quantità d'azione prodotta, poichè allora $PV=0$. Se l'ostacolo acquista un moto, la pressione diminuisce tanto più quanto la velocità aumenta; dimodochè essa sarebbe nulla se l'ostacolo potesse muoversi tanto presto quanto il motore; in quest'ultimo caso, si avrebbe ancora $PV=0$.

Fra queste due estremità necessariamente si deve trovare una data velocità che renda il prodotto della pressione e della velocità il maggiore possibile: ed è questo grado di velocità che è necessario di conoscere.

Sia P' la pressione che un motore può esercitare sopra un ostacolo invincibile,

V' una velocità che rende la pressione nulla, V una velocità intermedia, e P la pressione corrispondente a questa velocità; si suppone che esista sempre fra queste quantità, almeno per i motori animati, la proporzione

$$P' : P = V'^2 : (V'-V)^2,$$

donde si deduce

$$PV = P'\left(1-\frac{V}{V'}\right)^2 . V \; . \; . \; . \; . \; (a).$$

Per ottenere il valore di V, che rende questa quantità un maximum, bisogna uguagliare a zero la sua differenziale presa rapporto a V, il che dà

$$\left(1-\frac{V}{V'}\right)^2 - \frac{2V}{V'}\left(1-\frac{V}{V'}\right) = 0,$$

equazione dalla quale si ricava

$$V = \frac{1}{3} V'.$$

Sostituendo questo valore nell'equazione (a), si ottiene

$$P = \frac{4}{9} P'.$$

Così, mediante questa teoria, il maximum di quantità d'azione avrebbe luogo quando la pressione del motore è i $\frac{4}{9}$ della maggior pressione della quale esso è capace senza servirsi della velocità, e la sua velocità un $\frac{1}{3}$ della maggior velocità che esso può prendere senza produrre pressione. La quantità d'azione maximum sarebbe perciò uguale ai $\frac{4}{27}$ del prodotto della più gran pressione per la più gran velocità; perchè i valori precedenti danno

$$PV = \frac{4}{27} P'V'.$$

L'esperienza ha provato che questo risultamento non può applicarsi senza restrizione a tutte le specie di motori, e non possiamo ancora determinare approssimativamente i valori più adattati delle quantità P e V per ciascun motore in particolare, che mediante osservazioni immediate.

I motori che comunemente s'impiegano per mettere le macchine in moto sono: i motori animati (*Vedi* Uomo e Cavallo), l'acqua, il vento, la forza espansiva dei fluidi elastici, i pesi e le molle elastiche (*Vedi* Queste diverse parole); gli effetti che essi producono possono sempre essere paragonati a pesi elevati ad una data altezza (*Vedi* Forze motrici). Recentissimamente sono stati indicati diversi tentativi fatti in Inghilterra e agli Stati Uniti, per ricavar partito dalla forza motrice delle calamite artificiali traversate da correnti elettriche. Se le speranze che fanno concepire questi tentativi hanno un esito felice, l'industria si troverà in possesso di un nuovo motore tanto più utile, quanto la sua applicazione sembra non presentare veruno dei pericoli che accompagnano quella del vapore.

MOUTON (Gabriele), matematico ed astronomo francese, nato nel 1618 a Lione, e morto in questa città il 28 Settembre 1694. Pubblicò un'opera importante intitolata: *Observationes diametrorum solis et lunae apparentium*, ec., Lione, 1670, in-4, nella quale determina il diametro apparente del sole nel suo apogeo, con una tale esattezza, che nulla si è trovato da variarvi, nemmeno oggigiorno che si posseggono strumenti tanto più perfetti per osservare. Aveva pure calcolato i logaritmi, con dieci decimali, de' seni e delle tangenti per ciascun secondo dei primi quattro gradi: tali logaritmi, ridotti a sole sette cifre decimali, inseriti vennero nelle *Tavole* di Gardiner, Avignone, 1770, in-fol.

MOVIMENTO. *Vedi* Moto.

MULINO A VENTO. *Vedi* Vento.

MULLER (Giovanni), geometra ed astronomo celebre del XV secolo, più noto sotto il nome di *Regiomontano*, nacque nel villaggio di Unfind, presso Koenigsberg, nel ducato di Sassonia-Hildborghausen, il 6 Giugno 1436. Fece i suoi studj a Lipsia, ove di buon'ora manifestò la sua inclinazione per l'astronomia: in età di quindici anni si recò a Vienna per assistere alle lezioni di Purbach, che con sommo grido insegnava tale scienza nell'università di quella città. Il professore accolse con bontà il giovane discepolo, che a lui si presentava già fornito di cognizioni sufficientemente estese, e non tardò ad associarlo ai suoi lavori. Osservarono insieme alcuni ecclissi ed una congiunzione di Marte, che loro diede occasione di scoprire un errore di due gradi nelle Tavole Alfonsine. Il cardinale Bessarione, che allora trovavasi a Vienna, consigliato aveva a Purbach di compilare un compendio latino dell'Almagesto di Tolomeo, e Purbach persuaso dell'importanza di tale lavoro vi aveva posto mano; ma la morte che lo colse nella età di 39 anni gl'impedì di condurlo a termine. Dietro l'invito che morendo gli aveva fatto il suo maestro, Muller si accinse a continuare l'impresa, e conoscendo quanto per tale oggetto fosse necessario il possedere a fondo il greco, si decise a passare in Italia per studiare tale lingua sotto alcuno di quei dotti greci che vi si erano refugiati dopo la caduta di Costantinopoli. Cominciò tale studio a Roma sotto Giorgio di Trebisonda, quindi si recò a Ferrara, ove si perfezionò sotto Teodoro Gaza. Si accinse allora a un numero prodigioso di lavori scientifici che fanno stupire non meno per la moltiplicità delle cognizioni che per l'attività straordinaria che richiedevano nel loro autore. La semplice indicazione delle opere di Muller oltrepasserebbe di molto i limiti che ci sono prescritti nelle nostre notizie biografiche: per comprovare i servigj che egli ha reso alla scienza, basterà dare la lista di quelle che sono state stampate. Purbach e Regiomontano sono stati senza contrasto i rigeneratori dell'astronomia moderna, e se la morte non gli avesse colpiti entrambi sul fior dell'età, è probabile che la riforma compiuta di questa scienza sarebbe stato il resultato dei loro lavori. Tutti e due avevano scorto le incoerenze e le inverisimiglianze dalle ipotesi di Tolomeo, tutti e due avevano meditato profondamente sulla semplicità maestosa del sistema di Pitagora; ma la gloria di stabilire il moto della terra e di farne la base dell'astronomia era riserbata ad un altro. Nel numero dei servigj che Regiomontano ha reso alla scienza non deve trascurarsi la fondazione della celebre stamperia, che eresse in Norimberga e che trovò il tempo di dirigere senza cessare di attendere indefessamente alle osservazioni e alla composizione de' suoi scritti. Questo dotto illustre, in età appena di quarant'anni, morì a Roma il 6 Luglio 1476, lasciando incompleto un numero grande di progetti, il cui solo pensiero onora il suo ingegno. Ei fu sotterrato nel Panteon.

Ecco, sulla scorta di Delambre, la lista più compiuta delle opere stampate di Giovanni Muller: I *Joannis Regiomontani Ephemerides astronomicae ab anno* 1475 *ad annum* 1506, Norimberga, in-4; II *Disputationes contra Ghe-*

rardi Cremonensis in planetarum theoricas deliramenta, ivi, 1474, in-fol.; III *Tabula magna primi mobilis cum usu multiplici, rationibusque certis*, ivi, 1475, in-4; IV *Fundamenta operationum quae fiunt per tabulam generalem*, Neuburg, 1557, in-fol: è una specie di trigonometria, di cui le operazioni sono agevolate dalla tavola precedente. V *Kalendarium novum*, Norimberga, 1476, in-4. Su questo calendario deve consultarsi la *Storia dell'astronomia del medio evo* di Delambre, che ne dà una descrizione particolarizzata e curiosa. VI *Tabulae directionum profectionumque*, Venezia, 1485, in-4; ristampate più volte colle tavole dei seni e delle tangenti. VII *Almanach ad annos 18 ab anno* 1489; VIII *Joannis Regiomontani et Georgii Purbachii Epitome in Almagestum Ptolemaei*, Venezia, 1496, in-fol.; IX *Ephemerides incipientes ab anno* 1473, Venezia, 1498, in-4; X *In Ephemerides commentarium*, in seguito all'almanacco di Stoefler, Venezia, 1513, in-4; XI *Tabulae eclipsium Purbachii*; *Tabulae primi mobilis a Monteregio*, ivi, 1515, in-fol.; XII *Problemata XVI de cometae longitudine, magnitudine et loco vero*, Norimberga, 1531, in-4; XIII *Epistola ad cardinalem Bessarianem de compositione et usu cujusdam metereoscopii armillaris*, in seguito all'*Introduzione geografica* di Apiano, Ingolstadt, 1533, in fol.; XIV *Problemata XXIX Sapheae nobilissimi instrumenti a J. de Monteregio*, Norimberga, 1534. È la descrizione di uno strumento che Muller chiama *safea*, e che molto somiglia all'analemma di cui si è fatto un sì longo uso. XV *Observationes XXX annorum a Joanne Regiomontano et B. Walthero Narimbergae habitae* . . . . . *Scripta clarissimi mathematici de torqueto, astrolabio armillari, regula magna ptolemaica, baculoque astronomico*, Norimberga, 1554, in-4. Snellio ha dato una edizione più corretta di quest'opera sotto il seguente titolo: *Coeli et siderum in eo errantium observationes Hassiacae* . . . . . *quibus accesserunt Regiomontani et Bernardi Waltheri observationes Norimbergicae*, Leida, 1618; XVI *De triangulis planis et sphaericis libri V una cum tabulis sinuum*, senza luogo e senza data. XVII Parecchie lettere che furono pubblicate da De Murr nel 1786 nella sua opera: *Memorabilia bibliothecarum publicarum Norimbergensium et universitatis Altdorfianae*, tom. I, pag. 74-205. Per maggiori notizie su questo celebre dotto si consulti la vita che di lui ha scritto Gassendi, e l'articolo che lo riguarda nella *Biografia universale*.

MULTINOMIO. (*Alg.*)(*Vedi* POLINOMIO).

MULTIPLO (*Alg.*) Un numero che ne contiene un altro come fattore si dice *multipla* di quest'altro. Così 8 è *multipla di* 4; 15 è *multiplo* di 5, ec. In generale, se si ha M$=$P. Q, M è multiplo di P a di Q.

Un PUNTO MOLTIPLO, in geometria, è un punto comune d'intersezione di più rami di una medesima curva che si tagliano (*Vedi* PUNTO).

MUNSTER (SEBASTIANO), uno dei più dotti geografi e matematici del suo tempo, nacque a Ingelheim nel 1489, e morì a Basilea nel 1552. Delle sue opere scientifiche citeremo soltanto: I *Calendarium biblicum hebraicum ex Hebraeorum penetralibus editum*, Basilea, 1527, in-4; II *Horologiographia*, ivi, 1531, in-4; trattato di gnomonica il più compiuto che fino allora fosse stato pubblicato. III *Organum uranicum*; *Theoricae omnium planetarum motus*, *canones*, ec., ivi, 1536, in-fol.; IV *Cosmographia universalis* (in tedesco), ivi, 1544, in-fol. V *Rudimenta mathematica in duos libros digesta*, ivi, 1551, in-fol.

MURALE (*Astron.*). Quarto di circolo, posto esattamente nel piano del meridiana, e per maggior solidità fissato ad un muro. Serve ad osservare le altezze meridiane dei corpi celesti.

MUSCIDA (*Astron.*). Nome di una stella posta sulla bocca di Pegaso e segnata nei cataloghi colla lettera *π*

MYDORGE (Claudio), dotto geometra, nato a Parigi nel 1585. L'amicizia di cui l'onorò Cartesio, e i grandi sacrifisj da lui fatti pei progressi dell'ottica e della diottrica gli fruttarono maggior celebrità che non i suoi scritti. Nato da una famiglia che aveva avuto personaggi distinti nella magistratura, si diede a coltivare le scienze col più nobile disinteresse. Fu Mydorge che fece lavorare pel suo illustre amico le lenti paraboliche, iperboliche, ovali ed ellittiche, delle quali egli stesso aveva disegnato le forme con somma esattezza; queste lenti furono di grande utilità a Cartesio per ispiegare i diversi fenomeni della visione. Spese pure somme considerabili, che alcuni biografi fanno ascendere a 300,000 lire, per far costruire delle lenti da telescopj, degli specchi ustorj, ed in diverse esperienze. Mydorge morì nel Luglio 1647, lasciando un numero grande di manoscritti che sono andati spersi nel tempo delle turbolenze della Fronda. Le opere da lui pubblicate sono: I *Examen du livre des Récréations mathématiques*, Parigi, 1630, in-8: il libro al quale si riferisce questo *Esame* è del p. Leurechon, gesuita, che lo aveva pubblicato sotto il falso nome di E. Van. Essen. II *Prodromi catoptricorum et dioptricorum, sive conicorum, libri IV priores*, Parigi, 1639, in-fol. Il padre Mersenne ha inserito quest'opera nella sua raccolta intitolata: *Universae geometriae mixtaeque mathematicae Sinopsis* (*Vedi* Mersenne).

FINE DEL VOLUME SESTO.

ERRORI.	CORREZIONI.
Pag. 323 Verso 7. (*Tav.* CLXI, *fig.* 1).	(*Tav.* CLXI, *fig.* 7).
« 334 Verso 20. (*Tav.* CLXI, *fig* 7).	(*Tav.* CC, *fig.* 10).
« 362 Verso 19. (*Tav.* CLXI, *fig.* 2).	(*Tav.* CLXI, *fig.* 8).